THÉORIE

DU

MOUVEMENT DE LA LUNE

PAR

J. PLANA

TOM. I.

À TURIN
DE L'IMPRIMERIE ROYALE
1832



THÉORIE

DU

MOUVEMENT DE LA LUNE



THÉORIE

DU

MOUVEMENT DE LA LUNE

PAR

JEAN PLANA

ASTRONOME ROYAL ET DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE

CONSEILLER DE L'ORDRE DU MÉRITE CIVIL DE SAVOIE; CHEVALIER DE L'ORDRE MILITAIRE DES SS. MAURICE ET LAZARE; DE L'ORDRE IMPÉRIAL DE LA COURONNE DE FER; DIRECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES A L'ACADÉMIE ROYALE MILITAIRE; PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ ROYALE DE TURIN; MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TURIN; CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE; DE LA SOCIÉTÉ ROYALE, ET DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE LONDRES; DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE BERLIN; UN DES QUARANTE DE LA SOCIÉTÉ ITALIENNE; MEMBRE HONORAIRE DE L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE DE KASAN; DE LA SOCIÉTÉ HELVÉTIQUE; DE L'ACADÉMIE DE PALERME; ETC.

Ut omnia candide legantur, et defectus in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis lectorum conatibus investigentur, et benigne suppleantur, enixe rogo.

NEWTON, *Princip. Praefat.*

TOME PREMIER



À TURIN

DE L'IMPRIMERIE ROYALE

1832

À SA MAJESTÉ

LE ROI

CHARLES ALBERT

Sire,

VOTRE MAJESTÉ *a daigné m'accorder la permission de publier cet Ouvrage sous ses auspices. Je sens tout le prix de cet honneur; et après avoir exécuté une aussi vaste entreprise, sans cesse soutenu par une forte volonté de mettre la théorie de la Lune en parfaite harmonie avec l'observation, je ne pouvais pas souhaiter davantage.*

VOTRE MAJESTÉ *m'a prévenu par des marques si éclatantes de sa protection et de sa haute bienveillance, qu'il y aurait de l'ingratitude de ma part, à ne pas Lui témoigner publiquement à quel point j'en suis touché.*

Le mouvement imprimé par VOTRE MAJESTÉ *aux Sciences et aux Lettres par la création d'un nouvel Ordre, destiné à récompenser, dans ses États, le mérite transcendant, et à maintenir sans cesse allumé le flambeau des Beaux Arts, fera de Votre règne une époque à jamais mémorable pour le Piémont.*

Je m'acquitte aujourd'hui d'un devoir, et je profite de la circonstance la plus glorieuse de ma vie pour rendre à VOTRE MAJESTÉ *un hommage pur, dicté par la plus vive reconnaissance. A ce seul titre, j'ose croire qu'Elle daignera l'accueillir avec bonté.*

Chaque partie des connaissances humaines a son langage et son style: malheureusement, cette branche de la Mécanique Céleste ne permet pas de traduire en peu de mots, à l'aide du langage ordinaire, les principaux résultats, qui sont le fruit réel d'un enchaînement de calculs aussi compliqués. J'ai cependant essayé de surmonter cette difficulté; mais je dois Vous avouer, SIRE, *l'inutilité de mes efforts. J'ai dû céder à l'inflexibilité de l'Algèbre,*

pour ne point voir l'obscurité et la complication prendre la place de la clarté et de la concision qui sont inhérentes au langage algébrique; aux signes de ce puissant instrument de l'entendement humain auquel on doit plusieurs de ces grandes découvertes qui, sous d'autres formes, se répandent dans la société par de nombreuses applications utiles.

C'est ainsi que les théories abstraites de la Dynamique acquièrent une importance majeure lorsqu'on les applique au mouvement de la Lune. Cet astre, qu'on a d'abord cru n'avoir été donné à la Terre que pour l'éclairer pendant les nuits, offre à l'espèce humaine un avantage plus précieux. Hipparque de Bithynie, deux siècles avant notre ère, avait déjà compris, que les éclipses de Lune pouvaient servir à la détermination des longitudes géographiques. Seize siècles après lui, Copernic, en établissant le double mouvement de la Terre, fit sortir l'Astronomie de la sphère étroite qui l'avait renfermée jusqu'alors, et amena bientôt sur la scène du monde savant l'immortel Galilée, qui, mettant à profit une de ses découvertes, proposa pour le même objet, l'observation des éclipses des satellites de Jupiter. Mais de pareils moyens sont incertains, et tout-à-fait insuffisans pour déterminer les longitudes en mer. Les

Astronomes du 16.ème siècle sentirent déjà que la Lune, par la rapidité de son mouvement, pouvait fournir un moyen plus exact et d'un usage journalier. Cette idée était sans doute très-ingénieuse. Il est vrai qu'elle ne fut d'abord qu'une spéculation inutile aux besoins de la navigation, et que pendant trop long-temps encore plusieurs navigateurs périrent victimes de l'estime incertaine obtenue par le Loch et la Boussole. Mais après la découverte des instrumens à réflexion, faite en 1731, *on est revenu avec plus d'ardeur à l'idée radicale, d'employer le mouvement de la Lune pour déterminer les longitudes; et par des perfectionnemens graduels, cette méthode a enfin été portée de nos jours au rang des découvertes qui réunissent la grandeur, l'utilité, et le mérite de la difficulté vaincue.*

Sire, *c'est à ces considérations, c'est à la noble curiosité qu'excite en nous l'explication de l'étonnant phénomène du flux et reflux de l'Océan, et le calcul exact des éclipses pour les siècles passés et à venir, qu'est due l'importance attachée aux travaux des Savans qui tendent à perfectionner nos connaissances sur le mouvement du satellite de la Terre.*

J'ignore quel sera le sort de cette nouvelle théorie de la Lune, malgré l'avantage incontestable qu'elle a

de représenter fidèlement ce genre de phénomènes par une déduction toujours conforme au grand principe de la gravitation universelle. Il y a loin de ce principe dû à Newton à ces craintes chimériques causées autrefois par l'apparition de certains phénomènes célestes; il y a loin de là à ces premières observations astronomiques, qui ne présentaient que des faits isolés, presque sans attrait pour une imagination impatiente de remonter à la cause qui établit entre eux une liaison analytique.

Également éloigné de la crédulité et de la prévention, j'ignore, si, la liberté avec laquelle j'ai discuté les recherches antérieures dans les points qui ne me paraissaient pas à l'abri de toute objection, sera, en général, blâmée ou approuvée; ou du moins permise à un ami sincère de la vérité, qui peu content de la voir parfois rencontrée par un heureux hasard, exige qu'elle soit toujours solidement établie par le calcul et par l'observation. Mais j'ai l'intime conviction d'avoir toujours émis l'opinion que je m'étais formée d'après mes calculs et mes réflexions; de n'avoir rien négligé, rien avancé légèrement; et d'avoir fait enfin tout ce qui dépendait de moi pour rendre cet Ouvrage moins indigne d'être dédié à VOTRE MAJESTÉ.

Mes voeux seraient remplis, si, par là j'attestais à

la postérité, autant qu'il est en mon pouvoir, que Votre Majesté *savait apprécier et dignement encourager l'étude de la plus sublime parmi les Sciences naturelles; de l'Astronomie, qui constitue le plus noble titre de l'intelligence humaine.*

Je supplie Votre Majesté *d'agréer les sentimens du très-profond respect avec lequel je suis,*

Sire,

De Votre Majesté,

À Turin le 7 septembre 1832.

Le très-humble et très-obéissant serviteur et fidèle sujet JEAN PLANA.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

La Théorie du mouvement de la Lune exposée dans cet ouvrage dérive du seul principe de la gravitation universelle, et n'emprunte de l'observation que les données indispensables, c'est-à-dire les constantes arbitraires du problème. Les trois coordonnées de cet astre, dont la formation pour un temps indéfini constitue le but que l'on veut atteindre, se trouvent, en dernière analyse, exprimées par des fonctions littérales et explicites, qu'il a suffi de réduire en nombres pour obtenir les coefficiens des inégalités immédiatement comparables avec le résultat des observations astronomiques.

Les inégalités de la longitude vraie renferment toutes celles qui peuvent se trouver dans son expression, depuis les quantités du premier ordre jusqu'à celles du cinquième ordre inclusivement : c'est là le terme de l'approximation, généralement parlant. Mais on a poussé plus loin le développement des coefficiens, qui, eu égard à la lenteur de la convergence des séries par lesquelles ils sont exprimés, exigent la considération des quantités d'un ordre supérieur au cinquième. Telle est la raison de

l'inégalité que l'on voit régner dans cette théorie, relativement au *maximum* de l'ordre jusqu'auquel les coefficiens ont été développés. C'est ainsi, par exemple, que le coefficient de l'équation séculaire de la longitude a exigé la considération des quantités du septième ordre.

Newton, à l'aide de l'analyse mathématique, a pu déduire aisément des phénomènes généraux et simples la loi de la gravitation de la matière, qui par son universalité et l'égalité de son action atteste l'unité du plan de l'univers; mais l'application spéciale de cette loi aux effets très-composés qui ont lieu dans le mouvement des satellites entraîne à des calculs immenses. Ces calculs sont remarquables par la variété et par la finesse des considérations que leur exécution demande, pour saisir la totalité des termes qui demeurent sensibles après les intégrations, et pour concevoir par quelles combinaisons s'opère la destruction plus ou moins complète de ceux qu'on croirait sensibles d'après un examen moins approfondi.

Chaque coefficient des inégalités lunaires peut être considéré comme une fonction éminemment transcendante des constantes arbitraires, qu'il est impossible de présenter sous une forme finie, indépendamment du signe intégral. Et cela ne paraîtra pas surprenant, si l'on réfléchit que plusieurs questions infiniment plus simples, sont, à cet égard, dans un cas semblable. On ne peut donc connaître que par leur développement les fonctions, à l'aide desquelles on veut exprimer le mouvement de la Lune, soumise à l'action simultanée de la Terre et du Soleil. La méthode des approximations successives peut, seule, fournir ces développemens par un procédé uniforme dans sa marche, et mettre en évidence les différentes parties du premier, second, etc. ordre, qui appartiennent aux fonctions ainsi développées.

La solution du problème perd par là le caractère inhérent aux solutions en termes finis; mais elle ne cesse pas de demeurer strictement littérale, et d'être applicable même dans les cas où des causes accidentelles changeraient sensiblement, entre certaines limites, les élémens actuels de l'orbite de la Lune. Certes, rien n'autorise une telle hypothèse; mais, en opérant comme si elle pouvait se réaliser dans les siècles à venir, on imprime à la solution du problème des trois corps un caractère plus subordonné à la doctrine des séries. Par là on obtient non-seulement les résultats qui peuvent satisfaire aux besoins actuels, mais on acquiert en outre des connaissances plus étendues sur le mode de leur liaison avec les élémens dont ils sont fonction. De là dérive aussi l'avantage non moins précieux de pouvoir mesurer le degré de convergence des différentes séries, qui, réduites en nombres, fournissent les coefficiens cherchés, en offrant, par leur gradation même, un moyen simple pour estimer avec assez de justesse la partie négligée.

La méthode que nous avons suivie pour déterminer les coefficiens des inégalités lunaires est analogue, sous un certain point de vue, à la méthode *exégétique* que *Viète* demandait pour trouver, par des opérations successives, toutes les parties de chaque racine d'une équation algébrique. *Newton*, sans abandonner la condition d'une solution purement littérale, a donné pour cet objet une règle connue sous le nom de *parallélogramme analytique*, qui fut ensuite démontrée et simplifiée par *Lagrange*. Cette même méthode a été reprise, perfectionnée, et étendue par l'illustre Auteur de la Théorie de la Chaleur. Cependant on ne peut se dissimuler que, dans la théorie des courbes (pour laquelle cette méthode a été inventée) il y a une circonstance qui, en général, lui procure un avantage. Ici, la

lettre qui règle le développement étant l'abscisse, n'est pas un paramètre proprement dit, et on peut aisément lui donner des valeurs convenables pour la convergence des séries : mais en appliquant la même méthode à une équation littérale, renfermant une seule inconnue, on aurait souvent un développement illusoire, sans un choix préalable du paramètre par rapport auquel il convient de développer la racine qu'on aurait en vue: et ce choix est en lui même un problème difficile.

L'idée du développement des fonctions est d'une fécondité inépuisable. L'opération de la division algébrique en offre le premier exemple ; et c'est en l'approfondissant que *Newton* et *Leibnitz* ont ouvert une carrière immense aux applications de l'analyse mathématique. Le principe radical sur lequel tous les développemens reposent, tire son origine de l'axiome, que toute quantité peut être partagée en deux parties d'une infinité de manières. En arithmétique, le parti qu'on en peut tirer est fort borné; mais en transportant le même axiome dans l'algèbre, il prend un caractère imposant par le contraste entre les formes des deux parties qui composent le total. Ici, les opérations sont diversifiées, et peuvent être conduites de manière que, au lieu de choisir arbitrairement la seconde partie, on tâche de la rendre fort petite en comparaison de la première: et, par des artifices convenables, on s'efforce d'exprimer celle-ci par une suite de termes dont la succession est réglée par une loi plus ou moins difficile à saisir. Alors, la seconde partie qui constitue ce qu'on nomme le *reste* de la série, peut être rendue inférieure à une limite donnée; et comme telle, tout en conservant dans son plein la difficulté intrinsèque qui empêche d'exprimer la fonction sous forme finie, elle rend nulle l'influence de cet obstacle, en la faisant tomber sur des quantités qu'il est permis

de négliger. C'est ainsi que le périmètre d'un polygone régulier peut être pris pour le périmètre du cercle circonscrit, dès que l'on permet de négliger les quantités décimales d'un rang déterminé.

Si les restes des fonctions transcendantes ne peuvent pas disparaître lorsqu'on les considère isolément, il importe d'observer qu'il n'en est pas ainsi à l'égard de leurs combinaisons, faites par voie d'addition, ou autrement. Les exemples de combinaisons de fonctions transcendantes susceptibles d'être exprimées sous forme finie, à l'aide de quantités transcendantes d'un ordre inférieur et de quantités algébriques, sont fréquens dans les recherches d'analyse pure. Les transcendantes elliptiques offraient déjà des exemples fort remarquables des réductions de ce genre; mais le théorème découvert dans ces derniers temps par M. *Abel* en offre un exemple éminemment frappant, qui ouvre une carrière nouvelle aux recherches sur le calcul intégral. C'est ainsi que *Viète* et *Harriot*, dans le 16.ème siécle, ont reculé les bornes de la théorie des équations algébriques par la découverte de leurs théorèmes sur la composition des coefficiens.

La nécessité d'avoir séparément les coefficiens des inégalités lunaires, jointe à la complication des équations composées d'un nombre infini de termes, par lesquelles ils peuvent être liés ne permet pas, dans l'état actuel de la science, d'imiter les beaux exemples qu'on vient de citer, lorsqu'on veut en tirer un parti réel sans être séduit par des idées trop spéculatives. Après avoir erré dans les régions sublimes de l'analyse, après avoir heurté contre les écueils qui échappaient à la vue par leur éloignement, on se voit contraint de replier son imagination, fatiguée par ces efforts inutiles, sur les principes élémentaires de la science, pour y trouver des moyens d'exécution, qui, par

leur simplicité même, ne soient pas arrêtés par les opérations qu'ils laissent indiquées. Alors on découvre peu-à-peu, que la difficulté réelle de la théorie de la Lune tient à l'excessive complication du sujet, et on regarde comme une faveur de la fortune, attachée à la disposition actuelle du système solaire, la possibilité d'un développement effectif des coefficiens des inégalités lunaires par des symboles purement algébriques et convergens. Un examen plus approfondi fait ensuite connaître que, même avec cette limitation, on a des obstacles assez considérables à surmonter, lorsqu'on s'impose la condition de déterminer, avec la précision mathématique, les coefficiens numériques *absolus* qui affectent les quantités littérales. Ces coefficiens sont une conséquence nécessaire du principe même de la pesanteur universelle: à leur égard, l'idée d'une approximation ne peut pas être tolérée, puisqu'on sait qu'ils sont composés d'un nombre fini de parties rationnelles, résultantes du nombre plus ou moins grand de combinaisons entre les argumens, susceptibles de les produire relativement à chacun des termes pris en considération. Il est vrai qu'ici la possibilité démontrée d'avoir ces nombres mathématiquement, est, en quelque sorte, combattue par la difficulté d'une exécution qui croît à mesure que l'on passe d'une approximation à la subséquente. Mais il n'y a là rien de surprenant pour ceux qui ont réfléchi sur la puissance et sur la faiblesse de l'analyse mathématique: ils auront remarqué, que la plupart des problèmes de l'astronomie physique présentent des difficultés d'exécution qui en ont souvent rallenti les progrès. La recherche de l'expression du mouvement du périgée lunaire en offre un exemple frappant. La première approximation a pu suffire à *Newton*, pour avoir le mouvement progressif du noeud; mais elle était absolument insuffisante pour

celui du périgée. Au lieu de passer à la seconde, sans être retenu par la difficulté de l'exécution, plusieurs Géomètres se sont jétés dans bien des recherches divergentes. Enfin *Clairaut* fit cesser les doutes, en montrant la grandeur absolue du second terme de ce mouvement. Le problème des inégalités séculaires des planètes est un des plus simples, sous le rapport de la conception des termes périodiques qui représentent les intégrales complètes des équations linéaires, dont sa solution dépend. Cependant on n'ose pas l'attaquer de front, à cause de la complication inhérente à la formation d'une équation algébrique d'un degré égal au nombre des planètes, dont il faudrait déterminer numériquement les racines. L'incertitude actuellement existante sur la valeur des masses des planètes peut justifier en partie cette lacune laissée par les Géomètres dans l'astronomie physique. Mais si l'on songe qu'il s'agit de fonctions du temps dont la période embrasse un très-grand nombre de siècles, on sentira naître en soi un vif désir de suppléer à la briéveté de la vie par un travail qui pourrait déjà satisfaire, jusqu'à un certain point, la noble curiosité des contemporains. Une foule de questions d'analyse pure présentent des obstacles analogues; mais leur existence arrête rarement les applications aux sciences physico-mathématiques.

Après la citation de ces exemples, je me hâte de faire observer (pour prévenir les objections), que bien souvent, les obstacles qui se rencontrent à la naissance des théories mathématiques, tiennent moins à l'exécution des calculs qu'à la juste définition de ceux qu'il faudrait entreprendre. Le calcul des différentes réductions qu'on doit appliquer aux longueurs observées d'un pendule composé pour être ramenées à l'état idéal d'un pendule simple isochrone oscillant dans le vide au

niveau de la mer en offre un exemple digne de la méditation des Géomètres philosophes. Dans les théories de Physique mathématique sur-tout, l'introduction de toutes les forces qui concourent à la production des phénomènes constitue la principale difficulté, sans parler de celles qui tiennent au calcul intégral qu'il faut souvent envisager sous un nouveau point de vue. S'il fallait produire une preuve de cette vérité, nous la trouverions dans la gradation des pas franchis par *Clairaut*, *Laplace* et *Poisson* pour établir solidement la théorie de l'action capillaire. La loi de la gravitation n'a point ces difficultés; les équations différentielles qui renferment les lois spéciales des phénomènes sont faciles à former; mais la déduction effective de ces lois, quoique réglée incontestablement par des fonctions circulaires, devient, au de là des premiers termes, difficile à découvrir par l'espèce d'action et de réaction qui existe entre les argumens et les coefficiens des inégalités à longue période. Ici, les séries se ramifient de plus en plus à cause de l'abaissement d'ordre produit par les intégrations, et leur enchaînement n'est pas moins indestructible que l'existence de ces mêmes argumens.

Les théories de la Lune publiées jusqu'ici n'offrent pas une expression littérale et explicite des trois coordonnées: elles portent toutes le caractère d'une solution qu'on pourrait appeler mixte, en réfléchissant qu'on y procède par des opérations algébriques entrelacées avec des opérations arithmétiques; où les quantités numériques absolues se trouvent enveloppées avec les valeurs spéciales des constantes arbitraires. Outre cela, on ne peut pas dire, à la rigueur, que l'approximation ait été conduite de manière, que les coefficiens y sont exacts dans les quantités d'un ordre déterminé; du moins au de là du troisième ordre,

généralement parlant. Les preuves de cette assertion se déduisent des résultats mêmes de ces théories, en les ramenant à la forme précise que nous avons adoptée. Alors on voit souvent des différences entre les coefficiens numériques absolus qui disparaîssent par un examen fait avec soin sur les différentes parties qui concourent à leur formation; et cela, en dévoilant l'omission de celles résultantes du développement de quelques termes du même ordre et de la même forme que ceux qu'on a conservés. Nous avons donné plusieurs exemples de comparaisons de cette espèce dans le cours de cet ouvrage; et il faut en examiner les détails pour se persuader de leur justesse. Notre but, dans ces comparaisons, a été de faire voir seulement, que le principe, par sa nature inviolable, de tenir compte de toutes les quantités du même ordre n'a pas été toujours suivi; et que par fois, on s'en est affranchi en commettant l'inconséquence de conserver des termes plus petits que ceux que l'on avait négligés. Mais nous admettons que, non obstant de pareils défauts, il est possible, que, par des heureuses compensations, on soit tombé sur des résultats sensiblement d'accord avec l'observation. Car on sait bien, que les erreurs de ce genre seront considérablement atténuées après la réduction en nombres des facteurs qui conservent naturellement la forme littérale jusqu'à la fin de l'intégration. Mais cela n'empêche pas, que leur existence ne soit un motif suffisant pour rendre la solution plus ou moins contraire à la doctrine des séries, et faire attribuer le succès à des relations fortuites entre les grandeurs données par l'observation.

Un moyen efficace que nous avons employé pour soustraire notre théorie à l'influence de ces erreurs faciles à commettre dans une recherche aussi compliquée, fut celui de développer sans

cesse les diviseurs qui naissent de l'intégration, et d'arrêter les produits des différentes fonctions là où les termes subséquens seraient d'un ordre supérieur à celui que l'on considère. Alors, on peut effectivement sommer un fort grand nombre de termes de la même espèce et par là diminuer la complication. Mais il est possible que l'application trop réitérée d'un tel principe ait en lui-même l'inconvénient de diminuer la convergence des séries. Sur cela nous n'avons rien à opposer. Nous accorderons sans peine qu'il est possible de présenter les coefficiens des inégalités lunaires par des fonctions des élémens sous une forme différente de la notre, qui aurait l'avantage de les rendre plus convergens, tout en demeurant dans les quantités du même ordre. C'est ainsi, par exemple, que la fonction Log. $(1+x)$ existe développée sous les deux formes

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}; \qquad \frac{2x}{2+x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{(2+x)^3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{x^5}{(2+x)^5} + \text{etc.};$$

dont la seconde est plus convergente que la première pour toute valeur de x qui soit une fraction proprement dite. Mais, s'il est facile d'imaginer, en général, l'existence des formes ainsi variées; il faut avouer qu'il est très-difficile de réaliser avec succès une telle conception dans la Théorie de la Lune. La complication inhérente aux formes qui conservent les signes d'opérations non exécutées deviendrait bientôt un obstacle insurmontable pour une solution *littérale* telle que nous la voulions; où l'approximation devait être poussée assez loin pour mettre la théorie d'accord avec l'observation. La forme que nous avons adoptée permet du moins d'atteindre *lentement* cette limite.

Cette dernière phrase demande un développement propre à expliquer ici en peu de mots à quoi tient la circonstance du

grand nombre de pages dont est composée cette Théorie de la Lune. Pour cela, il faut avant tout observer, que nous avons voulu montrer l'origine même de cette théorie, et ses états successifs. Or, pour un problème comme celui-ci, que l'on est forcé de résoudre par approximation, il ne suffit pas de donner les derniers résultats en indiquant la marche suivie pour les obtenir: on peut encore souhaiter d'avoir préparés les moyens propres à pousser plus loin les séries qui expriment les coefficiens. Alors on sent l'utilité des résultats intermédiaires que nous publions : et d'ailleurs cette publication devenait indispensable pour faciliter autant que possible les moyens de vérification.

À ce sujet je ne puis mieux déclarer ma pensée, qu'en appliquant ici à la totalité de l'ouvrage ce que j'ai dit ailleurs en ces termes. Il m'eut été facile de présenter les résultats qui y sont renfermés dans un nombre de pages beaucoup plus petit, si j'avais voulu supprimer les *produits partiels* qui mettent en évidence les différentes combinaisons entre les argumens. Mais, après bien des réflexions, j'ai rejeté ce parti, comme nuisible aux véritables progrès de la Théorie de la Lune, et comme peu conforme aux règles d'une stricte loyauté qui, à mon avis, doivent être observées dans un ouvrage de cette nature. La puissance de l'analyse ne m'a pas paru assez énergique pour pénétrer dans cette théorie avec une marche à la fois sûre et rapide. Il est rare qu'on soit disposé à vérifier des résultats aussi éloignés de leur origine, lorsqu'il faut reconstruire presqu'en entier l'édifice: et ceux qui se livrent à un semblable travail doutent par fois d'avoir réellement épuisé toutes les combinaisons qui concourent à la formation d'un terme déterminé. C'est d'après ces considérations, que j'ai pensé qu'il valait mieux multiplier les points de repos en publiant la totalité des résultats

intermédiaires. J'ose espérer que les erreurs qui me seront échappées seront excusées, eu égard à l'excessive complication du sujet. Je n'ai pu me faire aider par personne; j'ai dû traverser seul cette longue chaîne de calculs, et il n'est pas étonnant, si, par inadvertance, j'ai omis quelques termes qu'il fallait considérer pour me conformer à la rigueur de mes propres principes. J'ai fait tous mes efforts pour établir avec la précision mathématique, au moins les premiers termes des coefficiens des inégalités lunaires. Sans cette condition capitale, qui peut avoir de l'influence sur les progrès futurs de l'analyse, et s'il était uniquement question de démontrer, que la loi de la gravitation universelle suffit pour rendre raison des principaux phénomènes qu'on observe dans le mouvement de la Lune, j'aurais regardé comme à-peu-près inutile l'entreprise de m'engager dans des développemens d'une exécution aussi difficile. Après les travaux de *Clairaut*, de *D'Alembert*, d'*Euler*, de *Tobie Muyer* et de *Laplace*, cette question était irrévocablement décidée en faveur de l'attraction Newtonienne. Mais il fallait atteindre, par la théorie, le degré de précision que donne l'observation, et il fallait mettre en évidence le nombre effrayant des combinaisons auxquelles il est nécessaire d'avoir égard pour découvrir avec certitude les premiers termes, qui, comme je l'ai déjà dit, peuvent être considérés comme nés du développement des fonctions éminemment transcendantes qui sont l'expression des coefficiens des perturbations lunaires. C'est l'accomplissement de cette tâche qui m'a forcé de considérer une foule de termes qui n'ont aucune existence dans la classe des quantités sensibles, quoiqu'ils soient du même ordre qu'une foule d'autres termes dont la considération est absolument nécessaire. Le travail serait moindre, s'il était permis d'estimer la grandeur des inégalités

d'après la simple connaissance de l'ordre analytique du coefficient; alors, on pourrait renfermer les règles à suivre pour cet objet dans un petit nombre de préceptes d'une application facile. Mais lorsqu'on pousse fort loin le calcul, les coefficiens numériques absolus nés des développemens sont d'une grandeur tellement différente entr'eux, qu'on pourrait être entraîné dans des erreurs graves, si l'on n'avait pas égard à leur influence. Tout cela tend à dilater l'ouvrage, et quoique souvent l'avantage se réduise à dissiper des doutes, on doit être satisfait d'avoir ainsi dilaté des idées théoriques, dont l'existence est dissimulée dans le résultat des observations.

Ce que nous venons de dire jusqu'ici, peut donner une idée de la nature de ces recherches, de leur étendue et de l'esprit dans lequel elles ont été entreprises; mais la lecture de la table des matières placée à la tête de chaque volume peut, seule, donner la connaissance des différentes parties qui composent cet ouvrage. Néanmoins il peut être utile d'avertir ici, que le premier volume se compose de deux parties distinctes. La première comprend l'exposition purement théorique de tout ce qui concerne la formation des équations différentielles, qui, par leur intégration, doivent fournir les trois coordonnées de la Lune, en prenant, comme *D'Alembert*, la longitude vráie pour la variable indépendante. La seconde partie comprend le perfectionnement ultérieur qu'on peut donner à ces coordonnées, lorsqu'on suppose connue leur expression analytique pour ce qui tient à l'action de la Terre censée sphérique, et à la force perturbatrice du Soleil. Le premier volume renferme par là tous les principaux résultats qui se rattachent à cette théorie, savoir; les trois coordonnées en fonctions de la longitude vraie et en fonctions explicites du temps, ainsi que les expressions du

mouvement du noeud et du périgée accompagnées de la partie séculaire qui les affecte. Toutes ces formules sont réduites en nombres, et complètées par les formules propres au calcul du mouvement horaire. La Théorie du mouvement de la Lune autour de son centre de gravité a été exposée vers la fin du même volume.

Je n'ai pas développé les petites inégalités produites par l'action directe des planètes sur la Lune : à cet égard les résultats connus ont toute la précision qu'on peut souhaiter.

Le second volume renferme les développemens nécessaires pour parvenir aux trois coordonnées de la Lune, en poussant l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre inclusivement.

Le troisième volume comprend les développemens propres à fournir les quantités d'un ordre supérieur au cinquième, qui ont été ajoutées aux trois coordonnées pour obvier aux inconvéniens qui naîssent du peu de convergence de plusieurs séries.

La distribution du travail m'a forcé de placer vers le commencement de ce volume plusieurs recherches relatives à la constante de la parallaxe équatoriale de la Lune et du Soleil, et au rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre. Cette dernière question m'a entraîné dans une digression sur la proposition XXXVI du 3.ème livre des *Principes de Newton*, dont l'objet est, de trouver la force du Soleil pour mouvoir les eaux de la mer. J'ai repris ensuite la recherche des développemens ultérieurs qui se rapportent au mouvement du noeud, et je l'ai terminée par l'analyse des considérations très-fines par lesquelles *Newton* a saisi, en homme de génie, l'analogie existante entre le mouvement du noeud et le mouvement de précession des équinoxes.

J'ai trouvé le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre égal à la fraction $\frac{1}{89,4}$, à l'aide d'une nouvelle détermination du coefficient de la nutation lunaire fondée sur deux séries de déclinaisons de l'étoile polaire observées en 1811, et en 1823-24.

La première de ces deux séries a été faite à Milan par le célèbre astronome M.r *Oriani*, que la mort vient d'enlever aux sciences. Ses grands talens, par lesquels il a illustré l'Observatoire de Milan et toute l'Italie, le rendaient respectable, et feront regretter sa perte. Honoré de sa confiance et de son amitié, j'ai eu occasion d'admirer souvent la pureté et la noblesse de son caractère. La modestie rehaussait son mérite, le sentiment de la jalousie du mérite d'autrui lui était inconnu. Nul homme n'était plus indifférent que M.r *Oriani* pour ces dignités qui l'avaient porté dans une sphère de la société où les honneurs sont attachés au char de la fortune. Mais le philosophe demeura fidèle à ses principes et à ses habitudes; rien ne put atténuer son ardeur pour l'étude, ni vaincre son penchant pour la solitude.

L'ouvrage que je publie aujourd'hui sur la Théorie de la Lune est le fruit d'un long travail que j'ai entrepris depuis plusieurs années, et que j'ai suivi, en diminuant les interruptions autant qu'il m'a été possible au milieu de mes occupations diverses. J'ose penser qu'il contribuera à mieux fixer les idées sur la Théorie de la Lune proprement dite; et que, la réunion d'une expression purement littérale et explicite des coefficiens des inégalités avec leur valeur numérique conforme à l'observation, sera désormais regardée comme la base d'une juste appréciation des recherches sur cette matière.

L'énumération de toutes les causes qui ont retardé la publication de cet ouvrage serait inutile; mais dans ce nombre,

il y en a une dont le souvenir pesera toujours douloureusement sur mon cœur. Au moment où j'allais toucher le terme de cette longue carrière, la mort frappa (la journée du 27 mars 1832) l'unique fils qui aurait pu consoler ma vieillesse, en se livrant à l'etude des sciences exactes.

À Turin le 16 décembre 1832.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS CE VOLUME.

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

CHAPITRE SECOND.

EXPRESSIONS DES COORDONNÉES DU SOLEIL ET DE LA LUNE RELATIVES AU MOUVEMENT ELLIPTIQUE ET THÉORIE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

CHAPITRE TROISIÈME

TRANSFORMATIONS PRÉPARATOIRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE,

ET DÉVELOPPEMENT ULTÉRIEUR DES FONCTIONS DE LA FORCE PERTURBATRICE.

CHAPITRE COMPLÉMENTAIRE

RECHERCHES DIVERSES QUI SUPPOSENT DÉJÀ CONNUE L'EXPRESSION ANALYTIQUE DES INÉGALITÉS LUNAIRES DUES À L'ACTION DU SOLEIL.

THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

§ I.

Équations différentielles entre les coordonnées orthogonales.

1. Soient M, M', M'' les masses respectives de la Lune, du Soleil et de la Terre. On suppose que ces trois corps s'attirent en raison inverse du carré de leur distance mutuelle, et il s'agit de trouver les équations du mouvement de M autour de M''. Pour procéder avec ordre nous supposerons d'abord que ces trois corps sont formés de couches parfaitement sphériques, homogènes et concentriques ; alors la masse de chacun d'eux sera censée concentrée dans le centre de gravité, ce qui réduit le problème à déterminer le mouvement de trois points matériels, dont M, M', M'' désignent le pouvoir attractif absolu à l'unité de distance.

2. Cela posé, rapportons le mouvement de M'' à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace par les trois coordonnées X, Y, Z; et pour déterminer la position du corps M, imaginons trois axes mobiles passant par le centre de gravité de M'', respectivement parallèles aux premiers; de sorte que x, y, z soient les coordonnées de M, et x', y', z' les coordonnées de M', relativement à ces axes. Il est évident que, par rapport aux axes fixes, l'on aura $X+x$, $Y+y$, $Z+z$ pour les coordonnées du corps M, et $X+x'$, $Y+y'$, $Z+z'$ pour les coordonnées

du corps M'. Maintenant si nous nommons r la distance de M à M'', r' la distance de M' à M'', et Δ la distance de M à M', il est clair que l'on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2; \quad \Delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

3. Puisque $\frac{M''}{r^2}$ et $\frac{M'}{\Delta^2}$ désignent les forces avec lesquelles le corps M est attiré par les corps M'' et M', il en résulte que l'on a $M''\frac{x}{r^3}$, $M''\frac{y}{r^3}$, $M''\frac{z}{r^3}$ pour les composantes de la force $\frac{M''}{r^2}$, et $M'\frac{x'-x}{\Delta^3}$, $M'\frac{y'-y}{\Delta^3}$, $M'\frac{z'-z}{\Delta^3}$ pour les composantes de la force $\frac{M'}{\Delta^2}$.

Actuellement, pour fixer les idées, imaginons que la Lune et le Soleil soient placés dans la région des coordonnées positives, la Lune se trouvera dans un point intermédiaire entre la Terre et le Soleil; ainsi la force $\frac{M''}{r^2}$ et ses composantes tendront à diminuer les coordonnées de la Lune, tandis que la force $\frac{M'}{\Delta^2}$ et ses composantes tendront à les augmenter. Donc, pour avoir la valeur absolue des composantes qui agissent sur le corps M, il faudra prendre la différence des composantes précédentes, respectivement parallèles aux mêmes axes, c'est-à-dire les fonctions

$$M'\frac{x'-x}{\Delta^3} - M''\frac{x}{r^3}; \quad M'\frac{y'-y}{\Delta^3} - M''\frac{y}{r^3}; \quad M'\frac{z'-z}{\Delta^3} - M''\frac{z}{r^3}.$$

Comme il s'agit d'un système libre, l'on sait par les principes de la dynamique que les forces accélératrices doivent être respectivement égales aux coefficiens différentiels du second ordre des trois coordonnées $X+x$, $Y+y$, $Z+z$, qui déterminent la position de la Lune par rapport à un point fixe dans l'espace. Donc en désignant par dt l'élément du tems, nous aurons les équations

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} = M'\frac{x'-x}{\Delta^3} - M''\frac{x}{r^3};$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = M'\frac{y'-y}{\Delta^3} - M''\frac{y}{r^3};$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = M'\frac{z'-z}{\Delta^3} - M''\frac{z}{r^3};$$

desquelles il est facile d'éliminer $\frac{d^2X}{dt^2}$, $\frac{d^2Y}{dt^2}$, $\frac{d^2Z}{dt^2}$ par la considération suivante.

Le corps M'' étant attiré par M et par M' avec des forces respectivement égales à $\frac{M}{r^2}$ et $\frac{M'}{r'^2}$, il est clair que l'on doit avoir

$$\frac{d^2X}{dt^2} = M\frac{x}{r^3} + M'\frac{x'}{r'^3};$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} = M\frac{y}{r^3} + M'\frac{y'}{r'^3};$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2} = M\frac{z}{r^3} + M'\frac{z'}{r'^3}.$$

Ainsi en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et en nommant σ la somme $M + M''$ des masses de la Terre et de la Lune, l'on aura

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \sigma\frac{x}{r^3} + M'\frac{x'}{r'^3} - M'\frac{x'-x}{\Delta^3} = 0; \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \sigma\frac{y}{r^3} + M'\frac{y'}{r'^3} - M'\frac{y'-y}{\Delta^3} = 0; \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \sigma\frac{z}{r^3} + M'\frac{z'}{r'^3} - M'\frac{z'-z}{\Delta^3} = 0. \end{cases}$$

4. Considérons maintenant la Terre et la Lune comme des corps tels que leur surface extérieure, ainsi que celle des couches de densité variable dont ils sont formés, soit peu différente de la figure sphérique. Si l'on désigne par x_1, y_1, z_1, r_1 les coordonnées et le rayon vecteur d'un point donné de la Lune, par R la distance de ce même point à une quelconque des molécules de la Terre, et par U_1 l'intégrale $S\frac{dM''}{R}$ qui détermine la somme des molécules de la Terre divisées par leur distance respective, R, au point pris dans la masse de la Lune, l'on aura $U_1 = \frac{M''}{r_1} + U'$, où U' est une fonction susceptible d'être développée suivant les puissances descendantes de r_1, propre à représenter la partie de U_1 due à l'écart de la figure de la Terre de

la figure sphérique. On sait que les différentielles partielles $-\frac{dU_1}{dx_1}$, $-\frac{dU_1}{dy_1}$, $-\frac{dU_1}{dz_1}$ déterminent les composantes (parallèles aux axes qui se coupent au centre de gravité de la Terre) de la force avec laquelle serait attiré par la Terre un point matériel quelconque de la Lune ; donc nous aurons

$$-\frac{1}{M}S\frac{dU_1}{dx_1}dM, \quad -\frac{1}{M}S\frac{dU_1}{dy_1}dM, \quad -\frac{1}{M}S\frac{dU_1}{dz_1}dM$$

pour les composantes de la force avec laquelle l'attraction de la Terre fait mouvoir le centre de gravité de la Lune ; les intégrales étant censées étendues à la masse totale de la Lune. Or, en substituant la valeur de U_1, l'on a

$$-\frac{1}{M}S\frac{dU_1}{dx_1}dM = -\frac{M''}{M}S\frac{d\cdot\frac{1}{r_1}}{dx_1}dM - \frac{1}{M}S\frac{dU'}{dx_1}dM;$$

mais en posant $x_1 = x + \alpha$, $y_1 = y + \beta$, $z_1 = z + \gamma$, et par conséquent $r_1 = \sqrt{[(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 + (z+\gamma)^2]}$, il est clair que l'on a

$$\frac{d\cdot\frac{1}{r_1}}{dx_1} = \frac{d\cdot\frac{1}{r_1}}{d\alpha} = \frac{d\cdot\frac{1}{r_1}}{dx},$$

et
$$S\frac{d\cdot\frac{1}{r_1}}{dx_1}dM = S\frac{d\cdot\frac{1}{r_1}}{dx}dM = \frac{d\cdot S\frac{dM}{r_1}}{dx};$$

et puisque U' est une fonction de x_1, y_1, z_1, l'on aura par la même raison

$$S\frac{dU'}{dx_1}dM = S\frac{dU'}{d\alpha}dM = \frac{d\cdot SU'dM}{dx}.$$

Donc, en appelant V_1 l'intégrale $S\frac{dM}{r_1}$, c'est-à-dire la somme des molécules de la Lune divisées respectivement par leur distance au centre de gravité de la Terre, l'on aura

$$S\frac{d\cdot\frac{1}{r_1}}{dx_1}dM = \frac{dV_1}{dx},$$

et en substituant cette valeur dans l'équation posée plus haut, il viendra

$$-\frac{1}{M}S\frac{dU_1}{dx_1}dM = -\frac{M''}{M}\cdot\frac{dV_1}{dx} - \frac{1}{M}\cdot\frac{d\cdot SU'dM}{dx}.$$

Maintenant si l'on fait $V_1 = \frac{M}{r} + V'$, l'équation précédente se changera en

$$-\frac{1}{M}S\frac{dU_1}{dx_1}dM = \frac{M''x}{r^3} - \frac{M''}{M}\cdot\frac{dV'}{dx} - \frac{1}{M}\cdot\frac{d\cdot SU'dM}{dx};$$

et l'on aura de même par rapport aux variables y_1, z_1;

$$-\frac{1}{M}S\frac{dU_1}{dy_1}dM = \frac{M''y}{r^3} - \frac{M''}{M}\cdot\frac{dV'}{dy} - \frac{1}{M}\cdot\frac{d\cdot SU'dM}{dy};$$

$$-\frac{1}{M}S\frac{dU_1}{dz_1}dM = \frac{M''z}{r^3} - \frac{M''}{M}\cdot\frac{dV'}{dz} - \frac{1}{M}\cdot\frac{d\cdot SU'dM}{dz}.$$

On voit par-là que pour obtenir les trois intégrales qui entrent dans les seconds membres de ces équations, il suffit d'évaluer l'intégrale $SU'dM$ par rapport aux coordonnées α, β, γ qui déterminent la position d'une molécule quelconque de la Lune, en prenant pour origine son centre de gravité.

5. Actuellement si l'on nomme x_2, y_2, z_2, r_2 les coordonnées et le rayon vecteur d'une molécule quelconque de la Terre, et que l'on désigne par U_2 la somme (c'est-à-dire l'intégrale $S\frac{dM}{R}$) des molécules de la Lune divisées respectivement par leur distance à ce point, l'on pourra supposer $U_2 = \frac{M}{r_2} + U''$; U'' étant la partie de U_2 provenante de l'écart de la figure de la Lune de la figure sphérique. Cela posé, l'on aura

$$-\frac{1}{M''}S\frac{dU_2}{dx_2}dM'' = -\frac{M}{M''}S\frac{d\cdot\frac{1}{r_2}}{dx_2}dM'' - \frac{1}{M''}S\frac{dU''}{dx_2}dM''$$

pour la composante de la force avec laquelle la masse de la Lune attire le centre de gravité de la Terre parallèlement à l'axe des x. Donc en posant $V_2 = S\frac{dM''}{r_2}$, et en remarquant que l'on peut supposer $V_2 = \frac{M''}{r} + V''$, il viendra

$$-\frac{1}{M''}S\frac{dU_2}{dx_2}dM'' = \frac{Mx}{r^3} - \frac{M}{M''}\cdot\frac{dV''}{dx} - \frac{1}{M''}\cdot\frac{d\cdot SU''dM''}{dx};$$

et il est clair que l'on trouvera de la même manière

$$-\frac{1}{M''}S\frac{dU_2}{dy_2}dM''=\frac{My}{r^3}-\frac{M}{M''}\cdot\frac{dV'}{dy}-\frac{1}{M''}\cdot\frac{d\cdot SU''dM''}{dy},$$

$$-\frac{1}{M''}S\frac{dU_2}{dz_2}dM''=\frac{Mz}{r^3}-\frac{M}{M''}\cdot\frac{dV''}{dz}-\frac{1}{M''}\cdot\frac{d\cdot SU''dM''}{dz}.$$

Pour obtenir l'intégrale $SU''dM''$ qui entre dans ces équations, il faudra faire $x_2=x+\alpha'$, $y_2=y+\beta'$, $z_2=z+\gamma'$, et ensuite exécuter l'intégration par rapport aux coordonnées α', β', γ' qui déterminent la position de la molécule dM'' de la Terre, relativement aux axes qui ont son centre de gravité pour origine.

6. En substituant ces forces à celles que nous avons considérées dans le n.° 3, nous aurons

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{d^2x}{dt^2}=M'\frac{x'-x}{\Delta^3}-M''\frac{x}{r^3}+\frac{M''}{M}\cdot\frac{dV'}{dx}+\frac{1}{M}\cdot\frac{d\cdot SU'dM}{dx},$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}=M'\frac{x'}{r'^3}+M\frac{x}{r^3}-\frac{M}{M''}\cdot\frac{dV''}{dx}-\frac{1}{M''}\cdot\frac{d\cdot SU''dM''}{dx}.$$

Donc en retranchant la seconde de ces deux équations de la première, il viendra

$$\frac{d^2x}{dt^2}=M'\frac{x'-x}{\Delta^3}-M'\frac{x'}{r'^3}-\sigma\frac{x}{r^3}+\frac{M''}{M}\cdot\frac{dV'}{dx}+\frac{M}{M''}\cdot\frac{dV''}{dx}$$
$$+\frac{1}{M}\cdot\frac{d\cdot SU'dM}{dx}+\frac{1}{M''}\cdot\frac{d\cdot SU''dM''}{dx}.$$

Il est évident que l'on a par les mêmes raisons

$$\frac{d^2y}{dt^2}=M'\frac{y'-y}{\Delta^3}-M'\frac{y'}{r'^3}-\sigma\frac{y}{r^3}+\frac{M''}{M}\cdot\frac{dV'}{dy}+\frac{M}{M''}\cdot\frac{dV''}{dy}$$
$$+\frac{1}{M}\cdot\frac{d\cdot SU'dM}{dy}+\frac{1}{M''}\cdot\frac{d\cdot SU''dM''}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=M'\frac{z'-z}{\Delta^3}-M'\frac{z'}{r'^3}-\sigma\frac{z}{r^3}+\frac{M''}{M}\cdot\frac{dV'}{dz}+\frac{M}{M''}\cdot\frac{dV''}{dz}$$
$$+\frac{1}{M}\cdot\frac{d\cdot SU'dM}{dz}+\frac{1}{M''}\cdot\frac{d\cdot SU''dM''}{dz}.$$

7. L'intégrale $SU'dM$ peut être aisément développée en série, au moyen de la fonction désignée par V''. En effet nous avons fait précédemment (n.° 4 et 5)

$$U_1 = S\frac{dM''}{R} = \frac{M''}{r_1} + U',$$

$$V_2 = S\frac{dM''}{r_2} = \frac{M''}{r} + V'';$$

ainsi il est évident que la fonction U' s'obtient en changeant respectivement les coordonnées x, y, z en x_1, y_1, z_1 dans la fonction désignée par V''. Il suit de là que si nous posons

$$V'' = fonct.(x, y, z)$$

l'on en conclura

$$U' = fonct.(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma).$$

Mais les coordonnées α, β, γ sont évidemment fort petites par rapport aux coordonnées x, y, z; ainsi l'on pourra développer cette dernière expression de U' par le théorème de Taylor, ce qui donne

$$U' = V'' + \alpha\frac{dV''}{dx} + \beta\frac{dV''}{dy} + \gamma\frac{dV''}{dz} + \text{etc.};$$

donc en multipliant par dM et en intégrant, il viendra

$$SU'dM = V''SdM + \frac{dV''}{dx}S\alpha dM + \frac{dV''}{dy}S\beta dM + \frac{dV''}{dz}S\gamma dM + \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on remarque que l'origine des coordonnées α, β, γ coïncide avec le centre de gravité de la Lune, l'on en conclura que l'on a $S\alpha dM = 0$, $S\beta dM = 0$, $S\gamma dM = 0$; et par conséquent

$$SU'dM = MV'' + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2V''}{dx^2}S\alpha^2dM + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2V''}{dy^2}S\beta^2dM + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2V''}{dz^2}S\gamma^2dM$$
$$+ \frac{d^2V''}{dx\,dy}S\alpha\beta dM + \frac{d^2V''}{dx\,dz}S\alpha\gamma dM + \frac{d^2V''}{dy\,dz}S\beta\gamma dM$$
$$+ \text{etc.}$$

En raisonnant de même par rapport à l'intégrale $SU''dM''$, l'on démontrera que l'on a

$$SU''dM'' = M''V' + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2V'}{dx^2}S\alpha'^2dM'' + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2V'}{dy^2}S\beta'^2dM'' + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2V'}{dz^2}S\gamma'^2dM''$$
$$+ \frac{d^2V'}{dx\,dy}S\alpha'\beta'dM'' + \frac{d^2V'}{dx\,dz}S\alpha'\gamma'dM'' + \frac{d^2V'}{dy\,dz}S\beta'\gamma'dM''$$
$$+ \text{etc.}$$

Ces valeurs de $SU'dM$ et $SU''dM''$ étant différenciées et substituées dans celle $\frac{d^2x}{dt^2}$, l'on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} = M'\frac{x'-x}{\Delta^3} - M'\frac{x'}{r'^3} - \sigma\frac{x}{r^3} + \frac{\sigma}{M''}\cdot\frac{dV''}{dx} + \frac{\sigma}{M}\cdot\frac{dV'}{dx}$$
$$+ \frac{1}{2M}\cdot\frac{d^3V''}{dx^3}S\alpha^2dM + \frac{1}{2M}\cdot\frac{d^3V''}{dx\,dy^2}S\beta^2dM + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{2M''}\cdot\frac{d^3V'}{dx^3}S\alpha'^2dM'' + \frac{1}{2M''}\cdot\frac{d^3V'}{dx\,dy^2}S\beta'^2dM'' + \text{etc.}$$

Le second membre de cette équation et les analogues qui constituent les valeurs de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, peuvent être exprimés par les différentielles partielles d'une même fonction; car en posant

$$\Omega' = -M'\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3} + \frac{M'}{\Delta},$$

(*)
$$\Omega'' = \frac{\sigma}{M''}V'' + \frac{\sigma}{M}V'$$
$$+ \frac{1}{2M}\cdot\frac{d^2V''}{dx^2}S\alpha^2dM + \frac{1}{2M}\cdot\frac{d^2V''}{dy^2}S\beta^2dM + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{2M''}\cdot\frac{d^2V'}{dx^2}S\alpha'^2dM'' + \frac{1}{2M''}\cdot\frac{d^2V'}{dy^2}S\beta'^2dM'' + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

il est clair qu'au lieu des équations (I) du n.° 4, l'on a celles-ci:

$$\text{(II)}\quad\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2} + \sigma\dfrac{x}{r^3} = \dfrac{d\Omega'}{dx} + \dfrac{d\Omega''}{dx},\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \sigma\dfrac{y}{r^3} = \dfrac{d\Omega'}{dy} + \dfrac{d\Omega''}{dy},\\[2mm] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \sigma\dfrac{z}{r^3} = \dfrac{d\Omega'}{dz} + \dfrac{d\Omega''}{dz}.\end{cases}$$

(*) Les deux premiers termes de notre expression de Ω'' sont les seuls que M. de Laplace a obtenu par les considérations exposées aux pages 182 et 183 du tome III de la Mec. cél.

Il nous reste à chercher l'expression des fonctions désignées par V'' et V'.

8. D'après la théorie connue de *l'attraction des sphéroïdes recouverts par un fluide en équilibre*, l'on a

$$V_{(2)} = \frac{M''}{r} + V'' = \frac{M''}{r} + \frac{M''D^2}{r^3}\left[\left(sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right)\psi + Y_{(2)} + \frac{D}{r}Y_{(3)} + \frac{D^2}{r^2}Y_{(4)} + \text{etc.}\right]$$

où ψ désigne la moitié du rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur, λ la déclinaison du centre de gravité de la Lune, et D la partie constante de l'expression du rayon de la Terre partant de son centre de gravité et développé dans une série de la forme

$$D(1 + Y_{(2)} + Y_{(3)} + Y_{(4)} + \text{etc.})$$

Ces expressions résultent de celles données par M. Laplace dans la Mécanique céleste, tome II, page 30 et 103, en y faisant

$$Y_{(0)} = 0, \quad Y_{(1)} = 0, \quad Z_{(0)} = 0, \quad Z_{(1)} = 0, \quad Z_{(2)} = -\frac{1}{2}g\left(sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right),$$

$$Z_{(3)} = 0, \quad Z_{(4)} = 0, \quad \text{etc.} \quad \frac{1}{2}g = \frac{\frac{1}{2}gD}{\frac{M}{D^2}} \cdot \frac{M}{D^3} = \frac{M}{D^3}\psi,$$

et en observant que lorsqu'on ne prend pas pour unité la constante que nous désignons par D, l'on doit substituer l'équation

$$\frac{4\pi}{2i+1} S\rho \cdot d(a^{i+3}Y_{(i)}) = \frac{4\pi}{3} D^i Y_{(i)} S\rho d \cdot a^3 - D^{2i+1} Z_{(i)}$$

à l'équation

$$\frac{4\pi}{2i+1} S\rho \cdot d(a^{i+3}Y_{(i)}) = \frac{4\pi}{3} Y_{(i)} S\rho d \cdot a^3 - Z_{(i)}.$$

Les fonctions $Y_{(2)}$, $Y_{(3)}$, etc. s'obtiennent au moyen de cette formule générale; soit $sin\lambda = p$, $cos\lambda = q$,

$$P_{(m)} = p^m - \frac{m \cdot m-1}{2 \cdot 2m-1} p^{m-2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 4 \cdot 2m-1 \cdot 2m-3} p^{m-4} - \text{etc.};$$

l'on aura

$$\begin{aligned} Y_{(m)} = A_{(0)} P_{(m)} &+ (A_{(2)} cos\, 2\varpi \qquad\qquad\qquad) q^2 \frac{d^2P_{(m)}}{dp^2} \\ &+ (A_{(3)} cos\, 3\varpi + B_{(3)} sin\, 3\varpi) q^2 \frac{d^3P_{(m)}}{dp^3} \\ &+ (A_{(4)} cos\, 4\varpi + B_{(4)} sin\, 4\varpi) q^4 \frac{d^4P_{(m)}}{dp^4} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

où $A_{(0)}$, $A_{(2)}$, $A_{(3)}$, $B_{(3)}$, $B_{(4)}$, etc. désignent des constantes arbitraires, et ϖ l'angle formé par la projection du rayon vecteur r sur l'équateur terrestre avec un des deux axes principaux placés sur ce même équateur (Voyez Legendre, Exercices de calcul intégral, tome II, page 270). Les termes multipliés par $\cos\varpi$, $\sin\varpi$, $\sin 2\varpi$ sont éliminés de cette expression, afin de pouvoir satisfaire aux conditions démontrées dans le second volume de la Mécanique céleste, page 90-93.

9. Pour avoir explicitement cette valeur $Y_{(m)}$ en fonction des coordonnées x, y, z, remarquons d'abord que en nommant $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ les coordonnées du centre de gravité de la Lune par rapport aux axes principaux de la Terre, l'on a

$$\bar{x} = r\cos\lambda\cos\varpi, \qquad \bar{y} = r\cos\lambda\sin\varpi, \qquad \bar{z} = r\sin\lambda.$$

Mais, par la transformation des coordonnées, si l'on nomme ω l'inclinaison de l'équateur terrestre relativement au plan fixe des x, y; ϕ l'angle formé avec l'axe des x par son intersection avec ce même plan, et θ l'angle formé par un des deux axes principaux, qui se trouvent dans l'équateur, avec cette même intersection, l'on a

$$\frac{\bar{x}}{r} = \cos\lambda\cos\varpi = q\cos\varpi = A_{,}\frac{x}{r} + B_{,}\frac{y}{r} + C_{,}\frac{z}{r},$$

$$\frac{\bar{y}}{r} = \cos\lambda\sin\varpi = q\sin\varpi = A_{,,}\frac{x}{r} + B_{,,}\frac{y}{r} + C_{,,}\frac{z}{r},$$

$$\frac{\bar{z}}{r} = \sin\lambda \qquad = p \qquad = A_{,,,}\frac{x}{r} + B_{,,,}\frac{y}{r} + C_{,,,}\frac{z}{r},$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$A_{,} = \cos\omega\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta; \qquad B_{,} = \cos\omega\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta;$$

$$A_{,,} = \cos\omega\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta; \qquad B_{,,} = \cos\omega\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta;$$

$$A_{,,,} = \sin\omega\sin\phi; \qquad B_{,,,} = \sin\omega\cos\phi;$$

$$C_{,} = -\sin\omega\sin\theta; \qquad C_{,,} = -\sin\omega\cos\theta; \qquad C_{,,,} = \cos\omega.$$

Cela posé, si l'on remarque que

$$q^n \cos n\varpi = \frac{1}{2}\left(q\cos\varpi + \sqrt{-1}\, q\sin\varpi\right)^n + \frac{1}{2}\left(q\cos\varpi - \sqrt{-1}\, q\sin\varpi\right)^n;$$

$$q^n \sin n\varpi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(q\cos\varpi + \sqrt{-1}\, q\sin\varpi\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(q\cos\varpi - \sqrt{-1}\, q\sin\varpi\right)^n,$$

l'on en conclut immédiatement que

$$q^n \cos n\varpi = \frac{1}{2r^n}\left((A_, + A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_, + B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_, + C_{,,}\sqrt{-1})z\right)^n$$
$$+ \frac{1}{2r^n}\left((A_, - A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_, - B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_, - C_{,,}\sqrt{-1})z\right)^n;$$

$$q^n \sin n\varpi = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,r^n}\left((A_, + A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_, + B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_, + C_{,,}\sqrt{-1})z\right)^n$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{-1}\,r^n}\left((A_, - A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_, - B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_, - C_{,,}\sqrt{-1})z\right)^n.$$

Ainsi, à l'aide de ces deux formules et de l'équation

$$p = \frac{x}{r}\sin\omega\sin\phi + \frac{y}{r}\sin\omega\cos\phi + \frac{z}{r}\cos\omega,$$

l'on pourra aisément exprimer par x, y, z, r la valeur de la fonction $Y_{(m)}$.

10. L'expression de V'' posé au commencement du n.° 8 donne

$$\frac{dV''}{dx} = -\frac{3M''D^2x}{r^5}\left((p^2 - \tfrac{1}{3})\psi + Y_2\right) - \frac{4M''D^3x}{r^6}Y_{(3)} - \frac{5M''D^4x}{r^7}Y_{(4)} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{M''D^2}{r^3}\left(2\psi p\frac{dp}{dx} + \frac{dY_{(2)}}{dx} + \frac{D}{r}\cdot\frac{dY_{(3)}}{dx} + \frac{D^2}{r^2}\cdot\frac{dY_{(4)}}{dx} + \text{etc.}\right),$$

et en différenciant la valeur de $Y_{(m)}$ par rapport à x, l'on a

$$\frac{dY_{(m)}}{dx} = A_{(0)}\frac{dP_{(m)}}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + \left((A_,{+}A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_,{+}B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_,{+}C_{,,}\sqrt{-1})z\right)^2\frac{A_{(2)}}{2r^2}\cdot\frac{d^3P_{(m)}}{dp^3}\cdot\frac{dp}{dx}$$
$$+ \left((A_,{-}A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_,{-}B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_,{-}C_{,,}\sqrt{-1})z\right)^2\frac{A_{(2)}}{2r^2}\cdot\frac{d^3P_{(m)}}{dp^3}\cdot\frac{dp}{dx}$$
$$- \left((A_,{+}A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_,{+}B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_,{+}C_{,,}\sqrt{-1})z\right)^2\frac{A_{(2)}x}{r^4}\cdot\frac{d^2P_{(m)}}{dp^2}$$
$$- \left((A_,{-}A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_,{-}B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_,{-}C_{,,}\sqrt{-1})z\right)^2\frac{A_{(2)}x}{r^4}\cdot\frac{d^2P_{(m)}}{dp^2}$$
$$+ \left(A_,{+}A_{,,}\sqrt{-1}\right)\left((A_,{+}A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_,{+}B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_,{+}C_{,,}\sqrt{-1})z\right)\frac{A_{(2)}}{r^2}\cdot\frac{d^2P_{(m)}}{dp^2}$$
$$+ \left(A_,{-}A_{,,}\sqrt{-1}\right)\left((A_,{-}A_{,,}\sqrt{-1})x + (B_,{-}B_{,,}\sqrt{-1})y + (C_,{-}C_{,,}\sqrt{-1})z\right)\frac{A_{(2)}}{r^2}\cdot\frac{d^2P_{(m)}}{dp^2}$$
$$+ \text{etc.}$$

où, pour simplifier l'écriture de cette formule, l'on n'a pas poussé le développement au-delà des termes multipliés par $A_{(2)}$. En substituant pour $\frac{dp}{dx}$ sa valeur

$$\frac{1}{r} \sin\omega \sin\varphi - \frac{x^2}{r^3} \sin\omega \sin\varphi - \frac{xy}{r^3} \sin\omega \cos\varphi - \frac{xz}{r^3} \cos\omega\,,$$

il devient évident que l'expression précédente de $\frac{dY_{(m)}}{dx}$ est réductible à une fonction des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ multipliée par $\frac{1}{r}$.

De là il est aisé de conclure que la fonction $\frac{\sigma}{M''} \cdot \frac{dV''}{dx}$ donne un résultat de la forme $\frac{\sigma}{M''} \cdot \frac{M''D^2}{r^4} Q = \frac{\sigma}{r^2} \cdot \frac{D^2}{r^2} Q$, dans lequel la lettre Q représente une fonction des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$. Ainsi ce terme est, analytiquement parlant, du même ordre de grandeur que la fonction $\frac{\sigma}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$ (qui constitue le terme principal introduit, dans l'expression de $\frac{d^2x}{dt^2}$, par la somme des masses de la Terre et de la Lune) multipliée par le carré de la petite fraction $\frac{D}{r}$.

11. Il est maintenant facile de faire voir que les termes multipliés par les coefficiens différentiels de V'', du troisième ordre, sont beaucoup plus petits que celui donné par le coefficient différentiel du premier ordre de la même fonction. En effet, une simple réflexion sur le procédé même de cette différentiation suffit pour faire voir que les valeurs de $\frac{d^3V''}{dx^3}$, $\frac{d^3V''}{dxdy^2}$, etc. seront données par des expressions de la forme $\frac{M''D^2}{r^6} Q$, le facteur Q étant, comme précédemment, une fonction des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$. En outre, si l'on imagine le rayon de la surface du sphéroïde lunaire développé suivant une série de la forme $D'(1 + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \text{etc.})$, l'on peut aisément démontrer que la quantité $\frac{S\alpha^2 dM}{M}$ est, par sa nature, de l'ordre du carré de D'; ainsi le produit $\frac{1}{2M} \cdot \frac{d^3V''}{dx^3} S\alpha^2 dM$ sera de la forme $\frac{M''}{r^2} \cdot \frac{D^2}{r^2} \cdot \frac{D'^2}{r^2} Q$, c'est-à-dire

une quantité de l'ordre du produit de la fonction $\frac{\sigma}{M''} \cdot \frac{dV''}{dx}$ par le carré de la fraction $\frac{D'}{r}$. Il est évident que la même conclusion subsiste à l'égard des autres termes multipliés par des coefficiens différentiels du troisième ordre de la fonction V''; et il n'est pas moins clair que les termes ultérieurs doivent être nécessairement plus petits.

Les formules précédentes deviennent beaucoup plus simples lorsqu'on suppose la Terre un sphéroïde de révolution. Alors, le rayon vecteur étant indépendant de l'angle ϖ, l'on doit supprimer dans $Y_{(m)}$ tous les termes qui sont fonction de cet angle, ce qui réduit son expression à

$$Y_{(m)} = A_{(0)}\left(p^m - \frac{m \cdot m-1}{2 \cdot 2m-1} p^{m-2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 4 \cdot 2m-1 \cdot 2m-3} p^{m-4} - \text{etc.}\right).$$

En faisant successivement $m = 2, 3, 4$, etc., cette formule donne

$$Y_{(2)} = -K_{(2)}\left(\sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right),$$
$$Y_{(3)} = K_{(3)}\left(\sin^3\lambda - \frac{3}{5}\sin\lambda\right),$$
$$Y_{(4)} = K_{(4)}\left(\sin^4\lambda - \frac{6}{7}\sin^2\lambda + \frac{3}{35}\right),$$
etc.

où $-K_{(2)}$, $K_{(3)}$, $K_{(4)}$, etc désignent les valeurs successives de la constante $A_{(0)}$: l'on a affecté du signe négatif le coefficient $K_{(2)}$, afin de rapprocher davantage l'expression du rayon vecteur de celle qui aurait lieu en supposant la Terre un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles. Dans cette dernière hypothèse tous les coefficiens $K_{(3)}$, $K_{(4)}$, etc. sont nuls; de sorte que, en nommant a le rayon vecteur du sphéroïde, l'on a

$$a = D - DK_{(2)}\left(\sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right).$$

Cette expression donne $a = D + \frac{1}{3}DK_{(2)}$, en y faisant $\lambda = 0$, et $a = D - \frac{2}{3}DK_{(2)}$, en y faisant $\lambda = 90^\circ$; donc $DK_{(2)}$ désigne la différence de ces deux rayons, et $\frac{K_{(2)}}{1 + \frac{1}{3}K_{(2)}}$ l'aplatissement en parties du rayon de l'équateur. D'après la mesure des degrés de latitude l'on peut adopter pour l'aplatissement la fraction $\frac{1}{310}$, et par conséquent $K_{(2)} = \frac{1}{309{,}67}$.

12. Occupons nous maintenant des termes introduits dans la valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ par la fonction désignée par V'. Le sphéroïde lunaire n'étant pas tel qu'il puisse être considéré comme recouvert d'un fluide en équilibre, il faut, conformément à la théorie générale de l'attraction des sphéroïdes formés par des couches de densité variable de l'une à l'autre, prendre pour V_1 l'expression

$$V_1 = \frac{M}{r} + \frac{4\pi}{3r^2}\int \rho \frac{d \cdot a^4 Y^{(1)}}{da} da + \frac{4\pi}{5r^3}\int \rho \frac{d \cdot a^5 Y^{(2)}}{da} da + \frac{4\pi}{7r^4}\int \rho \frac{d \cdot a^6 Y^{(3)}}{da} da + \text{etc.}$$

(Voyez la formule (5) de la page 38 du II volume de la Méc. cél.); où π représente le rapport de la circonférence au diamètre, et les intégrales doivent être prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = D'$. Pour parvenir à cette expression l'on suppose le rayon vecteur, a, d'une couche quelconque développé dans une série de la forme

$$\mathrm{a} = a(1 + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \text{etc.})$$

dans laquelle $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$, etc. sont des fonctions semblables à celles désignées précédemment par $Y_{(2)}$, $Y_{(3)}$, etc., pourvu que l'on y considère les constantes $A_{(0)}$, $A_{(2)}$, $A_{(3)}$, $B_{(3)}$, etc. comme autant de fonctions du paramètre a; et la densité ρ d'une couche quelconque exprimée par une fonction du même paramètre a.

Relativement à la fonction désignée par $Y^{(1)}$, il est important d'observer que l'origine des rayons vecteurs, a, étant placée au centre même de gravité du sphéroïde, le second terme $\int \rho \frac{d \cdot a^4 Y^{(1)}}{da} da$ de l'expression précédente de V_1 devient nul par les propriétés de ce même centre; mais on doit en même tems remarquer que cette équation n'emporte pas avec elle la condition de $Y^{(1)} = 0$, comme cela arriverait si la Lune était recouverte par un fluide en équilibre.

13. La masse M du sphéroïde lunaire est donnée par la triple intégrale $M = \frac{1}{3} S\rho \cos\lambda' \, d\varpi' \, d\lambda' \, d \cdot \mathrm{a}^3$, prise entre les limites

$$a = 0; \qquad \lambda' = -\tfrac{1}{2}\pi; \qquad \varpi' = 0$$
$$a = D'; \qquad \lambda' = +\tfrac{1}{2}\pi; \qquad \varpi' = 2\pi,$$

de sorte que il est évident que son terme principal est égal à

$\frac{4}{3}\pi\int\rho d\cdot a^3$. Donc en faisant pour plus de simplicité $M = \frac{4}{3}\pi b D'^3$; $\int\rho\frac{d\cdot a^5 Y^{(2)}}{da}da = b'D'^5$, $\int\rho\frac{d\cdot a^6 Y^{(3)}}{da}da = b''D'^6$, etc., il viendra

$$V_1 = \frac{M}{r} + V' = \frac{M}{r} + M\frac{3b'}{5b}\cdot\frac{D'^2}{r^3} + M\frac{3b''}{7b}\cdot\frac{D'^3}{r^4} + \text{etc.}$$

où b est une quantité peu différente de l'unité, et b', b'', etc. des fonctions de $\sin\lambda'$ et de $\cos\varpi'$ du même ordre et de la même forme que les quantités désignées généralement par $Y^{(m)}$.

Il est maintenant clair que l'on peut déduire de cette expression de V' des conséquences tout-à-fait analogues à celles qui ont été développées dans les num. 10, 11, par rapport à l'ordre de la grandeur relative des termes introduits dans la valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ par la fonction V''.

14. La considération de la Terre recouverte par un fluide en équilibre à sa surface nous a fourni une expression de V'' indépendante de la loi de la densité de ses couches, en ramenant la recherche de la valeur numérique des coefficiens qui entrent dans l'expression de $Y_{(2)}$, $Y_{(3)}$, etc. à celle de sa figure extérieure et de la loi de la pesanteur à sa surface. Par rapport à la Lune, cette circonstance n'a pas lieu, et l'on ne connaît aucun phénomène propre à donner les coefficiens qui entrent dans les fonctions b'', b''', etc.; mais l'on peut, jusqu'à un certain point, évaluer ceux qui entrent dans la fonction désignée par b', en vertu de l'influence qu'elle a sur les mouvemens de la Lune autour de son centre de gravité.

En effet, représentons par A, B, C les momens d'inertie de la Lune par rapport à ses axes principaux, C se rapportant à l'axe principal perpendiculaire au plan de son équateur; d'après les formules de la page 303 du tome II de la Mécanique céleste, l'on a, conformément à nos dénominations,

$$A = \frac{8\pi}{15}S\rho\frac{d\cdot a^5}{da}da + S\left(\frac{1}{3} - \cos^2\lambda'\cos^2\varpi'\right)\rho\cos\lambda'\frac{d\cdot a^5 Y^{(2)}}{da}da\,d\lambda'\,d\varpi',$$

$$B = \frac{8\pi}{15}S\rho\frac{d\cdot a^5}{da}da + S\left(\frac{1}{3} - \cos^2\lambda'\sin^2\varpi'\right)\rho\cos\lambda'\frac{d\cdot a^5 Y^{(2)}}{da}da\,d\lambda'\,d\varpi',$$

$$C = \frac{8\pi}{15}S\rho\frac{d\cdot a^5}{da}da + S\left(\frac{1}{3} - \sin^2\lambda'\right)\rho\cos\lambda'\frac{d\cdot a^5 Y^{(2)}}{da}da\,d\lambda'\,d\varpi';$$

où, pour satisfaire à la propriété des axes principaux, l'on doit prendre pour $Y^{(2)}$ une expression de cette forme

$$Y^{(2)} = A^{(0)}(\sin^2\lambda' - \tfrac{1}{3}) + 2A^{(2)}\cos^2\lambda' \cos 2\varpi',$$

$A^{(0)}$, $A^{(2)}$ étant des fonctions de a.

Or, en substituant cette même valeur de $Y^{(2)}$, l'on a

$$b'D'^5 = \int\rho\frac{d\cdot a^5 Y^{(2)}}{da}da = \left(\sin^2\lambda' - \frac{1}{3}\right)\int\rho\frac{d\cdot a^5 A^{(0)}}{da}da + 2\cos^2\lambda'\cos 2\varpi'\int\rho\frac{d\cdot a^5 A^{(2)}}{da}da;$$

mais par la combinaison des valeurs précédentes de A, B, C l'on obtient

$$2C - B - A = \iint(\sin^2\lambda' - \tfrac{1}{3})(3\cos^2\lambda' - 2)\cos\lambda'\, d\lambda'\, d\varpi' \times \int\rho\frac{d\cdot a^5 A^{(0)}}{da}da$$
$$+ 2\iint(3\cos^2\lambda' - 2)\cos^3\lambda' \cos 2\varpi'\, d\lambda'\, d\varpi' \times \int\rho\frac{d\cdot a^5 A^{(2)}}{da}da;$$

$$B - A = \iint(\sin^2\lambda' - \tfrac{1}{3})\cos^3\lambda' \cos 2\varpi'\, d\lambda'\, d\varpi' \times \int\rho\frac{d\cdot a^5 A^{(0)}}{da}da$$
$$+ 2\iint\cos^5\lambda' \cos^2 2\varpi'\, d\lambda'\, d\varpi' \times \int\rho\frac{d\cdot a^5 A^{(2)}}{da}da;$$

donc, en observant que entre les limites $\lambda' = -\tfrac{1}{2}\pi,\ \varpi' = 0$
$\lambda' = +\tfrac{1}{2}\pi,\ \varpi' = 2\pi,$

l'on a

$$\iint(\sin^2\lambda' - \tfrac{1}{3})(3\cos^2\lambda' - 2)\cos\lambda'\, d\lambda'\, d\varpi' = \frac{16}{15}\pi$$
$$\iint(3\cos^2\lambda' - 2)\cos^3\lambda' \cos 2\varpi'\, d\lambda'\, d\varpi' = 0$$
$$\iint(\sin^2\lambda' - \tfrac{1}{3})\cos^3\lambda' \cos 2\varpi'\, d\lambda'\, d\varpi' = 0$$
$$\iint\cos^5\lambda' \cos^2 2\varpi'\, d\lambda'\, d\varpi' = \frac{32}{15}\pi,$$

il viendra

$$2C - B - A = \frac{16}{15}\pi\int\rho\frac{d\cdot a^5 A^{(0)}}{da}da, \qquad B - A = \frac{32}{15}\pi\int\rho\frac{d\cdot a^5 A^{(2)}}{da}da,$$

et par conséquent

$$b'D'^5 = \frac{15}{16\pi}\left(2C - B - A\right)\left(\sin^2\lambda' - \frac{1}{3}\right) + \frac{15}{16\pi}\left(B - A\right)\cos^2\lambda' \cos 2\varpi'.$$

15. D'après les dernières recherches de M. Nicollet (V. Connaissance des tems, année 1823, page 340), l'on a

$$2C - B - A = 0{,}000630104\cdot C \qquad B - A = 0{,}000563916\cdot C,$$

et par conséquent

$$b'D'^5 = \frac{15\,C}{16\pi}\left(0{,}000630104\,(\sin^2\lambda' - \tfrac{1}{3}) + 0{,}000563916\,\cos^2\lambda'\cos 2\varpi'\right).$$

Comme C est évidemment une quantité de l'ordre de la masse multipliée par le carré de D', faisons

$$C = KD'^2M = \tfrac{4}{3}\pi KD'^5b;$$

alors l'on aura pour la valeur du coefficient $\frac{3b'}{5b}$, qui entre dans l'expression de V',

$$\frac{3b'}{5b} = \frac{3}{4}K\left(0{,}000630104\,(\sin^2\lambda' - \tfrac{1}{3}) + 0{,}000563916\,\cos^2\lambda'\cos 2\varpi'\right).$$

Le coefficient désigné par K est un nombre absolu qui dépend de la loi de la densité ρ; car l'on a $K = \frac{C}{D'^2M}$, et en négligeant les termes très-petits dus à l'écart de la figure sphérique, $K = \frac{2}{5}\cdot\frac{S\rho d\cdot a^5}{D'^2 S\rho d\cdot a^3}$.

Pour avoir une idée de la grandeur de ce coefficient, il n'y a qu'à supposer la densité ρ constante, et alors l'on a $K = \frac{2}{5}$. Mais en supposant la densité des couches croissante de la surface au centre, l'on peut démontrer que la valeur de K est plus petite que la fraction $\frac{2}{5}$; car en intégrant par parties depuis $a = 0$ jusqu'à $a = D'$, et en nommant ρ' la densité à la surface, l'on a

$$\frac{S\rho d\cdot a^5}{S\rho d\cdot a^3} = \frac{\rho a^5 - \int a^5 d\rho}{\rho a^3 - \int a^3 d\rho} = D'^2\,\frac{1 - \frac{1}{\rho'}\int\left(\frac{a}{D'}\right)^5 d\rho}{1 - \frac{1}{\rho'}\int\left(\frac{a}{D'}\right)^3 d\rho}.$$

Or la différentielle $d\rho$ est nécessairement négative dans l'hypothèse actuelle, et $\frac{a}{D'}$ est toujours une fraction; ainsi la puissance $\left(\frac{a}{D'}\right)^5$ étant une quantité plus petite que $\left(\frac{a}{D'}\right)^3$ pour chacun des élémens de ces deux intégrales, il faut en conclure que $-\int\left(\frac{a}{D'}\right)^5 d\rho$ est une quantité positive moindre que l'intégrale $-\int\left(\frac{a}{D'}\right)^3 d\rho$, pareillement positive; et que $\dfrac{1 - \frac{1}{\rho'}\int\left(\frac{a}{D'}\right)^5 d\rho}{1 - \frac{1}{\rho'}\int\left(\frac{a}{D'}\right)^3 d\rho}$ est toujours une quantité plus petite que l'unité.

16. Pour n'avoir à considérer que des coordonnées orthogonales, il n'y a qu'à prendre pour $\sin^2\lambda'$, $\cos^2\lambda' \cdot \cos 2\varpi'$ les valeurs qui résultent des formules posées dans le n.° 9, en y faisant

$$A_{,} = \cos\omega' \sin\varphi' \sin\theta' + \cos\varphi' \cos\theta' ; \quad B_{,} = \cos\omega' \cos\varphi' \sin\theta' - \sin\varphi' \cos\theta' ;$$

$$A_{,,} = \cos\omega' \sin\varphi' \cos\theta' - \cos\varphi' \sin\theta' ; \quad B_{,,} = \cos\omega' \cos\varphi' \cos\theta' + \sin\varphi' \sin\theta' ;$$

$$A_{,,,} = \sin\omega' \sin\varphi' ; \quad B_{,,,} = \sin\omega' \cos\varphi' ;$$

$$C_{,} = - \sin\omega' \sin\theta' ; \quad C_{,,} = - \sin\omega' \cos\theta' ; \quad C_{,,,} = \cos\omega' ;$$

et observant que ω' représente l'inclinaison de l'équateur lunaire par rapport au plan de l'écliptique ; φ' l'angle formé par l'intersection du plan de l'équateur lunaire avec l'axe des x; θ' l'angle formé entre l'un des deux axes principaux placés dans l'équateur lunaire et la ligne d'intersection de ce même équateur avec le plan des x, y.

Les développemens que nous venons d'exposer sur l'influence de la non sphéricité de la Terre et de la Lune font voir assez clairement qu'il serait inutile d'avoir égard aux termes provenans de l'écart de la figure du Soleil de la figure sphérique, puisqu'ils seraient de l'ordre du produit de ce même écart par le carré de sa parallaxe.

17. Après les forces agissantes sur la Lune que nous avons considéré jusqu'ici, celle qui se présente naturellement est sans doute l'action des planètes du système solaire. Pour en comprendre l'effet dans les équations différentielles, nommons m'', m''', etc. les masses des planètes, et désignons par x'', y'', z''; x''', y''', z''', etc. leurs coordonnées géocentriques respectives. Il est évident que l'action de chaque planète doit introduire dans les seconds membres des équations (II) du n.° 7 un terme semblable à celui qui provient de la masse M' du Soleil. Donc si l'on fait

$$r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2, \qquad r'''^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2, \quad \text{etc.};$$

$$\Delta'^2 = (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2, \; \Delta''^2 = (x'''-x)^2 + (y'''-y)^2 + (z'''-z)^2, \quad \text{etc.};$$

$$\Omega''' = - m'' \frac{xx'' + yy'' + zz''}{r''^3} + \frac{m''}{\Delta'} - m''' \frac{xx''' + yy''' + zz'''}{r'''^2} + \frac{m'''}{\Delta''} - \text{etc.},$$

l'on aura au lieu des équations (II) celles-ci :

$$\text{(III)}\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \sigma\frac{x}{r^3} &= \frac{d\Omega'}{dx} + \frac{d\Omega''}{dx} + \frac{d\Omega'''}{dx},\\ \frac{d^2y}{dt^2} + \sigma\frac{y}{r^3} &= \frac{d\Omega'}{dy} + \frac{d\Omega''}{dy} + \frac{d\Omega'''}{dy},\\ \frac{d^2z}{dt^2} + \sigma\frac{z}{r^3} &= \frac{d\Omega'}{dz} + \frac{d\Omega''}{dz} + \frac{d\Omega'''}{dz}.\end{aligned}\right.$$

Comme les mouvemens des planètes sont donnés par des coordonnées héliocentriques, en nommant ces dernières X'', Y'', Z'', il est clair que l'on aura

$$x'' = X'' + x', \qquad y'' = Y'' + y', \qquad z'' = Z'' + z'$$

et des équations semblables pour les autres planètes.

§ 2.

Équations différentielles entre les coordonnées polaires.

18. Nommons ρ la projection du rayon vecteur r de la Lune sur un plan qui coïncidait avec l'écliptique à une époque déterminée, v la longitude comptée sur ce même plan depuis un équinoxe fixe, et s la tangente de la latitude de la Lune ; on aura d'après cela

$$x = \rho\cos v, \qquad y = \rho\sin v, \qquad z = \rho s, \qquad r = \rho\sqrt{(1+ss)}.$$

En différentiant deux fois de suite la valeur de x et de y, on obtient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos v\frac{d^2\rho}{dt^2} - 2\sin v\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} - \rho\cos v\frac{dv^2}{dt^2} - \rho\sin v\frac{d^2v}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin v\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\cos v\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} - \rho\sin v\frac{dv^2}{dt^2} + \rho\cos v\frac{d^2v}{dt^2}.$$

Donc, en multipliant la première de ces équations par $\cos v$, et l'ajoutant à la seconde multipliée par $\sin v$, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos v + \frac{d^2y}{dt^2}\sin v = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\frac{dv^2}{dt^2};$$

et par un procédé analogue

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cos v - \frac{d^2x}{dt^2}\sin v = \rho\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

En substituant dans ces équations pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs tirées des équations (III), et en faisant pour plus de simplicité $\Omega = \Omega' + \Omega'' + \Omega'''$, il viendra

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\frac{dv^2}{dt^2} + \frac{\sigma}{\rho^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\Omega}{dx}\cos v + \frac{d\Omega}{dy}\sin v,$$

$$\rho\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{d\Omega}{dy}\cos v - \frac{d\Omega}{dx}\sin v.$$

La seconde de ces équations revient évidemment à

$$\frac{d\cdot\rho^2dv}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dy}\rho\cos v - \frac{d\Omega}{dx}\rho\sin v.$$

L'équation $z = \rho s$ donne

$$\frac{d^2z}{dt^2} = s\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{ds}{dt} + \rho\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dz} - \sigma\frac{s}{\rho^2}(1+ss)^{-\frac{3}{2}}.$$

On peut éliminer de cette équation le terme $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ à l'aide de sa valeur trouvée plus haut; alors l'on aura entre les variables ρ, v, s les trois équations suivantes:

$$(\text{IV})\begin{cases}\frac{d^2s}{dt^2} + s\frac{dv^2}{dt^2} + \frac{2}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\Omega}{dz} - \frac{s\cdot\cos v}{\rho}\cdot\frac{d\Omega}{dx} - \frac{s\cdot\sin v}{\rho}\cdot\frac{d\Omega}{dy},\\ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\frac{dv^2}{dt^2} + \frac{\sigma}{\rho^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} = \cos v\frac{d\Omega}{dx} + \sin v\frac{d\Omega}{dy},\\ \frac{d\cdot\rho^2dv}{dt^2} = \rho\cos v\frac{d\Omega}{dy} - \rho\sin v\frac{d\Omega}{dx}.\end{cases}$$

C'est sous cette forme que Lagrange a employé les équations différentielles du mouvement des planètes dans son Mémoire sur les perturbations de Jupiter et Saturne imprimé dans le troisième volume (année 1762) des Anciens Mémoires de l'Académie de Turin, page 321.

19. Si l'on nomme θ la latitude de la Lune, l'on a

$$s = \tan g\,\theta, \qquad \rho = r\cos\theta;$$

ainsi il est clair que les équations précédentes peuvent être transformées dans d'autres, dans lesquelles les trois variables seront r, θ et ν. Pour cela, observons que l'on a

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt};$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt};$$

$$\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} - r\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta^2}{dt^2};$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}\cdot\frac{d\theta^2}{dt^2};$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \cos\theta\frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} - r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

$$\frac{2}{\rho}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\rho}{dt} = \frac{2}{r\cos^2\theta}\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} - \frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}\cdot\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

En substituant les valeurs de $\frac{d^2s}{dt^2}$ et de $\frac{2}{\rho}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\rho}{dt}$ dans la première des équations (IV), nous aurons

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r\cos^2\theta}\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \tan\theta\frac{d\nu^2}{dt^2} = \frac{1}{r\cos\theta}\cdot\frac{d\Omega}{dz} - \frac{\sin\theta\cos\nu}{r\cos^2\theta}\cdot\frac{d\Omega}{dx} - \frac{\sin\theta\sin\nu}{r\cos^2\theta}\cdot\frac{d\Omega}{dy}.$$

Pour simplifier le résultat que l'on aurait en substituant la valeur précédente de $\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d^2\cdot r\cos\theta}{dt^2}$ dans la seconde des équations (IV), remarquons que l'on a $z = r\sin\theta$, et

$$\frac{d^2\cdot r\sin\theta}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dz} - \frac{\sigma}{r^2}\sin\theta = \sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

En multipliant cette équation par $\sin\theta$, et l'ajoutant à la valeur de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, multipliée par $\cos\theta$, l'on aura

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} = r\cos^2\theta\frac{d\nu^2}{dt^2} - \frac{\sigma}{r^2} + \sin\theta\frac{d\Omega}{dz} + \cos\theta\cos\nu\frac{d\Omega}{dx} + \cos\theta\sin\nu\frac{d\Omega}{dy}.$$

Les trois équations dans ce système de coordonnées seront donc

$$
(V)\begin{cases}
\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{dr}{dt}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}+\sin\theta\cos\theta\dfrac{dv^2}{dt^2}=-\dfrac{\sin\theta\cos v}{r}\cdot\dfrac{d\Omega}{dx}-\dfrac{\sin\theta\sin v}{r}\cdot\dfrac{d\Omega}{dy}+\dfrac{\cos\theta}{r}\cdot\dfrac{d\Omega}{dz},\\
\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\dfrac{d\theta^2}{dt^2}-r\cos^2\theta\dfrac{dv^2}{dt^2}+\dfrac{\sigma}{r^2}=\cos\theta\cos v\dfrac{d\Omega}{dx}+\cos\theta\sin v\dfrac{d\Omega}{dy}+\sin\theta\dfrac{d\Omega}{dz},\\
\dfrac{d\cdot(r^2\cos^2\theta\, dv)}{dt^2}=-r\cos\theta\sin v\dfrac{d\Omega}{dx}+r\cos\theta\cos v\dfrac{d\Omega}{dy}.
\end{cases}
$$

20. Si l'on remarque maintenant que l'on a ici

$$x = r\cos\theta\cos v,\qquad y = r\cos\theta\sin v,\qquad z = r\sin\theta,$$

l'on en conclura que en multipliant respectivement ces trois équations par $r^2d\theta$, dr, dv, et les ajoutant ensuite, l'on a

$$\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\cdot r^2d\theta}{dt}-\frac{1}{2}d\cdot r^2\cos^2\theta\frac{dv^2}{dt^2}+\frac{1}{2}d\cdot\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta^2}{dt^2}d\cdot r^2+\frac{dv^2}{dt^2}d\cdot r^2\cos^2\theta+2\frac{dv}{dt}\cdot\frac{d^2v}{dt}r^2\cos^2\theta$$

$$=-\sigma\frac{dr}{r^2}+\frac{d\Omega}{dx}dx+\frac{d\Omega}{dy}dy+\frac{d\Omega}{dz}dz,$$

ou bien

$$\frac{1}{2}d\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{1}{2}d\cdot r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}+\frac{1}{2}d\cdot r^2\cos^2\theta\frac{dv^2}{dt^2}=-\sigma\frac{dr}{r^2}+\frac{d\Omega}{dx}dx+\frac{d\Omega}{dy}dy+\frac{d\Omega}{dz}dz.$$

Cette équation est analogue à la troisième des équations (V) sous le rapport de l'immédiate intégrabilité des premiers membres qui composent ces deux équations. Il est d'ailleurs clair qu'en considérant Ω comme une fonction de r, v, θ, l'on a

$$\frac{1}{2}d\cdot\left(\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}+r^2\cos^2\theta\frac{dv^2}{dt^2}\right)=-\sigma\frac{dr}{r^2}+\frac{d\Omega}{dr}dr+\frac{d\Omega}{d\theta}d\theta+\frac{d\Omega}{dv}dv,$$

et que les seconds membres des équations (V) peuvent être respectivement exprimés par les coefficiens différentiels partiels $\frac{d\Omega}{d\theta}$, $\frac{d\Omega}{dr}$, $\frac{d\Omega}{dv}$.

Il suit de là qu'en substituant les valeurs de x, y, z, l'on a ces quatre équations

$$
(VI)\begin{cases}
\dfrac{d\cdot r^2d\theta}{dt^2}+r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{dv^2}{dt^2}=\dfrac{d\Omega}{d\theta},\\
\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\dfrac{d\theta^2}{dt^2}-r\cos^2\theta\dfrac{dv^2}{dt^2}=\dfrac{d\Omega}{dr}-\dfrac{\sigma}{r^2},\\
\dfrac{d\cdot(r^2\cos^2\theta\, dv)}{dt^2}=\dfrac{d\Omega}{dv},\\
\dfrac{1}{2}d\cdot\left(\dfrac{dr^2}{dt^2}+r^2\dfrac{d\theta^2}{dt^2}+r^2\cos^2\theta\dfrac{dv^2}{dt^2}\right)=-\dfrac{\sigma}{r^2}dr+\dfrac{d\Omega}{dr}dr+\dfrac{d\Omega}{d\theta}d\theta+\dfrac{d\Omega}{dv}dv.
\end{cases}
$$

En intégrant la dernière de ces équations, et posant plus de simplicité

$$d'\Omega = \frac{d\Omega}{dr}dr + \frac{d\Omega}{d\theta}d\theta + \frac{d\Omega}{dv}dv,$$

l'on a

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2\cos^2\theta\frac{dv^2}{dt^2} = \frac{2\sigma}{r} + 2\int d'\Omega;$$

où il ne faut pas perdre de vue que le symbole différentiel d' ne regarde que les variables r, θ, v explicitement contenues dans la fonction Ω, au lieu que l'intégration marquée par le signe $\int$ est relative à la variable v considérée soit explicitement, soit implicitement dans la même fonction.

21. Maintenant si l'on ajoute cette équation à la seconde des équations (VI) multipliée par r, il viendra

$$r\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{\sigma}{r} + r\frac{d\Omega}{dr} + 2\int d'\Omega,$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2r^2}{dt^2} = \frac{\sigma}{r} + r\frac{d\Omega}{dr} + 2\int d'\Omega.$$

Cette équation du second ordre offre la plus simple combinaison qu'il soit possible de former immédiatement avec les équations (VI).

Pour éliminer de la dernière équation du numéro précédent la variable θ, il suffit d'observer que l'équation $\tang\theta = s$ donne $d\theta = \frac{ds}{1+ss}$, et que par conséquent l'on a

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\left(\frac{dv^2}{dt^2}\cdot\frac{1}{1+ss} + \frac{ds^2}{dt^2}\cdot\frac{1}{(1+ss)^2}\right) = \frac{2\sigma}{r} + 2\int d'\Omega.$$

En écrivant la troisième des équations (VI) sous la forme

$$r^2\frac{dv}{dt} = (1+ss)\int\frac{d\Omega}{dv}dt,$$

l'on en conclura que ces équations sont équivalentes à celles-ci:

$$\text{(VI)}'\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2r^2}{dt^2} = \frac{\sigma}{r} + r\frac{d\Omega}{dr} + 2\int d'\Omega,\\ &r^2\frac{dv}{dt} = (1+ss)\int\frac{d\Omega}{dv}dt,\\ &\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{dv^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+ss} + \frac{1}{(1+ss)^2}\cdot\frac{ds^2}{dv^2}\right) = \frac{2\sigma}{r} + 2\int d'\Omega.\end{aligned}\right.$$

22. La troisième des équations (IV) étant la même que la troisième des équations (VI), il est clair que l'on a

$$\frac{d\cdot\rho^2 dv}{dt^2}=\frac{d\Omega}{dv}.$$

Pour peu que l'on examine cette équation, on voit qu'elle peut être intégrée de deux manières différentes : 1.° en la multipliant par dt, ce qui donne $\frac{dv}{dt}=\frac{1}{\rho^2}\int\frac{d\Omega}{dv}dt$; 2.° en la multipliant par $2\rho^2 dv$, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\left(\rho^2\frac{dv}{dt}\right)^2=\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv,\qquad \text{ou bien}\qquad \frac{dt}{dv}=\rho^2\left(2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette équation est propre à donner immédiatement le tems en fonction de la longitude v ; mais comme cette intégration dépend implicitement des valeurs de ρ et de s, il est nécessaire de transformer les deux premières des équations (IV) de manière que v soit la variable principale.

Pour cesser de regarder dt comme constant, on doit changer

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}\quad\text{en}\quad \frac{1}{dt}d\cdot\frac{d\rho}{dt}=\frac{d^2\rho}{dt^2}-\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dt^2};$$

mais l'équation $dt=dv\cdot\rho^2\left(2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv\right)^{-\frac{1}{2}}$, étant différentiée, donne

$$d^2t=2\rho\left(2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\rho\cdot dv-\rho^4\frac{d\Omega}{dv}\left(2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot dv^2.$$

Partant l'on a

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}=\left(\frac{1}{\rho^4}\cdot\frac{d^2\rho}{dv^2}-2\frac{d\rho^2}{\rho^5 dv^2}\right)2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{dv},$$

$$\text{et}\quad \frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\frac{dv^2}{dt^2}=-\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{d^2\rho}{\rho^2dv^2}+\frac{2d\rho^2}{\rho^3dv^2}\right)2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv+\frac{d\rho}{\rho^2 dv}\cdot\frac{d\Omega}{dv}.$$

Cette expression se simplifie en posant $u=\frac{1}{\rho}$; car elle devient

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\frac{dv^2}{dt^2}=-u^2\left(u+\frac{d^2u}{dv^2}\right)2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv-\frac{du}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{dv}.$$

Il suit de là que la seconde des équations (IV) donne

$$\left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv-\frac{\sigma}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{du}{u^2dv}\cdot\frac{d\Omega}{dv}-\frac{\cos v}{u^2}\cdot\frac{d\Omega}{dx}-\frac{\sin v}{u^2}\cdot\frac{d\Omega}{dy}.$$

Pour transformer d'une manière semblable la première des équations (IV), il faudra changer $\frac{d^2s}{dt^2}$ en

$$\frac{1}{dt}d\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dt^2}.$$

Cela posé, au moyen des valeurs précédentes de d^2t et de dt, l'on aura

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{ds}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{dv}-2\frac{d\rho\cdot ds}{\rho^5dv^2}2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv+\frac{d^2\rho}{\rho^4dv^2}2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv,$$

$$s\frac{dv^2}{dt^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}=2\frac{d\rho\cdot ds}{\rho^5dv^2}2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv+\frac{s}{\rho^4}2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv.$$

Donc, en substituant ces valeurs, l'on aura

$$\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{d\Omega}{dv}\cdot\frac{ds}{dv}+\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d^2s}{dt^2}+s\right)2\int\rho^2\frac{d\Omega}{dv}dv=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\Omega}{dz}-\frac{s\cdot\cos v}{\rho}\cdot\frac{d\Omega}{dx}-\frac{s\cdot\sin v}{\rho}\cdot\frac{d\Omega}{dy}.$$

Mais nous avons fait précédemment $u=\frac{1}{\rho}$, donc, en résumant le résultat de ces transformations, l'on aura

$$(\text{VII})\begin{cases}\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv=-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{ds}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{dv}-\frac{s\cdot\cos v}{u^3}\cdot\frac{d\Omega}{dx}-\frac{s\cdot\sin v}{u^3}\cdot\frac{d\Omega}{dy}+\frac{1}{u^3}\cdot\frac{d\Omega}{dz},\\ \left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv-\frac{\sigma}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{dv}-\frac{\cos v}{u^2}\cdot\frac{d\Omega}{dx}-\frac{\sin v}{u^2}\cdot\frac{d\Omega}{dy},\\ \frac{dt}{dv}=\frac{1}{u^2}\left(2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv\right)^{-\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

23. Pour éliminer les coordonnées x, y, z, remarquons qu'en considérant Ω comme fonction de s, u, v, l'on a

$$\frac{d\Omega}{dx}=\frac{d\Omega}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{d\Omega}{ds}\cdot\frac{ds}{dx},$$

$$\frac{d\Omega}{dy}=\frac{d\Omega}{dv}\cdot\frac{dv}{dy}+\frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{d\Omega}{ds}\cdot\frac{ds}{dy},$$

$$\frac{d\Omega}{dz}=\frac{d\Omega}{dv}\cdot\frac{dv}{dz}+\frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{dz}+\frac{d\Omega}{ds}\cdot\frac{ds}{dz}.$$

Mais nous avons $\tang v=\frac{y}{x}$, $u^2=\frac{1}{x^2+y^2}$, $s=zu$, d'où l'on conclut:

$$\frac{dv}{dx} = -u \sin v, \qquad \frac{dv}{dy} = u \cos v, \qquad \frac{dv}{dz} = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = -u^2 \cos v, \qquad \frac{du}{dy} = -u^2 \sin v, \qquad \frac{du}{dz} = 0,$$

$$\frac{ds}{dx} = -u s \cdot \cos v, \qquad \frac{ds}{dy} = -u s \cdot \sin v, \qquad \frac{ds}{dz} = u,$$

et par conséquent

$$\frac{d\Omega}{dx} = -u \sin v \frac{d\Omega}{dv} - u^2 \cos v \frac{d\Omega}{du} - u s \cdot \cos v \cdot \frac{d\Omega}{ds},$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = u \cos v \frac{d\Omega}{dv} - u^2 \sin v \frac{d\Omega}{du} - u s \cdot \sin v \cdot \frac{d\Omega}{ds},$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = u \frac{d\Omega}{ds}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (VII), l'on aura

$$(\text{VIII}) \begin{cases} 2\left(\frac{d^2 s}{dv^2} + s\right)\int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{ds}{dv} \cdot \frac{d\Omega}{dv} + \frac{s}{u} \cdot \frac{d\Omega}{du} + \frac{1+ss}{u^2} \cdot \frac{d\Omega}{ds}, \\ 2\left(\frac{d^2 u}{dv^2} + u\right)\int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv - \frac{\sigma}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{d\Omega}{dv} + \frac{d\Omega}{du} + \frac{s}{u} \cdot \frac{d\Omega}{ds}, \\ \frac{dt}{dv} = \frac{1}{u^2}\left(2\int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

On doit à D'Alembert et à Clairaut la forme de la seconde et de la troisième de ces équations. Comme ces auteurs, à l'exemple de Newton, cherchaient les variations de la latitude de la Lune par celles des nœuds et de l'inclinaison, ils n'ont point formé directement l'équation différentielle en s, laquelle nous paraît avoir été donnée pour la première fois par Lagrange (Voyez page 325 du tome III des Anciens Mémoires de l'Académie de Turin).

24. On peut aussi déduire des équations (VI)′ données dans le n.° 21 un nouveau système d'équations ayant v pour variable principale. En considérant dt comme variable, l'on doit changer

$$\frac{d^2 \cdot r^2}{dt^2} \quad \text{en} \quad \frac{d^2 \cdot r^2}{dt^2} - \frac{d \cdot r^2}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{dt^2};$$

donc, en substituant pour dt et $d^2 t$ leurs valeurs données dans le n.° 22, il viendra

$$\frac{d^2 \cdot r^2}{dt^2} = \left(\frac{1}{\rho^4} \cdot \frac{d^2 \cdot r^2}{dv^2} - \frac{2}{\rho^5} \cdot \frac{d\rho}{dv} \cdot \frac{d \cdot r^2}{dv}\right) 2 \int \rho^2 \frac{d\Omega}{dv} dv + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d \cdot r^2}{dv} \cdot \frac{d\Omega}{dv};$$

ou bien, en remarquant que $\rho = \frac{1}{u}$,

$$\frac{d^2 \cdot r^2}{dt^2} = \left(\frac{d^2 \cdot r^2}{dv^2} + \frac{2}{u} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{d \cdot r^2}{dv}\right) 2u^4 \int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv + u^2 \frac{d \cdot r^2}{dv} \cdot \frac{d\Omega}{dv};$$

en substituant cette valeur dans la première des équations (VI)', l'on aura

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot r^2}{dv^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{d \cdot r^2}{dv} = \frac{\frac{\sigma}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} - \frac{u^2}{2} \cdot \frac{d\Omega}{dv} \cdot \frac{d \cdot r^2}{dv} + 2 \int d'\Omega}{2u^4 \int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv}.$$

Or les équations

$$r \frac{d\Omega}{dr} = x \frac{d\Omega}{dx} + y \frac{d\Omega}{dy} + z \frac{d\Omega}{dz} \quad \text{et} \quad r = \frac{\sqrt{(1+ss)}}{u}$$

donnent

$$r \frac{d\Omega}{dr} = -u \frac{d\Omega}{du} \quad \text{et} \quad \frac{d \cdot r^2}{dv} = \frac{2s}{u^2} \cdot \frac{ds}{dv} - \frac{2(1+ss)}{u^3} \cdot \frac{du}{dv};$$

donc, en substituant ces valeurs, l'on obtiendra

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot r^2}{dv^2} + \frac{2}{u^3} \cdot \frac{du}{dv} \left(s \frac{ds}{dv} - \frac{1+ss}{u} \cdot \frac{du}{dv}\right) =$$

$$\left\{ \frac{\sigma u}{\sqrt{(1+ss)}} - u \frac{d\Omega}{du} + 2 \int d'\Omega - \left(s \frac{ds}{dv} - \frac{1+ss}{u} \cdot \frac{du}{dv}\right) \frac{d\Omega}{dv} \right\} \frac{1}{2u^4 \int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv}.$$

Si dans la troisième des équations (VI)' l'on fait pour plus de simplicité $d\varphi = dv \sqrt{\left(\frac{1}{1+ss} + \frac{1}{(1+ss)^2} \cdot \frac{ds^2}{dv^2}\right)}$, l'on a l'équation

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2\sigma}{r} + 2 \int d'\Omega;$$

ou, en substituant pour dt sa valeur,

$$\frac{dr^2}{dv^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{dv^2} = \frac{\frac{2\sigma u}{\sqrt{(1+ss)}} + 2 \int d'\Omega}{2u^4 \int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv}.$$

En combinant cette équation avec la précédente qui donne la valeur de $\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot r^2}{dv^2}$, et remarquant que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot r^2}{dv^2} = r \frac{d^2 r}{dv^2} + \frac{dr^2}{dv^2},$$

l'on trouvera

$$r^2\frac{dp^2}{dv^2} - r\frac{d^2r}{dv^2} + \frac{2}{u^3}\cdot\frac{du}{dv}\left(s\frac{ds}{dv} - \frac{1+ss}{u}\cdot\frac{du}{dv}\right) =$$

$$\left\{\frac{\sigma u}{\sqrt{(1+ss)}} + u\frac{d\Omega}{du} + \left(s\frac{ds}{dv} - \frac{1+ss}{u}\cdot\frac{du}{dv}\right)\frac{d\Omega}{dv}\right\}\frac{1}{2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv}.$$

25. Si dans les équations (IV) trouvées dans le n.° 18 on substitue au lieu des fonctions $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$, $\frac{d\Omega}{dz}$ leurs valeurs exprimées par $\frac{d\Omega}{dv}$, $\frac{d\Omega}{du}$, $\frac{d\Omega}{ds}$, l'on aura

$$(IV)'\begin{cases}\dfrac{d^2s}{dt^2} + s\dfrac{dv^2}{dt^2} + \dfrac{2}{\rho}\cdot\dfrac{d\rho}{dt}\cdot\dfrac{ds}{dt} = u^4\left(\dfrac{s}{u}\cdot\dfrac{d\Omega}{du} + \dfrac{1+ss}{u^2}\cdot\dfrac{d\Omega}{ds}\right),\\ \dfrac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\dfrac{dv^2}{dt^2} + \dfrac{\sigma}{\rho^2}\left(1+ss\right)^{-\frac{3}{2}} = -u^2\left(\dfrac{d\Omega}{du} + \dfrac{s}{u}\cdot\dfrac{d\Omega}{ds}\right),\\ \rho^2\dfrac{dv}{dt} = \int\dfrac{d\Omega}{dv}dt.\end{cases}$$

En faisant $\rho = \frac{1}{u}$ dans le premier membre de ces équations, on les transforme dans celles-ci:

$$(VIII)'\begin{cases}\dfrac{d^2s}{dt^2} + s\dfrac{dv^2}{dt^2} - \dfrac{2}{u}\cdot\dfrac{du}{dt}\cdot\dfrac{ds}{dt} = u^4\left(\dfrac{s}{u}\cdot\dfrac{d\Omega}{du} + \dfrac{1+ss}{u^2}\cdot\dfrac{d\Omega}{ds}\right),\\ \dfrac{d^2u}{dt^2} + u\dfrac{dv^2}{dt^2} - \dfrac{2}{u}\cdot\dfrac{du^2}{dt^2} - \dfrac{\sigma u^4}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}} = u^4\left(\dfrac{d\Omega}{du} + \dfrac{s}{u}\cdot\dfrac{d\Omega}{ds}\right),\\ \dfrac{dv}{dt} = u^2\int\dfrac{d\Omega}{dv}dt;\end{cases}$$

lesquelles doivent être considérées comme les réciproques des équations (VIII).

On trouvera de la même manière que les équations (V) peuvent être mises sous cette forme:

$$(V)'\begin{cases}\dfrac{d^2\cdot r^2d\theta}{dt^2} + r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{dv^2}{dt^2} = us\dfrac{d\Omega}{du} + (1+ss)\dfrac{d\Omega}{ds},\\ \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{d\theta^2}{dt^2} - r\cos\theta\dfrac{dv^2}{dt^2} - \dfrac{\sigma}{r^2} = -u^2\cos\theta\dfrac{d\Omega}{du},\\ (r\cos\theta)^2\dfrac{dv}{dt} = \int\dfrac{d\Omega}{dv}dt.\end{cases}$$

§ 3.

Développement préliminaire des fonctions des forces perturbatrices.

26. Les équations (VIII) seront la base de notre Théorie de la Lune; ainsi il est nécessaire de considérer les fonctions Ω', Ω'', Ω''', afin d'exprimer par les coordonnées u, v, s les termes qu'elles introduisent dans nos équations différentielles.

Nous avons fait (n.° 7)

$$\Omega' = -M'\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3} + \frac{M'}{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}};$$

mais l'on a

$$x = \frac{\cos v}{u}, \qquad y = \frac{\sin v}{u}, \qquad z = \frac{s}{u},$$

et rien n'empêche d'exprimer par des fonctions semblables les coordonnées du Soleil, en posant

$$x' = \frac{\cos v'}{u'}, \qquad y' = \frac{\sin v'}{u'}, \qquad z' = \frac{s'}{u'}.$$

Alors v' représente la longitude du Soleil comptée sur une écliptique fixe, depuis un équinoxe fixe; $\frac{1}{u'}$ la projection de son rayon vecteur sur le même plan, et s' la tangente de l'angle formé par le rayon vecteur r' avec cette même projection.

En substituant les valeurs de ces coordonnées, la première partie de Ω' devient

$$-M'\frac{u'^2}{u}\cdot\frac{ss'+\cos(v-v')}{(1+s's')^{\frac{3}{2}}},$$

et la seconde, $\frac{M'u'}{\sqrt{(1+\Pi)}}$, en posant pour plus de simplicité

$$\Pi = -\frac{2u'}{u}\cos(v-v') + \frac{u'^2}{u^2}(1+ss) - \frac{2u'}{u}ss' + s's',$$

de sorte que l'on a

$$\Omega' = \frac{M'u'}{\sqrt{(1+\Pi)}} - M'\frac{u'^2}{u}\cdot\frac{ss'+\cos(v-v')}{(1+s's')^{\frac{3}{2}}}.$$

En prenant les différences partielles de Ω', nous aurons

$$\frac{d\Omega'}{dv} = M'\frac{u'^2}{u}\sin(v-v')\left(\left(1+s's'\right)^{-\frac{3}{2}} - (1+\Pi)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\frac{d\Omega'}{du} = M'\frac{u'^3}{u^3}(1+ss)(1+\Pi)^{-\frac{3}{2}} + M'\frac{u'^2}{u^2}\left(\cos(v-v')+ss'\right)\left(\left(1+s's'\right)^{-\frac{3}{2}} - (1+\Pi)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\frac{d\Omega'}{ds} = -M'\frac{s\,u'^3}{u^2}(1+\Pi)^{-\frac{3}{2}} - M'\frac{s'u'^2}{u}\left(\left(1+s's'\right)^{-\frac{3}{2}} - (1+\Pi)^{-\frac{3}{2}}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{d\Omega'}{dv} = M'\frac{u'^2}{u^3}\sin(v-v')\left(\left(1+s's'\right)^{-\frac{3}{2}} - (1+\Pi)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega'}{du} + \frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega'}{ds} = M'\frac{u'^2}{u^3}\left(s\cdot\cos(v-v') - s'\right)\left(\left(1+s's'\right)^{-\frac{3}{2}} - (1+\Pi)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\frac{d\Omega'}{du} + \frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega'}{ds} = M'\frac{u'^3}{u^3}(1+\Pi)^{-\frac{3}{2}} + M'\frac{u'^2}{u^2}\cos(v-v')\left(\left(1+s's'\right)^{-\frac{3}{2}} - (1+\Pi)^{-\frac{3}{2}}\right).$$

27. Afin d'établir une limite dans les développemens ultérieurs de ces dernières fonctions, nous conviendrons de négliger le carré de s', le produit $\frac{u'^3}{u^2}s'$, et de ne conserver dans le développement de la fonction $(1+\Pi)^{-\frac{3}{2}}$ que les termes multipliés par u', u'^2, u'^3, en se rappelant que u' représente l'unité divisée par la distance du Soleil à la Terre projectée sur l'écliptique fixe; ainsi nous aurons

$$(1+\Pi)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\Pi + \frac{15}{8}\Pi^2 - \frac{35}{16}\Pi^3 + \text{etc.},$$

où l'on a

$$\Pi = -\frac{2u'}{u}\cos(v-v') + \frac{u'^2}{u^2}(1+ss) - \frac{2u'}{u}ss',$$

$$\Pi^2 = \frac{2u'^2}{u^2} + \frac{2u'^2}{u^2}\cos(2v-2v') - \frac{4u'^3}{u^3}(1+ss)\cos(v-v') + \frac{8u'^2}{u^2}ss'\cos(v-v'),$$

$$\Pi^3 = -\frac{6u'^3}{u^3}\cos(v-v') - \frac{2u'^3}{u^3}\cos(3v-3v'),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}(1+\Pi)^{-\frac{3}{2}} = {} & \left(1 + \frac{9}{4}\cdot\frac{u'^2}{u^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{u'^2}{u^2}ss + 3\frac{u'}{u}ss'\right)\\ & + \cos(2v-2v')\left(+\frac{15}{4}\cdot\frac{u'^2}{u^2}\right)\\ & + \cos(v-v')\left(+3\frac{u'}{u} + \frac{45}{8}\cdot\frac{u'^3}{u^3} - \frac{15}{2}\cdot\frac{u'^3}{u^3}ss + 15\frac{u'^2}{u^2}ss'\right)\\ & + \cos(3v-3v')\left(+\frac{35}{8}\cdot\frac{u'^3}{u^3}\right).\end{aligned}$$

En faisant les multiplications indiquées, on aura

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{d\Omega'}{dv}=M'\frac{u'^3}{u^4}\left\{\begin{array}{l}\sin(2v-2v')\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{8}\cdot\frac{u'^2}{u^2}+\frac{15}{4}\cdot\frac{u'^2}{u^2}ss-\frac{15}{2}\cdot\frac{u'}{u}s.s'\right)\\ \sin(v-v')\left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{u'}{u}+\frac{3}{2}\cdot\frac{u'}{u}ss+3.s.s'\right)\\ \sin(3v-3v')\left(-\frac{15}{8}\cdot\frac{u'}{u}\right)\\ \sin(4v-4v')\left(-\frac{35}{16}\cdot\frac{u'^2}{u^2}\right)\end{array}\right\}$$

$$\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega'}{du}+\frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega'}{ds}=$$

$$M'\frac{u'^3}{u^4}s\left\{\begin{array}{l}\cos 0\quad\left(-\frac{3}{2}-\frac{45}{16}\cdot\frac{u'^2}{u^2}+\frac{15}{4}\cdot\frac{u'^2}{u^2}ss-9\frac{u'^2}{u^2}s.s'+\frac{9}{4}\cdot\frac{u'}{u}\cdot\frac{s'}{s}\right)\\ \cos(2v-2v')\left(-\frac{3}{2}-5\frac{u'^2}{u^2}+\frac{15}{4}\cdot\frac{u'^2}{u^2}ss-\frac{15}{2}\cdot\frac{u'}{u}s.s'+\frac{15}{4}\cdot\frac{u'}{u}\cdot\frac{s'}{s}\right)\\ \cos(v-v')\left(-\frac{33}{8}\cdot\frac{u'}{u}+\frac{3}{2}\cdot\frac{u'}{u}ss-3.s.s'+3\frac{s'}{s}\right)\\ \cos(3v-3v')\left(-\frac{15}{8}\cdot\frac{u'}{u}\right)\\ \cos(4v-4v')\left(-\frac{35}{16}\cdot\frac{u'^2}{u^2}\right)\end{array}\right\}$$

$$\frac{d\Omega'}{du}+\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega'}{ds}=$$

$$M'\frac{u'^3}{u^3}\left\{\begin{array}{l}\cos 0\quad\left(-\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\cdot\frac{u'^2}{u^2}+\frac{9}{4}\cdot\frac{u'^2}{u^2}ss-\frac{9}{2}\cdot\frac{u'}{u}s.s'\right)\\ \cos(2v-2v')\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{u'^2}{u^2}+\frac{15}{4}\cdot\frac{u'^2}{u^2}ss-\frac{15}{2}\cdot\frac{u'}{u}s.s'\right)\\ \cos(v-v')\quad\left(-\frac{9}{8}\cdot\frac{u'}{u}+\frac{3}{2}\cdot\frac{u'}{u}ss-3.s.s'+15\frac{u'^2}{u^2}s.s'\right.\\ \cos(3v-3v')\left(-\frac{15}{8}\cdot\frac{u'}{u}\right)\\ \cos(4v-4v')\left(-\frac{35}{16}\cdot\frac{u'^2}{u^2}\right).\end{array}\right\}$$

28. Considérons maintenant la fonction Ω''', qui est par sa nature analogue à la fonction Ω'. Il suffira de développer la partie de Ω'''

relative à la planète m''; car il est évident que par un simple changement de lettres on pourra en déduire les termes dus à l'action des autres planètes.

En substituant pour x'', y'', z'' leurs valeurs $X''+x'$, $Y''+y'$, $Z''+z'$ dans la valeur de Ω'' trouvée dans le n.° 17, on aura

$$\Omega'''=\frac{m''}{\Delta'}-\frac{m''}{ur''^3}\Big((X''+x')\cos v+(Y''+y')\sin v+(Z''+z')s\Big),$$

où, $\Delta'^2=\left(X''+x'-\frac{\cos v}{u}\right)^2+\left(Y''+y'-\frac{\sin v}{u}\right)^2+\left(Z''+z'-\frac{s}{u}\right)^2.$

Cette expression de Δ'^2 donne

$$\frac{d\Delta'}{dv}=\frac{1}{u\Delta'}\left[\left(X''+x'-\frac{\cos v}{u}\right)\sin v-\left(Y''+y'-\frac{\sin v}{u}\right)\cos v\right],$$

$$\frac{d\Delta'}{du}=\frac{1}{u^2\Delta'}\left[\left(X''+x'-\frac{\cos v}{u}\right)\cos v-\left(Y''+y'-\frac{\sin v}{u}\right)\sin v+\left(Z''+z'-\frac{s}{u}\right)s\right],$$

$$\frac{d\Delta'}{ds}=-\frac{1}{u\Delta'}\left(Z''+z'-\frac{s}{u}\right).$$

Cela posé, il est facile de trouver les expressions suivantes:

$$\frac{d\Omega'''}{dv}=\frac{m''}{u}\Big((X''+x')\sin v-(Y''+y')\cos v\Big)\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right),$$

$$\frac{d\Omega'''}{du}=\frac{m''}{u^2}\Big((X''+x')\cos v+(Y''+y')\sin v+(Z''+z')s\Big)\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right)+\frac{m''}{u^3\Delta'^3}(1+ss),$$

$$\frac{d\Omega'''}{ds}=-\frac{m''}{u}\Big(Z''+z'\Big)\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right)-\frac{m''s}{u^2\Delta'^3}.$$

Actuellement si l'on fait

$$X''=\frac{\cos v''}{u''},\qquad Y''=\frac{\sin v''}{u''},\qquad Z''=\frac{s''}{u''},$$

on aura

$$\frac{d\Omega'''}{dv}=\frac{m''}{u}\left(\frac{\sin(v-v'')}{u''}+\frac{\sin(v-v')}{u'}\right)\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right),$$

$$\frac{d\Omega'''}{du}=\frac{m''}{u^2}\left[\frac{\cos(v-v'')}{u''}+\frac{\cos(v-v')}{u'}+\left(\frac{s''}{u''}+\frac{s'}{u'}\right)s\right]\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right)+\frac{m''}{u^3\Delta'^3}(1+ss),$$

$$\frac{d\Omega'''}{du}=-\frac{m''}{u}\left(\frac{s''}{u''}+\frac{s'}{u'}\right)\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta''^3}\right)-\frac{m''s}{u^2\Delta'^3}.$$

Il suit de là que nous avons

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{d\Omega'''}{dv}=\frac{m''}{u^3}\left(\frac{1}{u''}sin(v-v'')+\frac{1}{u'}sin(v-v')\right)\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right),$$

$$\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega'''}{du}+\frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega'''}{ds}=\frac{m''}{u^3}\left(\frac{s}{u''}cos(v-v'')+\frac{s}{u'}cos(v-v')-\frac{s''}{u''}-\frac{s'}{u'}\right)\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right),$$

$$\frac{d\Omega'''}{du}+\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega'''}{ds}=\frac{m''}{u^3\Delta'^3}+\frac{m''}{u^2}\left(\frac{1}{u''}cos(v-v'')+\frac{1}{u'}cos(v-v')\right)\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right).$$

Pour achever d'exprimer ces trois fonctions par nos coordonnées polaires, il faut remarquer que l'on a

$$r''^2=\frac{1+s's'}{u'^2}+\frac{1+s''s''}{u''^2}+\frac{2\cdot s's''}{u'u''}+\frac{2\,cos(v'-v'')}{u'u''},$$

$$\Delta'^2=r''^2+\frac{1+ss}{u^2}-\frac{2\,cos(v-v'')}{u\cdot u''}-\frac{2\,cos(v-v')}{u\cdot u'}-\frac{2\cdot s}{u}\left(\frac{s'}{u'}+\frac{s''}{u''}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{u^3\Delta'^3}=\frac{u'^3}{u^3}\left(r''^2u'^2-\frac{2u'}{u}cos(v-v')-\frac{2u'^2}{uu''}cos(v-v'')+\frac{u'^2}{u^2}(1+ss)-\frac{2u's}{u}\left(s'+\frac{s''u'}{u''}\right)\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1}{u^3}\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right)=\frac{u'^3}{u^3}\left(1+\frac{2u'}{u''}cos(v'-v'')+s's'+(1+s''s'')\frac{u'^2}{u''^2}+\frac{2\cdot s's''\cdot u'}{u''}\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$-\frac{u'^3}{u^3}\left(r''^2u'^2-\frac{2u'}{u}cos(v-v')-\frac{2u'^2}{uu''}cos(v-v'')+\frac{u'^2}{u^2}(1+ss)-\frac{2u's}{u}\left(s'+\frac{s''u'}{u''}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ces deux expressions peuvent être développées en série convergente lorsqu'il s'agit d'une planète *inférieure*: pour une planète *supérieure* il faudra leurs donner $\frac{u''^3}{u^3}$ pour facteur commun, et alors l'on aura

$$\frac{1}{u^3\Delta'^3}=\frac{u''^3}{u^3}\left(r''^2u''^2-\frac{2u''}{u}cos(v-v'')-\frac{2u''^2}{u\cdot u'}cos(v-v')+\frac{u''^2}{u^2}(1+ss)-\frac{2u''s}{u}\left(s''+\frac{s'u''}{u'}\right)\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1}{u^3}\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{\Delta'^3}\right)=\frac{u''^3}{u^3}\left(1+\frac{2u''}{u'}cos(v'-v'')+s''s''+(1+s''s'')\frac{u''^2}{u'^2}+\frac{2\cdot s'\cdot s''\cdot u''}{u'}\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$-\frac{u''^3}{u^3}\left(r''^2u''^2-\frac{2u''}{u}cos(v-v'')-\frac{2u''^2}{u\cdot u'}cos(v-v')+\frac{u''^2}{u^2}(1+ss)-\frac{2u''s}{u}\left(s''+\frac{s'u''}{u'}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

29. La fonction Ω'' étant assez compliquée, il convient de considérer à part chacun des termes qui la composent; ainsi nous la réduirons d'abord à $\Omega''=\frac{\sigma}{M''}V''$ (n.° 7). De plus, nous ne retiendrons dans V''

que les trois premiers termes ; et nous supposerons la Terre un sphéroïde de révolution. Dans ces hypothèses l'on a

$$\Omega'' = \sigma \frac{D^2}{r^3}\left(\psi\left(\sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right) + Y_{(2)} + \frac{D}{r} Y_{(3)}\right),$$

$$Y_{(2)} = -K_{(2)}\left(\sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right); \quad Y_{(3)} = K_{(3)}\left(\sin^3\lambda - \frac{3}{5}\sin\lambda\right); \quad \text{(V. n.° 8 et 11).}$$

En substituant ces valeurs de $Y_{(2)}$, $Y_{(3)}$ et remarquant que $r = \frac{\sqrt{(1+ss)}}{u}$, nous aurons

$$\Omega'' = \sigma \frac{D^2 u^3}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}(\psi - K_{(2)})\left(\sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right) + \sigma \frac{D^3 u^4}{(1+ss)^2} K_{(3)}\left(\sin^3\lambda - \frac{3}{5}\sin\lambda\right).$$

En substituant nos valeurs de x, y, z dans celle de $\sin\lambda = p$, trouvée dans le n.° 9, il viendra

$$\sin\lambda = \sin\omega \sin\phi \frac{\cos v}{\sqrt{(1+ss)}} + \sin\omega\cos\phi \frac{\sin v}{\sqrt{(1+ss)}} + \cos\omega \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}$$

$$= \frac{\sin\omega \sin(v+\phi)}{\sqrt{(1+ss)}} + \frac{s \cdot \cos\omega}{\sqrt{(1+ss)}},$$

et par conséquent

$$\frac{d \cdot \sin\lambda}{dv} = \frac{\sin\omega\cos(v+\phi)}{\sqrt{(1+ss)}}, \quad \frac{d \cdot \sin\lambda}{du} = 0, \quad \frac{d \cdot \sin\lambda}{ds} = \frac{\cos\omega - s.\sin\omega\sin(v+\phi)}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cela posé, si l'on forme les différences partielles de la fonction Ω'', l'on trouvera

$$\frac{d\Omega''}{dv} = \frac{2\sigma(\psi - K_{(2)})D^2u^3\sin\lambda}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d \cdot \sin\lambda}{dv} + \frac{3\sigma K_{(3)}D^3u^4(\sin^2\lambda - \frac{1}{5})}{(1+ss)^2} \cdot \frac{d.\sin\lambda}{dv},$$

$$\frac{d\Omega''}{du} = \frac{3\sigma(\psi - K_{(2)})D^2u^2(\sin^2\lambda - \frac{1}{3})}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\sigma K_{(3)}D^3u^3(\sin^3\lambda - \frac{3}{5}\sin\lambda)}{(1+ss)^2},$$

$$\frac{d\Omega''}{ds} = \frac{2\sigma(\psi - K_{(2)})D^2u^3\sin\lambda}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d \cdot \sin\lambda}{ds} + \frac{3\sigma K_{(3)}D^3u^4(\sin^2\lambda - \frac{1}{5})}{(1+ss)^2} \cdot \frac{d \cdot \sin\lambda}{ds}$$

$$- \frac{3\sigma(\psi - K_{(2)})s\,D^2u^3(\sin^2\lambda - \frac{1}{3})}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4\sigma K_{(3)}D^3u^4s(\sin^3\lambda - \frac{3}{5}\sin\lambda)}{(1+ss)^3};$$

et de là il est facile de conclure les expressions suivantes :

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{d\Omega''}{dv}=\frac{2\sigma(\psi-K_{(2)})D^2u\sin\lambda}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\cdot\sin\lambda}{dv}+\frac{3\sigma K_{(3)}D^3u^2(\sin^2\lambda-\frac{1}{5})}{(1+ss)^2}\cdot\frac{d\cdot\sin\lambda}{dv},$$

$$\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega''}{du}+\frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega''}{ds}=\frac{2\sigma(\psi-K_{(2)})D^2u\sin\lambda}{(1+ss)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d\cdot\sin\lambda}{ds}+\frac{3\sigma K_{(3)}D^3u^2(\sin^2\lambda-\frac{1}{3})}{1+ss}\cdot\frac{d\cdot\sin\lambda}{ds},$$

$$\frac{d\Omega''}{du}+\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega''}{ds}=\frac{\sigma(\psi-K_{(2)})D^2u^2}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{3(\sin^2\lambda-\frac{1}{3})}{1+ss}+2s\cdot\sin\lambda\frac{d\cdot\sin\lambda}{ds}\right)$$

$$+\frac{\sigma K_{(3)}D^3u^3}{(1+ss)^2}\left(\frac{4(\sin^3\lambda-\frac{3}{5}\sin\lambda)}{1+ss}+3s\left(\sin^2\lambda-\frac{1}{5}\right)\frac{d\cdot\sin\lambda}{ds}\right).$$

Les formules précédentes donnent

$$\frac{\sin^2\lambda}{1+ss}=\frac{\frac{1}{2}\sin^2\omega+ss\cdot\cos^2\omega+2\sin\omega\cos\omega\cdot s\cdot\sin(v+\phi)-\frac{1}{2}\sin^2\omega\cos(2v+2\phi)}{(1+ss)^2},$$

$$\frac{\sin\lambda}{(1+ss)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d\cdot\sin\lambda}{ds}=\frac{(1-\frac{3}{2}\sin^2\omega)s+(1-ss)\sin\omega\cos\omega\sin(v+\phi)+\frac{1}{2}s\cdot\sin^2\omega\cos(2v+2\phi)}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\sin^2\lambda}{1+ss}\cdot\frac{d\cdot\sin\lambda}{ds}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cos\omega\sin^2\omega-ss(\cos\omega-2\cos^3\omega)+s(2\sin\omega-\frac{11}{4}\sin^3\omega)\sin(v+\phi)\\-\cos\omega\sin^2\omega(\frac{1}{2}-ss)\cos(2v+2\phi)+\frac{1}{4}\sin^3\omega\cdot s\cdot\sin(3v+3\phi)\end{array}\right\}\frac{1}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{\sin\lambda}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\cdot\sin\lambda}{dv}=\frac{s\cdot\sin\omega\cos\omega\cos(v+\phi)+\frac{1}{2}\sin^2\omega\sin(2v+2\phi)}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\sin^2\lambda}{(1+ss)^2}\cdot\frac{d\cdot\sin\lambda}{dv}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}\sin^3\omega+ss\cdot\sin\omega\cos^2\omega+s\cdot\sin^2\omega\cos\omega\sin(2v+2\phi)\\-\frac{1}{4}\sin^3\omega\cos(3v+3\phi)\end{array}\right\}\frac{1}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{\sin^3\lambda}{1+ss}=\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}\sin^2\omega\cos\omega\, s+\cos^3\omega\, s^3+(\frac{3}{4}\sin^3\omega+3\sin\omega\cos^2\omega\, ss)\sin(v+\phi)\\-\frac{3}{2}\sin^2\omega\cos\omega\, s\cdot\cos(2v+2\phi)-\frac{1}{4}\sin^3\omega\sin(3v+3\phi)\end{array}\right\}\frac{1}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}.$$

30. A l'aide de ces développemens, l'on obtiendra les résultats qui suivent :

$$\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega''}{du}+\frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega''}{ds}=\frac{2\sigma(\psi-K_{(2)})D^2u}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{ll}\cos 0 & \left(1-\frac{3}{2}\sin^2\omega\right)s\\ \sin(v+\phi) & (1-ss)\sin\omega\cos\omega\\ \cos(2v+2\phi) & \left(+\frac{1}{2}s\cdot\sin^2\omega\right)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{3\sigma K_{(3)}D^3u^2}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos 0 \quad \left[\frac{1}{6}\cos\omega-\frac{1}{2}\cos^3\omega-\left(\frac{4}{3}\cos\omega-2\cos^3\omega\right)ss\right]\\ \sin(v+\phi)\left[\left(\frac{7}{3}\sin\omega-\frac{11}{4}\sin^3\omega\right)s+\frac{1}{3}\sin\omega\, s^3\right]\\ \cos(2v+2\phi)\left[-\cos\omega\sin^2\omega\left(\frac{1}{2}-ss\right)\right]\\ \sin(3v+3\phi)\left[+\frac{1}{4}\sin^3\omega\, s\right]\end{array}\right\};$$

$$\frac{d\Omega''}{du}+\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega''}{ds}=\frac{\sigma D^2u^2(\psi-K_{(2)})}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos 0 \quad \left[-1+\frac{3}{2}\sin^2\omega+(4-6\sin^2\omega)ss\right]\\ \sin(v+\phi)\left[\sin\omega\cos\omega(8s-2s^3)\right]\\ \cos(2v+2\phi)\left[\sin^2\omega\left(-\frac{3}{2}+ss\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\sigma D^3u^3K_{(3)}}{(1+ss)^{\frac{9}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos 0 \quad \left[-3\cos\omega+\frac{15}{2}\sin^2\omega\cos\omega-(6\cos\omega-10\cos^3\omega)ss\right]\\ \sin(v+\phi)\left[-\frac{12}{5}\sin\omega+3\sin^3\omega+\left(\frac{81}{5}\sin\omega-\frac{81}{4}\sin^3\omega\right)ss+\frac{3}{5}\sin\omega\, s^4\right]\\ \cos(2v+2\phi)\left[\sin^2\omega\cos\omega\left(-\frac{15}{2}+3ss\right)s\right]\\ \sin(3v+3\phi)\left[\sin^3\omega\left(-1+\frac{3}{4}ss\right)\right]\end{array}\right\};$$

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{d\Omega''}{dv}=\frac{2\sigma D^2u(\psi-K_{(2)})}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{ll}\cos(v+\phi) & (\sin\omega\cos\omega\, s)\\ \sin(2v+2\phi) & \left(\frac{1}{2}\sin^2\omega\right)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{3\sigma D^3u^2K_{(3)}}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos 0 \quad \left[\frac{1}{4}\sin^3\omega+ss\cdot\sin\omega\cos^2\omega\right]\\ \cos(v+\phi)\left[-\frac{1}{5}\sin\omega(1+ss)\right]\\ \sin(2v+2\phi)\left[\sin^2\omega\cos\omega\, s\right]\\ \cos(3v+3\phi)\left[-\frac{1}{4}\sin^3\omega\right]\end{array}\right\}.$$

31. Le coefficient $K_{(3)}$ qui entre dans ces formules est sans doute très-petit ; mais pour ne rien avancer sans démonstration nous allons faire voir qu'en général les coefficiens $K_{(3)}$, $K_{(4)}$, etc. sont chacun plus petits que le coefficient $K_{(2)}$.

Les observations de la longueur du pendule simple qui bat les secondes faites à différentes latitudes ont fait voir que cette longueur varie à très-peu-près proportionnellement au carré du *sinus* de la latitude. En partant de cette donnée voici comment M. *Poisson* parvient à fixer la limite des fonctions $Y_{(3)}$, $Y_{(4)}$, etc. sans même supposer que la Terre est un sphéroïde de révolution (Voyez Connaissance des tems pour 1821, page 264).

D'après la théorie de l'attraction des sphéroïdes, l'expression de la longueur du pendule est donnée *a priori* par une fonction de cette forme

$$L[1+5\psi(\sin^2\lambda-\tfrac{1}{3})+Y_{(2)}+2Y_{(3)}+3Y_{(4)}+4Y_{(5)}+\text{etc.}],$$

où L désigne une quantité constante, et λ la latitude géographique. Supposons maintenant que la véritable expression de cette longueur sous forme finie soit

$$L[1+A(\sin^2\lambda-\tfrac{1}{3})+Q],$$

A désignant un coefficient constant, et Q une fonction de la latitude et de la longitude, qui d'après les observations est résultée toujours plus petite que A. En égalant ces deux expressions l'on obtient

$$Q=Y_{(2)}+(5\psi-A)(\sin^2\lambda-\tfrac{1}{3})+2Y_{(3)}+3Y_{(4)}+4Y_{(5)}+\text{etc.},$$

dans laquelle la fonction $Y_{(2)}+(5\psi-A)(\sin^2\lambda-\frac{1}{3})$ doit être considérée comme assujettie aux propriétés générales de la fonction $Y_{(2)}$.

32. Actuellement imaginons la fonction

$$(1-2x[\sin\lambda\sin(\lambda)+\cos\lambda\cos(\lambda)\cos(\varpi-(\varpi))]+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

développée suivant les puissances de x, et nommons $X_{(n)}$ le coefficient de x^n ; M. *Legendre* (Exercices de calcul intégral, vol. II, pag. 271) a démontré que les deux fonctions $X_{(n)}$, $Y_{(m)}$ satisfont toujours à l'équation

$$\iint X_{(n)}Y_{(m)}\cos\lambda.d\lambda\, d\varpi=0$$

entre les limites $\varpi=0^\circ$; $\lambda=90^\circ$;
$\varpi=360^\circ$; $\lambda=270^\circ$;

pourvu que les indices m et n soient deux nombres différens. Donc, en vertu de cette propriété, si l'on multiplie la valeur de Q par $X_{(m)} \cos\lambda . d\lambda d\varpi$, l'on aura, en intégrant entre les mêmes limites,

$$\iint Q X_{(m)} \cos\lambda . d\lambda d\varpi = (m-1) \iint Y_{(m)} X_{(m)} \cos\lambda . d\lambda d\varpi .$$

Mais dans l'ouvrage que l'on vient de citer il est démontré (pag. 272) que

$$\iint X_{(m)} Y_{(m)} \cos\lambda . d\lambda d\varpi = -\frac{4\pi}{2m+1}\left(Y_{(m)}\right),$$

$(Y_{(m)})$ étant ce qui devient $Y_{(m)}$ par le changement de λ et ϖ en (λ) et (ϖ), en désignant par ces deux dernières quantités deux valeurs arbitraires que l'on peut donner à λ et à ϖ. Ainsi nous aurons

$$\iint Q X_{(m)} \cos\lambda . d\lambda d\varpi = -\frac{4\pi(m-1)}{2m+1}\left(Y_{(m)}\right).$$

Si l'on remarque maintenant que, relativement aux limites de cette intégrale, le coefficient $X_{(m)}$ demeure toujours compris entre $+1$ et -1, l'on en conclut, en faisant $X_{(m)} = 1$, que l'on a, abstraction faite du signe,

$$\left(Y_{(m)}\right) < -\frac{2m+1}{4\pi(m-1)} \iint Q \cos\lambda . d\lambda d\varpi .$$

Donc, en nommant B la plus grande valeur de Q, laquelle par l'hypothèse établie doit être plus petite que A, l'on aura à plus forte raison

$$\left(Y_{(m)}\right) < \frac{B(2m+1)}{4\pi(m-1)} \iint \cos\lambda . d\lambda d\varpi ,$$

ou bien, en observant qu'ici $\iint \cos\lambda . d\lambda d\varpi = -4\pi$,

$$\left(Y_{(m)}\right) < \frac{B(2m+1)}{m-1} .$$

Pour mieux fixer les idées sur ce point nous ajouterons que M. *Bessel* en comparant avec la formule

$$L\left[1 + 5\psi(\sin^2\lambda - \tfrac{1}{3}) + Y_{(2)} + 2Y_{(3)} + \text{etc.}\right]$$

les longueurs du pendule observées dans les deux hémisphères a trouvé que l'on peut représenter ces observations en prenant

$$Y_{(3)} = K_{(3)}(\sin^3\lambda - \tfrac{3}{5}\sin\lambda)$$
$$K_{(3)} = 0{,}0003345 ,$$

et en supposant nulles toutes les autres fonctions $Y_{(4)}$, $Y_{(5)}$, etc. (Voyez *Astronomiae fundamenta*, page 131).

33. Actuellement développons la seconde partie de Ω'', c'est-à-dire la fonction $\frac{\sigma}{M}V'$. En retenant seulement le premier terme de la valeur de V', nous aurons

$$\Omega'' = \sigma\frac{3}{5}\cdot\frac{b'}{b}\cdot\frac{D'^2}{r^3},$$

et, en substituant pour b' sa valeur rapportée dans le n.° 14, il viendra

$$\Omega''=\frac{9}{16\pi}\cdot\frac{\sigma}{D'^3b}(2C-B-A)\frac{u^3}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\left(\sin^2\lambda'-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{16\pi}\cdot\frac{\sigma}{D'^3b}(B-A)\frac{u^3}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\cos^2\lambda'\cos 2\varpi'.$$

Il est évident que les termes introduits dans les équations différentielles par le premier terme de cette expression peuvent être formés immédiatement en changeant le facteur

$$\sigma D^2(\psi - K_{(2)}) \quad \text{en} \quad \frac{9\sigma}{16\pi}\cdot\frac{1}{D'^3b}(2C-B-A)$$

dans la première partie de chacun des résultats rapportés dans le n.° 30, qui nous ont été fournis par la valeur spéciale de Ω'' définie dans le n.° 29. Il suffit donc de nous occuper ici de la fonction

$$\frac{u^3\cos^2\lambda'\cos 2\varpi'}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{que nous désignerons par } \xi.$$

D'après les formules du n.° 9, nous avons

$$\xi = \frac{u^3}{2(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}((A_,+A_{,,}\sqrt{-1})\cos v+(B_,+B_{,,}\sqrt{-1})\sin v+(C_,+C_{,,}\sqrt{-1})s)^2\\ +((A_,-A_{,,}\sqrt{-1})\cos v+(B_,-B_{,,}\sqrt{-1})\sin v+(C_,-C_{,,}\sqrt{-1})s)^2\end{array}\right\}$$

$$=\frac{u^3}{2(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\Big(2(A_,^2-A_{,,}^2)\cos^2v+2(B_,^2-B_{,,}^2)\sin^2v+2(C_,^2-C_{,,}^2)ss+4(A_,B_,-A_{,,}B_{,,})\sin v\cos v$$
$$+4(A_,C_,-A_{,,}C_{,,})\,s\cdot\cos v+4(B_,C_,-B_{,,}C_{,,})\,s\cdot\sin v\Big)$$

$$=\frac{u^3}{2(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\Big((A_,^2-A_{,,}^2+B_,^2-B_{,,}^2)+(A_,^2-A_{,,}^2-B_,^2+B_{,,}^2)\cos 2v+2(A_,B_,-A_{,,}B_{,,})\sin 2v$$
$$+2(A_,C_,-A_{,,}C_{,,})\,s\cdot\cos v+2(B_,C_,-B_{,,}C_{,,})\,s\cdot\sin v+2(C_,^2-C_{,,}^2)s^2\Big).$$

Donc, en prenant les différentielles partielles de ξ, il viendra

$$\frac{d\xi}{dv}=\frac{u^3}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\Big(-(A_{,}^2-A_{,,}^2-B_{,}^2+B_{,,}^2)\sin 2v+2(A_{,}B_{,}-A_{,,}B_{,,})\cos 2v-(A_{,}C_{,}-A_{,,}C_{,,})s\cdot\sin v$$
$$+(B_{,}C_{,}-B_{,,}C_{,,})\,s\cdot\cos v\Big)$$

$$\frac{d\xi}{du}=\frac{3u^2}{2(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\Big((A_{,}^2-A_{,,}^2+B_{,}^2-B_{,,}^2)+(A_{,}^2-A_{,,}^2-B_{,}^2+B_{,,}^2)\cos 2v+2(A_{,}B_{,}-A_{,,}B_{,,})\sin 2v$$
$$+2(A_{,}C_{,}-A_{,,}C_{,,})s\cdot\cos v+2(B_{,}C_{,}-B_{,,}C_{,,})s\cdot\sin v+2(C_{,}^2-C_{,,}^2)\,s^2\Big)$$

$$\frac{d\xi}{ds}=\frac{u^3}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\Big(\big[(A_{,}C_{,}-A_{,,}C_{,,})\cos v+(B_{,}C_{,}-B_{,,}C_{,,})\sin v\big](1-4ss)+(C_{,}^2-C_{,,}^2)(2s-3s^3)\Big)$$

$$\frac{-5u^3s}{2(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\Big((A_{,}^2-A_{,,}^2+B_{,}^2-B_{,,}^2)+(A_{,}^2-A_{,,}^2-B_{,}^2+B_{,,}^2)\cos 2v+2(A_{,}B_{,}-A_{,,}B_{,,})\sin 2v\Big).$$

34. Les valeurs de $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$; $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$ posées dans le n.° 16 donnent

$$A_{,}^2 = \cos^2\omega'\sin^2\varphi'\sin^2\theta' + \cos^2\varphi'\cos^2\theta' + \tfrac{1}{2}\cos\omega'\sin 2\varphi'\sin 2\theta'$$
$$A_{,,}^2 = \cos^2\omega'\sin^2\varphi'\cos^2\theta' + \cos^2\varphi'\sin^2\theta' - \tfrac{1}{2}\cos\omega'\sin 2\varphi'\sin 2\theta'$$
$$B_{,}^2 = \cos^2\omega'\cos^2\varphi'\sin^2\theta' + \sin^2\varphi'\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\cos\omega'\sin 2\varphi'\sin 2\theta'$$
$$B_{,,}^2 = \cos^2\omega'\cos^2\varphi'\cos^2\theta' + \sin^2\varphi'\sin^2\theta' + \tfrac{1}{2}\cos\omega'\sin 2\varphi'\sin 2\theta'$$
$$A_{,}B_{,} = \tfrac{1}{2}\cos^2\omega'\sin 2\varphi'\sin^2\theta' + \tfrac{1}{2}\cos\omega'\cos^2\varphi'\sin 2\theta' - \tfrac{1}{2}\cos\omega'\sin^2\varphi'\sin 2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi'\cos^2\theta'$$
$$A_{,,}B_{,,} = \tfrac{1}{2}\cos^2\omega'\cos 2\varphi'\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\cos\omega'\cos^2\varphi'\sin 2\theta' + \tfrac{1}{2}\cos\omega'\sin^2\varphi'\sin 2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi'\sin^2\theta'$$
$$A_{,}C_{,} = -\tfrac{1}{2}\sin 2\omega'\sin\varphi'\sin^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin\omega'\cos\varphi'\sin 2\theta'$$
$$A_{,,}C_{,,} = -\tfrac{1}{2}\sin 2\omega'\sin\varphi'\cos^2\theta' + \tfrac{1}{2}\sin\omega'\cos\varphi'\sin 2\theta'$$
$$B_{,}C_{,} = -\tfrac{1}{2}\sin 2\omega'\cos\varphi'\sin^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin\omega'\sin\varphi'\sin 2\theta'$$
$$B_{,,}C_{,,} = -\tfrac{1}{2}\sin 2\omega'\cos\varphi'\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin\omega'\sin\varphi'\sin 2\theta'$$
$$C_{,}^2 = \sin^2\omega'\sin^2\theta'$$
$$C_{,,}^2 = \sin^2\omega'\cos^2\theta'$$

et par conséquent

$$A_{,}^{2}-A_{,,}^{2}+B_{,}^{2}-B_{,,}^{2}=\sin^{2}\omega'\cos 2\theta'$$

$$A_{,}^{2}-A_{,,}^{2}-B_{,}^{2}+B_{,,}^{2}=(1+\cos^{2}\omega')\cos 2\phi'\cos 2\theta'+2\cos\omega'\sin 2\phi'\sin 2\theta'$$

$$A_{,}B_{,}-A_{,,}B_{,,}=-\tfrac{1}{2}(1+\cos^{2}\omega')\sin 2\phi'\cos 2\theta'+\cos\omega'\cos 2\phi'\sin 2\theta'$$

$$A_{,}C_{,}-A_{,,}C_{,,}=\tfrac{1}{2}\sin 2\omega'\sin\phi'\cos 2\theta'-\sin\omega'\cos\phi'\sin 2\theta'$$

$$B_{,}C_{,}-B_{,,}C_{,,}=\tfrac{1}{2}\sin 2\omega'\cos\phi'\cos 2\theta'+\sin\omega'\sin\phi'\sin 2\theta'$$

$$C_{,}^{2}-C_{,,}^{2}=-\sin^{2}\omega'\cos 2\theta'=-(A_{,}^{2}-A_{,,}^{2}+B_{,}^{2}-B_{,,}^{2}).$$

Partant l'on a

$$\frac{s}{u}\cdot\frac{d\xi}{du}+\frac{1+ss}{u^{2}}\cdot\frac{d\xi}{ds}=$$

$$\frac{3us}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left(C_{,}^{2}-C_{,,}^{2}\right)$$

$$-\frac{us}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\Big((A_{,}^{2}-A_{,,}^{2}-B_{,}^{2}+B_{,,}^{2})\cos 2v+2(A_{,}B_{,}-A_{,,}B_{,,})\sin 2v\Big)$$

$$+\frac{u(1-ss)}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\Big((A_{,}C_{,}-A_{,,}C_{,,})\cos v+(B_{,}C_{,}-B_{,,}C_{,,})\sin v\Big);$$

$$\frac{d\xi}{du}+\frac{s}{u}\cdot\frac{d\xi}{ds}=$$

$$-\frac{u^{2}(3-12ss)}{2(1+ss)^{\frac{7}{2}}}(C_{,}^{2}-C_{,,}^{2})$$

$$+\frac{u^{2}(3-2ss)}{2(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\Big((A_{,}^{2}-A_{,,}^{2}-B_{,}^{2}+B_{,,}^{2})\cos 2v+2(A_{,}B_{,}-A_{,,}B_{,,})\sin 2v\Big)$$

$$+\frac{u^{2}(4s-ss)}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\Big((A_{,}C_{,}-A_{,,}C_{,,})\cos v+(B_{,}C_{,}-B_{,,}C_{,,})\sin v\Big);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{s}{u}\cdot\frac{d\xi}{du}+\frac{1+ss}{u^{2}}\cdot\frac{d\xi}{ds}=$$

$$-\frac{us}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}3\sin^{2}\omega'\cos 2\theta'\\+(1+\cos^{2}\omega')\cos 2\theta'\cos(2v+2\phi')\\+2\cos\omega'\sin 2\theta'\sin(2v+2\phi')\end{array}\right\}$$

$$+\frac{u(1-ss)}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}\sin 2\omega'\cos 2\theta'\sin(v+\phi')\\-\sin\omega'\sin 2\theta'\cos(v+\phi')\end{array}\right\};$$

$$\frac{d\xi}{du} + \frac{s}{u}\cdot\frac{d\xi}{ds} =$$

$$\frac{u^2(3-12ss)}{2(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left(\sin^2\omega'\cos 2\theta'\right)$$

$$+\frac{u^2(3-2ss)}{2(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\begin{array}{l}(1+\cos^2\omega')\cos 2\theta'\cos(2v+2\varphi')\\ +2\cos\omega'\sin 2\theta'\sin(2v+2\varphi')\end{array}\right\}$$

$$+\frac{u^2(4s-ss)}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sin 2\omega'\cos 2\theta'\sin(v+\varphi')\\ -\sin\omega'\sin 2\theta'\cos(v+\varphi')\end{array}\right\};$$

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{d\xi}{dv} =$$

$$-\frac{u}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}(1+\cos^2\omega')\cos 2\theta'\sin(2v+2\varphi')\\ +\cos\omega'\sin 2\theta'\cos(2v+2\varphi')\end{array}\right\}$$

$$+\frac{us}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sin 2\omega'\cos 2\theta'\cos(v+\varphi')\\ +\sin\omega'\sin 2\theta'\sin(v+\varphi')\end{array}\right\}.$$

35. En réunissant les fonctions données par ces deux termes, et ordonnant par rapport aux sinus et cosinus des angles formés par la combinaison de θ, ϖ, v, l'on trouvera

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{d\Omega''}{dv} =$$

$$\frac{9u\sigma}{8\pi D'^3 b}\cdot\frac{2C-B-A}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos(v+\varphi')\sin\omega'\cos\omega' s\\ +\sin(2v+2\varphi')\frac{1}{2}\sin^2\omega'\end{array}\right\}$$

$$+\frac{9u\sigma}{16\pi D'^3 b}\cdot\frac{B-A}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\sin(2v+2\varphi'+2\theta')\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\omega'-\frac{1}{2}\cos^2\omega'\right)\\ \sin(2v+2\varphi'-2\theta')\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\omega'-\frac{1}{2}\cos^2\omega'\right)\\ \cos(v+\varphi'+2\theta')\left(-\frac{1}{2}\sin\omega'+\frac{1}{4}\sin 2\omega'\right)s\\ \cos(v+\varphi'-2\theta')\left(+\frac{1}{2}\sin\omega'+\frac{1}{4}\sin 2\omega'\right)s\end{array}\right\};$$

$$\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega''}{du}+\frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega''}{ds}=$$

$$\frac{9u\sigma}{8\pi D'^3 b}\cdot\frac{2C-B-A}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos 0 \qquad (1-\tfrac{3}{2}\sin^2\omega')\,s\\ \sin(v+\varphi')\,(\sin\omega'\cos\omega')\,(1-ss)\\ \cos(2v+2\varphi')\,(\tfrac{1}{2}\sin^2\omega' s)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{9u\sigma s}{16\pi D'^3 b}\cdot\frac{B-A}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos 2\theta'\,(3\sin^2\omega')\\ \cos(2v+2\varphi'+2\theta')\,(\tfrac{1}{2}-\cos\omega'+\tfrac{1}{2}\cos^2\omega')\\ \cos(2v+2\varphi'-2\theta')\,(\tfrac{1}{2}+\cos\omega'+\tfrac{1}{2}\cos^2\omega')\end{array}\right\}$$

$$+\frac{9u\sigma(1-ss)}{16\pi D'^3 b}\cdot\frac{B-A}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\sin(v+\varphi'+2\theta')\,(-\tfrac{1}{2}\sin\omega'+\tfrac{1}{4}\sin 2\omega')\\ \sin(v+\varphi'-2\theta')\,(\tfrac{1}{2}\sin\omega'+\tfrac{1}{4}\sin 2\omega')\end{array}\right\};$$

$$\frac{d\Omega''}{du}+\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega''}{ds}=$$

$$\frac{9u^2\sigma}{8\pi D'^3 b}\cdot\frac{2C-B-A}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos 0 \qquad [-1+\tfrac{3}{2}\sin^2\omega'+ss(4-6\sin^2\omega')]\\ \cos(v+\varphi')\,[\sin\omega'\cos\omega'(8s-2s^3)]\\ \cos(2v+2\varphi')\,[\sin^2\omega'(-\tfrac{3}{2}+ss)]\end{array}\right\}$$

$$+\frac{9u^2\sigma(3-12ss)}{32\pi D'^3 b}\cdot\frac{B-A}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\Big(\cos 2\theta'(\sin^2\omega')\Big)$$

$$+\frac{9u^2\sigma(3-2ss)}{32\pi D'^3 b}\cdot\frac{B-A}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\cos(2v+2\varphi'+2\theta')\,(\tfrac{1}{2}-\cos\omega'+\tfrac{1}{2}\cos^2\omega')\\ \cos(2v+2\varphi'-2\theta')\,(\tfrac{1}{2}+\cos\omega'+\tfrac{1}{2}\cos^2\omega')\end{array}\right\}$$

$$+\frac{9u^2\sigma(4s-ss)}{16\pi D'^3 b}\cdot\frac{B-A}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\sin(v+\varphi'+2\theta')\,(-\tfrac{1}{2}\sin\omega'+\tfrac{1}{4}\sin 2\omega')\\ \sin(v+\varphi'-2\theta')\,(\tfrac{1}{2}\sin\omega'+\tfrac{1}{4}\sin 2\omega')\end{array}\right\}.$$

36. Nous sentons que l'on aurait pu abréger de beaucoup l'écriture de ces formules en les réduisant, d'abord, aux seuls termes qui, par la nature particulière des argumens, sont susceptibles d'augmenter par les intégrations; mais le choix de tels argumens suppose tacitement la discussion de tous les termes qui sont d'un même ordre avant les intégrations. A la vérité l'on peut, après avoir acquis une certaine habitude de cette analyse, prévoir, sans un développement complet, les termes qu'il convient de conserver; mais en opérant de cette manière l'on aurait épargné un calcul, qui dans le fond n'est pas difficile, aux dépens de la clarté et en laissant des doutes que la plupart des lecteurs n'auraient pu dissiper qu'en exécutant en détail les développemens supprimés.

La discussion des termes donnés par la figure de la Terre et de la Lune ne pourra être reprise qu'après que nous aurons développé la partie principale des inégalités de la Lune qui dépend de la force perturbatrice du Soleil. Alors on examinera de près l'influence des fonctions V'' et V', en ayant même égard aux petites modifications qui peuvent être produites par les termes de Ω'' affectés des coefficiens différentiels du second ordre de ces mêmes fonctions.

CHAPITRE SECOND.

EXPRESSIONS DES COORDONNÉES DU SOLEIL ET DE LA LUNE

RELATIVES AU MOUVEMENT ELLIPTIQUE

ET THÉORIE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

§ I.

Intégration des équations différentielles en supposant nulles les forces perturbatrices.

37. En faisant abstraction de toute force perturbatrice, l'on a $\Omega = 0$; ce qui réduit l'intégrale $2\int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv$ à une constante arbitraire positive que nous représenterons par h^2. Les équations (VIII) du n.° 23 se réduisent par conséquent à cette forme:

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s = 0; \qquad \frac{d^2 u}{dv^2} + u = \frac{\sigma}{h^2 (1+ss)^{\frac{3}{2}}}; \qquad dt = \frac{dv}{hu^2}.$$

Il est évident que l'intégrale de la première de ces équations est

$$s = \gamma \sin(v - \theta),$$

où γ et θ désignent deux constantes arbitraires, telles que γ représente la tangente de l'inclinaison de l'orbite par rapport au plan fixe, et θ la longitude du nœud ascendant.

L'équation en u est un cas particulier de l'équation $\frac{d^2 u}{dv^2} + i^2 u = R$, dans laquelle i désigne un coefficient constant, et R une fonction explicite de v. Or l'on sait que l'intégrale complète de cette équation est

$$u = A\cos(iv - \varpi) + \frac{\sin iv}{i}\int R \cos iv \cdot dv - \frac{\cos iv}{i}\int R \sin iv \cdot dv;$$

A et ϖ désignant deux constantes arbitraires.

Donc, dans le cas dont il s'agit, nous aurons

$$u = A\cos(v-\varpi) + \frac{\sigma}{h^2}\sin v\int\frac{\cos v}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}dv - \frac{\sigma}{h^2}\cos v\int\frac{\sin v}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}dv.$$

Maintenant pour avoir la valeur de ces deux intégrales, il faut exprimer $\sin v$, $\cos v$ en fonction de s. Pour cela remarquons que l'on a $\frac{s}{\gamma} = \sin(v-\theta) = \sin v\cos\theta - \cos v\sin\theta$; $\frac{\sqrt{(\gamma^2-s^2)}}{\gamma} = \cos(v-\theta) = \cos v\cos\theta + \sin v\sin\theta$; d'où l'on tire

$$\cos v = \frac{\cos\theta}{\gamma}\sqrt{(\gamma^2-s^2)} - \frac{s}{\gamma}\sin\theta; \qquad \sin v = \frac{\sin\theta}{\gamma}\sqrt{(\gamma^2-s^2)} + \frac{s}{\gamma}\cos\theta.$$

Donc, en différentiant ces expressions, l'on aura

$$\sin v\cdot dv = \left(\frac{\sin\theta}{\gamma} + \frac{s\cdot\cos\theta}{\gamma\sqrt{(\gamma^2-s^2)}}\right)ds; \qquad \cos v\cdot dv = \left(\frac{\cos\theta}{\gamma} - \frac{s\cdot\sin\theta}{\gamma\sqrt{(\gamma^2-s^2)}}\right)ds;$$

ce qui change l'expression précédente de u en

$$u = A\cos(v-\varpi) + \frac{\sigma}{h^2\gamma^2}\left(s\cdot\int\frac{ds}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{(\gamma^2-s^2)}\int\frac{s\,ds}{(1+ss)\sqrt{(\gamma^2-s^2)}^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or l'on a

$$\int\frac{ds}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}; \qquad \int\frac{s\,ds}{(1+ss)\sqrt{(\gamma^2-s^2)}^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{(\gamma^2-s^2)}}{(1+\gamma\gamma)\sqrt{(1+ss)}}.$$

Donc la valeur de u se réduit à

$$u = A\cos(v-\varpi) + \frac{\sigma}{h^2}\cdot\frac{\sqrt{(1+ss)}}{1+\gamma\gamma}.$$

Pour simplifier l'écriture de cette formule, l'on peut introduire une nouvelle constante arbitraire e, en posant $A = \frac{\sigma e}{h^2(1+\gamma\gamma)}$, ce qui donne

$$u = \frac{\sigma}{h^2(1+\gamma\gamma)}\left(\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)\right).$$

Cette expression de u est remarquable par sa forme; quoiqu'elle soit une conséquence immédiate de la théorie du mouvement elliptique, il paraît qu'aucun auteur ne l'ait publiée avant Lagrange, qui l'a donnée en 1762 (Voyez tome III des Anciens Mémoires de l'Académie de Turin, page 323).

38. Si l'on voulait avoir cette valeur de u exprimée par une suite de termes périodiques, il n'y aurait qu'à développer la fonction

$$\sqrt{1+ss} = \sqrt{[1+\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\gamma^2 \cos(2v-2\theta)]}$$

dans une suite de la forme

$$C + C'\cos(2v-2\theta) + C''\cos(4v-4\theta) + \text{etc.}$$

Pour donner aux coefficiens C, C', C'', etc. une forme régulière, faisons $\frac{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}-1}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}+1} = x$, ce qui donne

$$\sqrt{1+ss} = \frac{1+\sqrt{(1+\gamma\gamma)}}{2}\sqrt{[1-2x\cos(2v-2\theta)+x^2]}.$$

Maintenant si l'on suppose

$$\sqrt{[1-2x\cos(2v-2\theta)+x^2]} = P_{(0)} + 2P_{(1)}\cos(2v-2\theta) + 2P_{(2)}\cos(4v-4\theta) + \text{etc.},$$

l'on a en général, d'après les formules données par M. Legendre (Exercices de calcul intégral, tome II, page 274),

$$P_{(\lambda)} = -\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\ldots(2\lambda-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots\lambda}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}\left[1-\frac{1\cdot1\cdot(2\lambda-1)}{1\cdot(\lambda+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1\cdot1\cdot(2\lambda-1)(2\lambda+1)}{1\cdot2\cdot(\lambda+1)(\lambda+2)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1\cdot1\cdot3\cdot(2\lambda-1)(2\lambda+1)(2\lambda+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \text{etc.}\right],$$

et dans le cas de $\lambda = 0$

$$P_{(0)} = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot1}{1\cdot2}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{1\cdot1\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \text{etc.}$$

Ces coefficiens peuvent être exprimés par des intégrales définies en observant que l'on a en général

$$P_{(\lambda)} = \frac{1}{\pi}\int d\varphi \cos\lambda\varphi \sqrt{(1-2x\cos2\varphi+x^2)};$$

l'intégrale étant prise entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$.

L'on peut ramener ces intégrales à des transcendantes elliptiques, ainsi que M. Legendre l'a fait voir dans l'endroit cité. Dans le cas de $\lambda = 0$ cette transformation donne

$$P_{(0)} = \frac{4}{\pi}\int d\varphi \sqrt{(1-x^2\sin^2\varphi)} - (x^2-i)\frac{2}{\pi}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-x^2\sin^2\varphi)}},$$

en intégrant depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

En développant la valeur de x en série, l'on a

$$x = \frac{[\sqrt{(1+\gamma\gamma)}-1]^2}{\gamma^2} = \frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot\frac{\gamma\gamma}{2} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{\gamma\gamma}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\left(\frac{\gamma\gamma}{2}\right)^3 - \text{etc.},$$

et en substituant cette valeur dans celle de $P_{(0)}$, $P_{(1)}$, etc., et ordonnant les résultats, suivant les puissances de γ, l'on aura

$$\begin{aligned}\sqrt{1+ss} = 1 &+ \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \tfrac{3}{64}\gamma^4 + \text{etc.}\\ &+ \cos(2v-2\theta)\left(-\tfrac{1}{4}\gamma^2 + \tfrac{1}{16}\gamma^4 + \text{etc.}\right.\\ &+ \cos(4v-4\theta)\left(-\tfrac{1}{64}\gamma^4 + \text{etc.}\right.\\ &+ \text{etc.},\end{aligned}$$

et par conséquent

$$u = \frac{\sigma}{h^2(1+\gamma\gamma)}\left\{\begin{aligned}&1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \tfrac{3}{64}\gamma^4 + \text{etc.}\\ &+ \cos(v-\varpi)\,(e.)\\ &+ \cos(2v-2\theta)\left(-\tfrac{1}{4}\gamma^2 + \tfrac{1}{16}\gamma^4 + \text{etc.}\right.\\ &+ \cos(4v-4\theta)\left(-\tfrac{1}{64}\gamma^4 + \text{etc.}\right.\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

39. En substituant la valeur de u dans l'équation

$$dt = \frac{dv}{hu^2}, \quad \text{l'on a} \quad \frac{dt}{dv} = \frac{h^3(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2}\left(\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)\right)^{-2}.$$

Maintenant si l'on remplace $\sqrt{1+ss}$ par sa valeur en série, et que l'on suppose

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \tfrac{3}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \tfrac{15}{8}e^4 + \tfrac{3}{8}\gamma^4 - \tfrac{3}{2}e^2\gamma^2 + \tfrac{3}{4}e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta) + \text{etc.}\\
N &= -2e - 3e^3 + \tfrac{3}{2}e\gamma^2 + \text{etc.}\\
N' &= \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{5}{4}e^4 - \tfrac{3}{2}e^2\gamma^2 + \text{etc.}\\
N'' &= \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \tfrac{3}{2}e^2\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\gamma^4 + \text{etc.}\\
N''' &= -e^3 + \text{etc.}\\
N^{IV} &= -\tfrac{3}{4}e\gamma^2 + \text{etc.}\\
N^{V} &= +\tfrac{5}{8}e^4 + \text{etc.}\\
N^{VI} &= +\tfrac{1}{8}\gamma^4 + \text{etc.}\\
N^{VII} &= +\tfrac{3}{4}e^2\gamma^2 + \text{etc.},
\end{aligned}$$

l'on trouvera

$$\frac{dt}{dv} = \frac{h^3(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2}\left\{\begin{array}{l} A + N\cos(v-\varpi) + N'\cos(2v-2\varpi) + N''\cos(2v-2\theta) + N'''\cos(3v-3\varpi) \\ + N^{IV}\cos(3v-\varpi-2\theta) + N^{IV}\cos(v+\varpi-2\theta) + N^{V}\cos(4v-4\varpi) \\ + N^{VI}\cos(4v-4\theta) + N^{VII}\cos(4v-2\varpi-2\theta) \end{array}\right\},$$

où l'on a poussé l'approximation jusqu'aux quantités de la quatrième dimension inclusivement par rapport à e et γ. En intégrant le second membre de cette équation, et appelant f la constante arbitraire, l'on aura la valeur de $t+f$ par une fonction explicite de v développée en série infinie. Mais l'on peut aussi avoir la valeur de cette intégrale sous forme finie en employant deux angles auxiliaires.

40. A cet effet faisons

$$tang(v-\theta) = \frac{tang(v_{,}-\theta)}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}},$$

$v_{,}$ étant la nouvelle variable; cette équation donne

$$dv = \frac{\cos^2(v-\theta)}{\cos^2(v_{,}-\theta)}\cdot\frac{dv_{,}}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}}; \qquad \sqrt{1+ss} = \sqrt{[1+\gamma^2\sin^2(v-\theta)]} = \frac{\cos(v-\theta)}{\cos(v_{,}-\theta)}.$$

En écrivant $(v-\theta)-(\varpi-\theta)$ au lieu de $v-\varpi$, l'on aura

$$e\cos(v-\varpi) = e\cos(\varpi-\theta)\cos(v-\theta)\,[1+tang(\varpi-\theta)\,tang(v-\theta)];$$

et en substituant pour $tang(v-\theta)$ sa valeur, il viendra

$$e\cos(v-\varpi) = e\cos(\varpi-\theta)\cos(v-\theta)\left(1+\frac{tang(\varpi-\theta)\,tang(v_{,}-\theta)}{\sqrt{(1+ss)}}\right).$$

En supposant la quantité constante $\frac{tang(\varpi-\theta)}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}} = tang(\tau-\theta)$, et considérant τ comme une nouvelle constante arbitraire, l'équation précédente deviendra

$$e\cos(v-\varpi) = e\,\frac{\cos(\varpi-\theta)}{\cos(\tau-\theta)}\cdot\frac{\cos(v-\theta)}{\cos(v_{,}-\theta)}\cos(v_{,}-\tau).$$

Donc, en posant $\varepsilon = e\,\frac{\cos(\varpi-\theta)}{\cos(\tau-\theta)}$, l'on aura

$$e\cos(v-\varpi) = \varepsilon\,\frac{\cos(v_{,}-\tau)}{\cos(v_{,}-\theta)}\cos(v-\theta),$$

et $$\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi) = \frac{\cos(v-\theta)}{\cos(v_{,}-\theta)}\big(1+\varepsilon\cos(v_{,}-\tau)\big).$$

En divisant la valeur de dv, trouvée plus haut, par le carré de cette quantité, l'on obtient

$$\frac{dv}{[\sqrt{(1+ss)}+e\cos(v-\varpi)]^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}} \cdot \frac{dv_{,}}{[1+\varepsilon\cos(v_{,}-\tau)]^2}.$$

Donc, en substituant cette valeur dans celle de dt, et intégrant, l'on trouvera

$$t+f_{,} = \frac{h^3(1+\gamma\gamma)^{\frac{3}{2}}}{\sigma^2} \cdot \left(\frac{-\varepsilon\sin(v_{,}-\tau)}{(1-\varepsilon^2)[1+\varepsilon\cos(v_{,}-\tau)]} + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\int\frac{dv_{,}}{1+\varepsilon\cos(v_{,}-\tau)}\right),$$

$f_{,}$ désignant une constante arbitraire.

Or l'on sait que

$$\int\frac{dv_{,}}{1+\varepsilon\cos(v_{,}-\tau)} = \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}\, Arc.\sin\frac{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}\sin(v_{,}-\tau)}{1+\varepsilon\cos(v_{,}-\tau)}.$$

Donc, en faisant pour plus de simplicité

$$\sin\zeta = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}\sin(v_{,}-\tau)}{1+\varepsilon\cos(v_{,}-\tau)}, \quad \text{ou bien} \quad \tan\tfrac{1}{2}\zeta = \tan\frac{v_{,}-\tau}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

l'on aura

$$t+f_{,} = \frac{h^3(1+\gamma\gamma)^{\frac{3}{2}}}{\sigma^2(1-\varepsilon\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}(\zeta-\varepsilon\sin\zeta).$$

41. Ces deux équations donnent, comme on le voit, les relations connues entre le tems, l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie rapportée au plan même de l'orbite. En nommant α le demi-grand-axe de l'orbite, l'on doit avoir par la propriété du mouvement elliptique

$$\sqrt{\frac{\alpha^3}{\sigma}} = \frac{h^3(1+\gamma\gamma)^{\frac{3}{2}}}{\sigma^2(1-\varepsilon\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{ou bien} \quad \alpha = \frac{h^2(1+\gamma\gamma)}{\sigma(1-\varepsilon\varepsilon)}.$$

Pour éliminer ε de cette expression de α, reprenons les deux équations

$$\varepsilon = e\frac{\cos(\varpi-\theta)}{\cos(\tau-\theta)}; \qquad \tan(\tau-\theta) = \frac{\tan(\varpi-\theta)}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}},$$

et remarquons qu'elles donnent

$$\varepsilon = e\frac{\sqrt{[1+\gamma\gamma\cos^2(\varpi-\theta)]}}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}},$$

et que par conséquent l'on a

$$e = \varepsilon\sqrt{[1+\gamma^2\sin^2(\tau-\theta)]}, \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{h^2(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma[1+\gamma^2-e^2-e^2\gamma^2\cos^2(\theta-\varpi)]}.$$

Soit A le terme constant qui résulte du développement de la fonction $[\sqrt{1+ss}+e\cos(\nu-\varpi)]^{-2}$; il est clair que l'on a

$$A=\frac{1}{2\pi}\int\left(\sqrt{1+ss}+e\cos(\nu-\varpi)\right)^{-2}d\nu,$$

l'intégrale étant prise entre deux valeurs de ν qui diffèrent entre elles de 360°. Or, en exprimant cette intégrale par la variable $\nu_{,}$, l'on a

$$A=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1+\gamma\gamma)}}\int\frac{d\nu_{,}}{[1+\varepsilon\cos(\nu_{,}-\tau)]^2};$$

donc, en prenant pour limites de cette intégrale $\nu_{,}=\tau$; $\nu_{,}=\tau+360°$, il est clair que les limites correspondantes de ν différeront de 360°; ainsi l'on aura

$$A=\frac{1}{2\pi(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1+\gamma\gamma)}}\int_0^{2\pi}\frac{d\nu_{,}}{1+\varepsilon\cos(\nu_{,}-\tau)}.$$

Mais entre ces limites la valeur de l'intégrale est égale à $\frac{2\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}$; donc nous avons

$$A=\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+\gamma\gamma)}},$$

et en substituant par ε sa valeur trouvée plus haut, il viendra

$$A=\frac{1+\gamma\gamma}{[1+\gamma^2-e^2-e^2\gamma^2\cos^2(\varpi-\theta)]^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne pour le premier terme de la valeur de $t+f$ développée en série de sinus et cosinus des multiples de ν,

$$\frac{h^3(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2}A=\frac{h^3(1+\gamma\gamma)^3}{\sigma^2[1+\gamma^2-e^2-e^2\gamma^2\cos^2(\varpi-\theta)]^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\sigma}};$$

la formule du n.° 39 devient par-là

$$\frac{dt}{d\nu}=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\sigma}}\left\{\begin{array}{l}1+\cos(\nu-\varpi)(-2e+\tfrac{1}{2}e\gamma^2)\\ +\cos(2\nu-2\varpi)(\tfrac{3}{2}e^2-e^4-\tfrac{3}{4}e^2\gamma^2)\\ +\cos(2\nu-2\theta)(\tfrac{1}{2}\gamma^2-\tfrac{1}{4}\gamma^4+\tfrac{3}{4}e^2\gamma^2)\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

42. Avant de terminer ce paragraphe nous allons faire voir comment l'on pourrait prolonger indéfiniment la série qui exprime la valeur de t en fonction de ν, dans chacun des deux systèmes de constantes arbitraires qui ont été considérés dans l'intégration précédente.

Observons d'abord que, en intégrant l'équation

$$\sqrt{\frac{\sigma}{a^3}}\cdot dt = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)^{\frac{3}{2}} dv_,}{[1+\varepsilon\cos(v_,-\tau)]^2},$$

l'on obtient la série régulière

$$\int\sqrt{\frac{\sigma}{a^3}}\cdot dt = v_, - A_{(1)}\sin(v_,-\tau) + \tfrac{1}{2}A_{(2)}\sin 2(v_,-\tau) - \tfrac{1}{3}A_{(3)}\sin 3(v_,-\tau) + \text{etc.},$$

dans laquelle

$$A_{(m)} = \frac{2\varepsilon^m[1+m\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}]}{[1+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}]^m}.$$

Mais, en résolvant par la série connue l'équation

$$\tan(v_,-\theta) = \sqrt{1+\gamma\gamma}\,\tan(v-\theta),$$

l'on trouve que, en posant

$$B_{(2m)} = \left(\frac{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}-1}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}+1}\right)^m,$$

l'on a

$$v_, = v + B_{(2)}\sin 2(v-\theta) + \tfrac{1}{2}B_{(4)}\sin 4(v-\theta) + \tfrac{1}{3}B_{(6)}\sin 6(v-\theta) + \text{etc.}$$

Donc, en faisant pour plus de simplicité

$$q = B_{(2)}\sin 2(v-\theta) + \tfrac{1}{2}B_{(4)}\sin 4(v-\theta) + \tfrac{1}{3}B_{(6)}\sin 6(v-\theta) + \text{etc.},$$

$$F(v) = -A_{(1)}\sin(v-\tau) + \tfrac{1}{2}A_{(2)}\sin 2(v-\tau) - \tfrac{1}{3}A_{(3)}\sin 3(v-\tau) + \text{etc.},$$

nous avons

$$\int\sqrt{\frac{\sigma}{a^3}}\cdot dt = v + q + F(v+q);$$

ou bien, en développant $F(v+q)$ par la série de Taylor,

$$(1)\quad \int\sqrt{\frac{\sigma}{a^3}}\cdot dt = v + q + F(v) + q\cdot\frac{d\cdot F(v)}{dv} + \frac{q^2}{2}\cdot\frac{d^2\cdot F(v)}{dv^2} + \frac{q^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3\cdot F(v)}{dv^3} + \text{etc.}$$

43. Comme q est une quantité du second ordre par rapport à γ, et $F(v)$ une quantité du premier ordre par rapport à ε, il est clair que le produit $q\frac{d\cdot F(v)}{dv}$ est une quantité du troisième ordre. Il suit de là que depuis ce terme la série (1) est composée de quantités dont l'ordre augmente de trois en trois unités, ce qui la rend fort-convergente. Maintenant, pour introduire dans cette série les constantes arbitraires ϖ, e, remarquons que l'équation

$$\tan(\tau-\theta) = \frac{\tan(\varpi-\theta)}{\sqrt{(1+\gamma\gamma)}}$$

donne $\tau = \varpi - p$, en posant pour plus de simplicité

$$p = B_{(2)} \sin 2(\varpi - \theta) - \tfrac{1}{2} B_{(4)} \sin 4(\varpi - \theta) + \tfrac{1}{3} B_{(6)} \sin 6(\varpi - \theta) - \text{etc.}$$

Donc, si nous faisons

$$f(v) = - A_{(1)} \sin(v - \varpi) + \tfrac{1}{2} A_{(2)} \sin 2(v - \varpi) - \tfrac{1}{3} A_{(3)} \sin 3(v - \varpi) + \text{etc.},$$

l'on aura $F(v) = f(v + p)$, ou bien, en développant,

$$F(v) = f(v) + p \cdot \frac{d \cdot f(v)}{dv} + \frac{p^2}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot f(v)}{dv^2} + \frac{p^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 \cdot f(v)}{dv^3} + \text{etc.}$$

En substituant cette série dans l'équation (1), il viendra

$$(2) \int \sqrt{\frac{\sigma}{a^3}} \cdot dt = v + f(v) + q$$
$$+ \left((p+q) \frac{d \cdot f(v)}{dv} + \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \frac{d^2 \cdot f(v)}{dv^2} + \frac{1}{2 \cdot 3}(p^3 + q^3) \frac{d^3 \cdot f(v)}{dv^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ p\,q \left(\frac{d^2 \cdot f(v)}{dv^2} + \frac{p}{2} \cdot \frac{d^3 \cdot f(v)}{dv^3} + \frac{p^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^4 \cdot f(v)}{dv^4} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{p\,q^2}{2} \left(\frac{d^3 \cdot f(v)}{dv^3} + \frac{p}{2} \cdot \frac{d^4 \cdot f(v)}{dv^4} + \frac{p^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^5 \cdot f(v)}{dv^5} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{p\,q^3}{2 \cdot 3} \left(\frac{d^4 \cdot f(v)}{dv^4} + \frac{p}{2} \cdot \frac{d^5 \cdot f(v)}{dv^5} + \text{etc.} \right) + \text{etc.}$$

44. Il ne reste plus qu'à éliminer de cette équation la constante arbitraire ε, ce qui revient à substituer dans $A_{(m)}$ au lieu de ε sa valeur trouvée dans le n.° 41.

Mais pour effectuer cette substitution d'une manière plus régulière, il convient de développer $A_{(m)}$ suivant les puissances de ε. Pour cela remarquons que la valeur de $A_{(m)}$ peut être mise sous cette forme

$$A_{(m)} = \frac{2(1 - m)\varepsilon^m}{[1 + \sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon)}]^m} + \frac{2m\varepsilon^m}{[1 + \sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon)}]^{m-1}}.$$

Or l'on a en général

$$2^n(1 + \sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon})^{-n} = 1 + n\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4 + \frac{n(n+3)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^6 + \text{etc.},$$

ainsi il est clair que

$$A_{(m)} = \frac{(1-m)\varepsilon^m}{2^{m-1}}\left[1 + m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{m(m+3)}{1 \cdot 2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4 + \frac{m(m+3)(m+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^6 + \text{etc.}\right]$$
$$+ \frac{m\varepsilon^m}{2^{m-2}}\left[1 + (m-1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{1 \cdot 2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4 + \frac{(m-1)(m+2)(m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^6 + \text{etc}\right],$$

c'est-à-dire que l'on a pour $A_{(m)}$ une série de cette forme

$$A_{(m)} = C_{(1)}\varepsilon^{m} + C_{(2)}\varepsilon^{m+2} + C_{(3)}\varepsilon^{m+4} + \text{etc.}$$

Actuellement si l'on remarque que, en faisant $k = \frac{1 - \sqrt{(1+\gamma\gamma)}}{1 + \sqrt{(1+\gamma\gamma)}}$,

l'on a $\varepsilon = \frac{e[1+\sqrt{(1+\gamma\gamma)}]}{2\sqrt{(1+\gamma\gamma)}}\sqrt{[1 + k^2 - 2k\cos(2\varpi - 2\theta)]}$,

l'on pourra développer la valeur de ε^n par une série de la forme

$$\varepsilon^n = e^n\left(\frac{1+\sqrt{(1+\gamma\gamma)}}{2\sqrt{(1+\gamma\gamma)}}\right)^n \left\{\begin{array}{l} H_{(0)} - \frac{2k\cdot n}{2}H_{(1)}\cos(2\varpi - 2\theta) \\ \quad + \frac{2k^2\cdot n(n-2)}{2^2\cdot 1\cdot 2}H_{(2)}\cos(4\varpi - 4\theta) \\ \quad - \frac{2k^3\cdot n(n-2)(n-4)}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}H_{(3)}\cos(6\varpi - 6\theta) \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right\};$$

où l'on a

$$H_{(i)} = 1 - \frac{\frac{n}{2}\left(i - \frac{n}{2}\right)}{i+1}k^2 - \frac{\frac{n}{2}\left(1-\frac{n}{2}\right)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\left(i-\frac{n}{2}\right)\left(i+1-\frac{n}{2}\right)}{(i+1)(i+2)}k^4$$
$$- \frac{\frac{n}{2}\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(2-\frac{n}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\left(i-\frac{n}{2}\right)\left(i+1-\frac{n}{2}\right)\left(i+2-\frac{n}{2}\right)}{(i+1)(i+2)(i+3)}k^6$$
$$- \text{etc.}$$

(Voyez Exercices de calcul intégral par M. Legendre, tome II, page 276).

45. Actuellement si l'on désigne par $\Gamma(v)$ la fonction de v qui résulte du développement du second membre de l'équation (2), abstraction faite de la partie $v + q + f(v)$, l'on aura

$$\int\sqrt{\frac{\sigma}{a^3}}\cdot dt = v + q + f(v) + \Gamma(v).$$

Donc, en différentiant les deux membres de cette équation, nous aurons

$$\frac{dt}{dv} = \sqrt{\frac{a^3}{\sigma}} + \sqrt{\frac{a^3}{\sigma}}\cdot\left(\frac{dq}{dv} + \frac{d\cdot f(v)}{dv} + \frac{d\cdot\Gamma(v)}{dv}\right).$$

Mais nous avons d'un autre côté

$$\frac{dt}{dv} = \frac{h^3(1+\gamma^2)^2}{\sigma^2}\left(\sqrt{1+ss} + e\cos(v - \varpi)\right)^{-2}.$$

Donc, en égalant ces deux expressions, l'on obtiendra le développement de la fonction $[\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)]^{-2}$ par une série susceptible d'être continuée indéfiniment.

§ 2.

Coordonnées du Soleil dans l'ellipse fixe et dans l'ellipse mobile.

46. Les coordonnées que l'on considère ordinairement dans la théorie du Soleil, sont données en fonction du tems et dans un système de constantes arbitraires qui lui est propre. Ainsi il est nécessaire d'en déduire les valeurs des coordonnées sous la forme la plus convénable pour les employer dans la théorie de la Lune.

L'on sait que la perturbation du Soleil est composée de deux parties : la première peut être toujours représentée par les variations séculaires des élémens de l'orbite elliptique ; la seconde s'exprime ordinairement par une suite de termes périodiques dépendans de la configuration des planètes. Dans ce paragraphe il ne sera question que de la première partie, qui par sa nature ne pourrait pas être négligée, même dans une première approximation.

Considérons d'abord le mouvement du Soleil dans une orbite elliptique immobile ; alors les valeurs de s et u trouvées dans le paragraphe précédent donnent pour s' et u' deux expressions de cette forme

$$(1) \ldots\ldots\ldots s' = \gamma' \sin(v' - \theta') ;$$

$$u' = \frac{\sigma'}{h'^2(1+\gamma'\gamma')}\left(\sqrt{1+s's'} + e' \cos(v' - \varpi')\right),$$

où σ' représente la somme $M' + M''$ des masses du Soleil et de la Lune.

En désignant par α' le demi-grand-axe de l'orbite, les formules du n.° 41 donnent

$$\alpha' = \frac{h'^2(1+\gamma'\gamma')}{\sigma'(1-\varepsilon'\varepsilon')}, \qquad e' = \varepsilon' \sqrt{[1+\gamma'^2 \sin^2(\tau' - \theta')]}.$$

Donc, en éliminant h' et e', l'expression de u' deviendra

$$u' = \frac{1}{a'(1-\varepsilon'\varepsilon')}\left(\sqrt{1+s's'} + \varepsilon'\sqrt{1+\gamma'^2 \sin^2(\tau'-\theta')}\cos(v' - \varpi')\right).$$

L'équation $\tang(\varpi' - \theta') = \sqrt{1+\gamma'\gamma'}\tang(\tau' - \theta')$, que l'on déduit de celle du n.° 40, donne par la série connue

$$v' - \varpi' = v' - \tau' - x' \sin(2\tau' - 2\theta') - \tfrac{1}{2} x'^2 \sin(4\tau' - 4\theta') + \text{etc.},$$

où l'on a fait $\quad x' = \dfrac{\sqrt{(1+\gamma'\gamma')} - 1}{\sqrt{(1+\gamma'\gamma')} + 1}$.

Il suit de là que si l'on néglige les termes multipliés par γ'^4, l'on a

$$(2) \quad u' = \frac{1}{a'(1-\varepsilon'\varepsilon')} \left\{ \sqrt{1+s's'} + \varepsilon'(1+\tfrac{1}{4}\gamma'^2)\cos(v'-\tau') - \frac{\varepsilon'\gamma'^2}{4}\cos(v'+\tau'-2\theta') \right\}.$$

47. La formule du n.° 40 nous donne

$$tang(v'_{,} - \theta') = \sqrt{1+\gamma'\gamma'}\, tang(v' - \theta'),$$

d'où l'on tire

$$v'_{,} = v' + x' \sin(2v' - 2\theta') + \tfrac{1}{2} x'^2 \sin(4v' - 4\theta') + \text{etc.};$$

mais par le même numéro nous avons

$$dt_{,} = \frac{h'^3(1+\gamma'\gamma')^{\frac{3}{2}}}{\sigma'^2} \cdot \frac{dv'_{,}}{[1+\varepsilon'\cos(v'_{,}-\tau')]^2} = \sqrt{\frac{a'^3}{\sigma'}} \cdot \frac{(1-\varepsilon'\varepsilon')^{\frac{3}{2}} \cdot dv'_{,}}{[1+\varepsilon'\cos(v'_{,}-\tau')]^2};$$

donc, en développant cette fonction et intégrant ensuite, l'on trouvera

$$n'(t+f') = v'_{,} - A'_{(1)}\sin(v'_{,} - \tau') + A'_{(2)}\sin(2v'_{,} - 2\tau') - A'_{(3)}\sin(3v'_{,} - 3\tau') + \text{etc.},$$

où l'on a désigné par f' la constante arbitraire ajoutée au tems t, et l'on a posé

$$n' = \sqrt{\frac{\sigma'}{a'^3}}, \qquad A'_{(m)} = \frac{2}{m}\varepsilon'^m \frac{1+m\sqrt{(1-\varepsilon'\varepsilon')}}{[1+\sqrt{(1-\varepsilon'\varepsilon')}]^m}.$$

Si l'on néglige les termes multipliés par γ'^4, l'on a

$$x' = \tfrac{1}{4}\gamma'\gamma' \qquad \text{et} \qquad v'_{,} = v' + \frac{\gamma'\gamma'}{4}\sin(2v' - 2\theta');$$

donc, en substituant ces valeurs, il viendra

$$n'(t+f') = v' - A_{(1)}\sin(v' - \tau') + A_{(2)}\sin(2v' - 2\tau') - A_{(3)}\sin(3v' - 3\tau') + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\gamma'\gamma'}{4}\sin(2v' - 2\theta')\,[1 - A_{(1)}\cos(v' - \tau') + 2A_{(2)}\cos(2v' - 2\tau') - \text{etc.}],$$

ou bien, en négligeant toujours les quantités multipliées par γ'^4,

et celles du cinquième ordre par rapport à γ' et ε',

$$n'(t+f') =$$

$$(3)\quad \begin{aligned} &v' - 2\varepsilon' sin(v'-\tau') + (\tfrac{3}{4}\varepsilon'^2 + \tfrac{1}{8}\varepsilon'^4) sin(2v'-2\tau') - (\tfrac{1}{3}\varepsilon'^3) sin(3v'-3\tau') \\ &+ \tfrac{5}{32}\varepsilon'^4 sin(4v'-4\tau') + \tfrac{1}{4}\gamma'^2 sin(2v'-2\theta') - \tfrac{1}{4}\varepsilon'\gamma'^2 sin(v'+\tau'-2\theta') \\ &- \tfrac{1}{4}e'\gamma'^2 sin(3v'-\tau'-2\theta') + \tfrac{3}{16}\gamma'^2\varepsilon'^2 sin(2\tau'-2\theta') + \tfrac{3}{16}\gamma'^2\varepsilon'^2 sin(4v'-2\tau'-2\theta'). \end{aligned}$$

48. Il est démontré que les variations séculaires qui peuvent affecter la distance moyenne a' et le moyen mouvement $n't$ sont d'un ordre supérieur à la seconde puissance des forces perturbatrices. Ainsi, pour passer de l'orbite fixe à l'orbite mobile, il suffit de substituer dans les formules (1), (2), (3), à la place de τ', θ', ε', γ', f', leurs valeurs modifiées par les variations séculaires.

Les formules propres à cet objet ont été trouvées par Lagrange et Laplace (Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin, années 1782-83, et la Mécanique céleste, tome I, livre II). Les variations de γ' et θ' sont données par celles des produits $\gamma' cos\,\theta'$ et $\gamma' sin\,\theta'$, dont les valeurs sont composées d'un nombre fini de termes que l'on peut représenter par les formules

$$\gamma' cos\,\theta' = \Sigma.N cos(it+\beta), \qquad \gamma' sin\,\theta' = \Sigma.N sin(it+\beta);$$

les coefficiens N, i, β variant d'un terme à l'autre.

Ces formules donnent

$$tang\,\theta' = \frac{\Sigma.N sin(it+\beta)}{\Sigma.N cos(it+\beta)};$$

$$\begin{aligned} \gamma'^2 &= [N cos(it+\beta) + N' cos(i't+\beta') + \text{etc.}]^2 + [N sin(it+\beta) + N' sin(i't+\beta') + \text{etc.}]^2 \\ &= \Sigma.N^2 + 2\Sigma.NN' cos[(i'-i)t + \beta' - \beta]; \end{aligned}$$

et en substituant ces mêmes valeurs de $\gamma' cos\,\theta'$, $\gamma' sin\,\theta'$ dans l'équation

$$s' = \gamma' cos\,\theta' sin v' - \gamma' sin\,\theta' cos v',$$

il est clair que l'on a

$$s' = \Sigma.N sin(v' - it - \beta).$$

Pour calculer les variations de ε' et τ', l'on a des équations de la forme

$$\varepsilon' cos\,\tau' = \Sigma.M cos(\iota t + \varkappa); \qquad \varepsilon' sin\,\tau' = \Sigma.M sin(\iota t + \varkappa);$$

lesquelles donnent

$$tang\,\tau' = \frac{\Sigma\cdot M\sin(\iota t + \varkappa)}{\Sigma\cdot M\cos(\iota t + \varkappa)},$$

$$\varepsilon'^2 = \Sigma\cdot M^2 + 2\Sigma\cdot MM'[\cos(\iota' - \iota)t + \varkappa' - \varkappa].$$

49. La seule inspection de cette expression démontre que la valeur de ε' a une limite; car il est évident que son carré demeure toujours plus petit que la quantité $(\Sigma\cdot M)^2$; la somme $\Sigma\cdot M$ étant formée en prenant tous ces coefficiens positivement; la même remarque s'applique à l'expression de γ'^2, de sorte que l'on peut affirmer que l'on a toujours

$$\varepsilon' < \Sigma\cdot M, \qquad \gamma' < \Sigma\cdot N,$$

pourvu que les sommes $\Sigma\cdot M$, $\Sigma\cdot N$ soient formées comme il vient d'être dit.

En examinant l'expression de $tang\,\tau'$ et celle analogue de $tang\,\theta'$, Lagrange a aussitôt découvert (Voyez Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1782, pages 235-238) qu'il serait assez facile de reconnaître si l'angle τ' peut avoir une limite, ou croître indéfiniment, dans le cas particulier où l'un des coefficiens M surpasserait la somme de tous les autres pris positivement. Mais en calculant ces coefficiens avec les valeurs les plus probables des masses des planètes, l'on trouve que cette circonstance est loin d'être vérifiée soit à l'égard de la Terre, soit à l'égard des planètes inférieures. Ainsi dans l'état actuel de la théorie des variations séculaires l'on ne saurait fixer ni les limites de τ' et θ' (en supposant qu'elles existent), ni le coefficient absolu de la première puissance du tems, qui devrait entrer dans l'expression rigoureuse de ces deux variables, en supposant leur mouvement progressif. La solution de cette question est intimement liée avec celle d'un problème d'analyse, dont Lagrange a senti et apprécié les difficultés, par ce qu'il en dit dans son Mémoire cité plus haut.

50. Cette difficulté disparaît lorsqu'il est question d'avoir seulement les coefficiens différentiels du premier ordre des élémens. Heureusement les intégrations que nous avons à exécuter sont telles que le résultat final n'exige que la connaissance de ces coefficiens. En effet,

considérons l'intégrale

$$x = B\int \varepsilon'^m \sin(kv + \beta - n\tau')dv,$$

B, k, β, m, n étant des quantités constantes. Cette forme comprend (comme l'on verra) tous les cas d'intégration qui peuvent se présenter dans la recherche des coordonnées de la Lune.

Pour avoir égard à la variabilité de ε' et τ', remarquons d'abord qu'en intégrant par parties, l'on obtient

$$\begin{aligned} x = &-\frac{B}{k}\varepsilon'^m \cos(kv + \beta - n\tau') \\ &+ \frac{B}{k}\int \cos(kv + \beta)\frac{d\cdot\varepsilon'^m \cos n\tau'}{dv}dv + \frac{B}{k}\int \sin(kv + \beta)\frac{d\cdot\varepsilon'^m \sin n\tau'}{dv}dv. \end{aligned}$$

Mais nous avons

$$\varepsilon'^m \cos n\tau' = \frac{\varepsilon'^{m-n}}{2}\left\{(\varepsilon'\cos\tau' + \sqrt{-1}\,\varepsilon'\sin\tau')^n + (\varepsilon'\cos\tau' - \sqrt{-1}\,\varepsilon'\sin\tau')^n\right\},$$
$$\varepsilon'^m \sin n\tau' = \frac{\varepsilon'^{m-n}}{2\sqrt{-1}}\left\{(\varepsilon'\cos\tau' + \sqrt{-1}\,\varepsilon'\sin\tau')^n - (\varepsilon'\cos\tau' - \sqrt{-1}\,\varepsilon'\sin\tau')^n\right\};$$

donc, en différentiant ces expressions, l'on aura un résultat qu'il est aisé de mettre sous cette forme

$$\begin{aligned} \frac{d\cdot\varepsilon'^m \cos n\tau'}{dv} = &(m-n)\frac{d\varepsilon'}{dv}\cdot\varepsilon'^{m-1}\cos n\tau' \\ &+ n\varepsilon'^{m-1}\cos(n-1)\tau'\cdot\frac{d\cdot\varepsilon'\cos\tau'}{dv} - n\varepsilon'^{m-1}\sin(n-1)\tau'\cdot\frac{d\cdot\varepsilon'\sin\tau'}{dv}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\cdot\varepsilon'^m \sin n\tau'}{dv} = &(m-n)\frac{d\varepsilon'}{dv}\cdot\varepsilon'^{m-1}\sin n\tau' \\ &+ n\varepsilon'^{m-1}\sin(n-1)\tau'\cdot\frac{d\cdot\varepsilon'\cos\tau'}{dv} + n\varepsilon'^{m-1}\cos(n-1)\tau'\cdot\frac{d\cdot\varepsilon'\sin\tau'}{dv}. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans celle de x, l'on trouvera

$$\begin{aligned} x = &-\frac{B}{k}\varepsilon'^m\cos(kv + \beta - n\tau') \\ &+ \frac{B}{k^2}(m-n)\int\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\Big(\cos n\tau'\,d\cdot\sin(kv+\beta) - \sin n\tau'\,d\cdot\cos(kv+\beta)\Big) \\ &+ \frac{Bn}{k}\int\varepsilon'^{m-1}\cos(n-1)\tau'\left(\cos(kv+\beta)\frac{d\cdot\varepsilon'\cos\tau'}{dv} + \sin(kv+\beta)\frac{d\cdot\varepsilon'\sin\tau'}{dv}\right)dv \\ &+ \frac{Bn}{k}\int\varepsilon'^{m-1}\sin(n-1)\tau'\left(\sin(kv+\beta)\frac{d\cdot\varepsilon'\cos\tau'}{dv} - \cos(kv+\beta)\frac{d\cdot\varepsilon'\sin\tau'}{dv}\right)dv. \end{aligned}$$

Or il est évident que, en prenant v pour la variable principale, et posant

$$\varepsilon' \cos \tau' = \Sigma \cdot M \cos(pv + q), \qquad \varepsilon' \sin \tau' = \Sigma \cdot M \sin(pv + q),$$

l'on a

$$\frac{d\cdot\varepsilon' \cos\tau'}{dv} = -\Sigma \cdot Mp \sin(pv + q), \qquad \frac{d\cdot\varepsilon' \sin\tau'}{dv} = \Sigma \cdot Mp \cos(pv + q);$$

donc, en substituant ces valeurs, l'on a

$$\begin{aligned}
x = &-\frac{B}{k}\varepsilon'^m \cos(kv + \beta - n\tau') \\
&+ \frac{B}{k^2}(m-n)\int \varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\Big(\cos n\tau' d\cdot\sin(kv+\beta) - \sin n\tau' d\cdot\cos(kv+\beta)\Big) \\
&- \frac{Bn}{k}\int \varepsilon'^{m-1}\cos(n-1)\tau' d\cdot\Sigma\frac{Mp}{k-p}\cos\big((k-p)v + \beta - q\big) \\
&- \frac{Bn}{k}\int \varepsilon'^{m-1}\sin(n-1)\tau' d\cdot\Sigma\frac{Mp}{k-p}\sin\big((k-p)v + \beta - q\big),
\end{aligned}$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
x = &-\frac{B}{k}\varepsilon'^m \cos(kv + \beta - n\tau') + \frac{B}{k^2}(m-n)\,\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin(kv + \beta - n\tau') \\
&- \frac{Bn}{k}\varepsilon'^{m-1}\cos(n-1)\tau'\,\Sigma\frac{Mp}{k-p}\cos\big((k-p)v + \beta - q\big) \\
&- \frac{Bn}{k}\varepsilon'^{m-1}\sin(n-1)\tau'\,\Sigma\frac{Mp}{k-p}\sin\big((k-p)v + \beta - q\big) \\
&- \frac{B(m-n)}{k^2}\int \sin(kv+\beta)\, d\cdot\Big\{\frac{d\varepsilon'}{dv}\varepsilon'^{m-1}\cos n\tau'\Big\} \\
&+ \frac{B(m-n)}{k^2}\int \cos(kv+\beta)\, d\cdot\Big\{\frac{d\varepsilon'}{dv}\varepsilon'^{m-1}\sin n\tau'\Big\} \\
&+ \frac{Bn}{k}\int \Sigma\frac{Mp}{k-p}\cos\big((k-p)v + \beta - q\big)\, d\cdot\varepsilon'^{m-1}\cos(n-1)\tau' \\
&+ \frac{Bn}{k}\int \Sigma\frac{Mp}{k-p}\sin\big((k-p)v + \beta - q\big)\, d\cdot\varepsilon'^{m-1}\sin(n-1)\tau'.
\end{aligned}$$

51. Les coefficiens désignés par p sont en général très-petits par rapport à ceux désignés par k, de sorte que l'on peut négliger les termes de l'ordre du carré de p, et par conséquent les termes de l'ordre des produits $p\frac{d\varepsilon'}{dv}$, $p\frac{d\tau'}{dv}$. Par la même raison il est permis

de poser $\frac{p}{k-p} = \frac{p}{k}$. Il suit de là que la valeur précédente de x peut être réduite à celle-ci

$$x = -\frac{B}{k}\varepsilon'^{m}\cos(kv+\beta-n\tau') + \frac{B}{k^2}(m-n)\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin(kv+\beta-n\tau')$$
$$-\frac{Bn}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\cos(n-1)\tau'\Sigma\cdot Mp\cos\big((k-p)v+\beta-q\big)$$
$$-\frac{Bn}{k}\varepsilon'^{m-1}\sin(n-1)\tau'\Sigma\cdot Mp\sin\big((k-p)v+\beta-q\big).$$

En éliminant de cette expression les sommes désignées par Σ au moyen des deux équations

$$\frac{d\cdot\varepsilon'\cos\tau'}{dv} = -\Sigma\cdot Mp\sin(pv+q), \qquad \frac{d\cdot\varepsilon'\sin\tau'}{dv} = \Sigma\cdot Mp\cos(pv+q),$$

il viendra

$$x = -\frac{B}{k}\varepsilon'^{m}\cos(kv+\beta-n\tau') + \frac{B}{k^2}(m-n)\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin(kv+\beta-n\tau')$$
$$-\frac{Bn}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\cos(n-1)\tau'\left\{\cos(kv+\beta)\frac{d\cdot\varepsilon'\sin\tau'}{dv} - \sin(kv+\beta)\frac{d\cdot\varepsilon'\cos\tau'}{dv}\right\}$$
$$-\frac{Bn}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\sin(n-1)\tau'\left\{\cos(kv+\beta)\frac{d\cdot\varepsilon'\cos\tau'}{dv} + \sin(kv+\beta)\frac{d\cdot\varepsilon'\sin\tau'}{dv}\right\}.$$

Mais nous avons

$$\frac{d\cdot\varepsilon'\sin\tau'}{dv} = \frac{d\varepsilon'}{dv}\sin\tau' + \frac{d\tau'}{dv}\varepsilon'\cos\tau',$$
$$\frac{d\cdot\varepsilon'\cos\tau'}{dv} = \frac{d\varepsilon'}{dv}\cos\tau' - \frac{d\tau'}{dv}\varepsilon'\sin\tau';$$

partant, en substituant ces valeurs, l'on verra que le terme $-\frac{Bn}{k^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin(kv+\beta-n\tau')$ se détruit, et que l'on a

$$x = -\frac{B}{k}\varepsilon'^{m}\cos(kv+\beta-n\tau') - \frac{Bn}{k^2}\cdot\frac{d\tau'}{dv}\varepsilon'^{m}\cos(kv+\beta-n\tau').$$

En négligeant le carré de $\frac{d\tau'}{dv}$ et de $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, l'on peut réunir ces trois termes en un seul, et poser

$$x = -\frac{B\varepsilon'^{m}}{k-n\frac{d\tau'}{dv}}\cos\left\{kv+\beta-n\tau'+\left(k-n\frac{d\tau'}{dv}\right)\frac{m}{\varepsilon'k^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\right\}.$$

Telle est la formule remarquable qui montre l'influence des inégalités séculaires de l'orbite du Soleil dans les intégrations qui doivent déterminer les inégalités périodiques de la Lune; car il est presque superflu d'ajouter que l'on peut en dire autant à l'égard de γ' et θ'.

52. Nous avons appelé n' le moyen mouvement annuel du Soleil; si actuellement nous désignos par $c'v'$ le mouvement annuel de l'anomalie, c' sera une quantité variable donnée par l'équation

$$\frac{d\tau'}{dt} = (1 - c')\,n';$$

l'on aura donc $\tau' = \int (1 - c')\,n'\,dt$, et en intégrant par parties,

$$\tau' = (1 - c')\,n't + n'\int t\,dc'.$$

Pour éliminer la variable t de cette expression, il n'y a qu'à substituer sa valeur donnée par l'équation (3); mais la petitesse du coefficient $1 - c'$ permet ici de prendre $n'(t + f') = v'$, ce qui donne

$$\tau' = (1 - c')(v' - n'f') + n'\int t\,dc',$$

ou bien $\tau' = (1 - c')v' + \varkappa'$, en faisant $\varkappa' = n'\int t\,dc' - (1 - c')n'f'$.

En différentiant cette valeur par rapport à v, l'on doit avoir

$$\frac{d\tau'}{dv} = \frac{d\tau'}{dt}\cdot\frac{dt}{dv} = (1 - c')\,n'\,\frac{dt}{dv}.$$

Nous verrons par la suite que l'on a $\frac{dt}{dv} = \frac{1}{n} +$ des termes séculaires provenans de la variation de ε'; mais ces derniers se trouvant ici multipliés par $1 - c'$, il suffit de prendre $\frac{dt}{dv} = \frac{1}{n}$, et par conséquent

$$\frac{d\tau'}{dv} = (1 - c')\frac{n'}{n}.$$

En considérant sous un point de vue tout-à-fait semblable la variable θ' qui représente la longitude du nœud, l'on en conclura qu'en nommant $g'v'$ le mouvement annuel de l'argument de latitude, l'on a

$$\theta' = (1 - g')(v' - n'f') + n'\int t\,dg',$$

ou bien $\theta' = (1 - g')v' + \eta'$, en faisant $\eta' = n'\int t\,dg' - (1 - g')n'f'$.

53. Il nous reste à chercher l'expression de la variation de f'; pour cela il faudra employer la formule rapportée à la page 15 du troisième volume de la Mécanique céleste. D'après cette formule, si l'on désigne par m'', m''', etc. les masses des planètes; par ε'', ε''', etc. leurs excentricités, et par τ'', τ''', etc. les longitudes de leurs périhélies, l'on aura la variation différentielle de f' par une équation de cette forme

$$\frac{df'}{dt} = \frac{\varepsilon'^2}{8} \Sigma \frac{m''}{M'} H + \frac{1}{4} \Sigma \frac{m''}{M'} H' \varepsilon''^2 - \frac{\varepsilon'}{8} \Sigma \frac{m''}{M'} H'' \varepsilon'' \cos(\tau'' - \tau');$$

où H, H', H'' sont des fonctions du rapport du demi-grand-axe de la Terre au demi-grand-axe des planètes m'', m''', etc. L'on obtient ces fonctions en calculant les deux premiers termes du développement de la fonction

$$\frac{\alpha'}{\alpha''^2}\cos\varphi - (\alpha'^2 - 2\alpha'\alpha''\cos\varphi + \alpha''^2)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}A^{(0)} + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + \text{etc.},$$

lesquels en série sont

$$\frac{1}{2}A^{(0)} = -\frac{1}{\alpha''}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^2 + \frac{1^2.3^2}{1^2.2^2.2^4}\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{1^2.2^2.3^2.2^6}\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^6 + \text{etc.}\right];$$

$$A^{(1)} = -\frac{1}{\alpha''}\left[\frac{1.3}{2^2.1.2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3 + \frac{1.3^2.5}{2^4.1^2.2^2.3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^5 + \frac{1.3^2.5^2.7}{2^6.1^2.2^2.3^2.4}\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^7 + \text{etc.}\right],$$

et prenant ensuite

$$H = 2\alpha'^2 \frac{dA^{(0)}}{d\alpha'} + 7\alpha'^3 \frac{d^2A^{(0)}}{d\alpha'^2} + 2\alpha'^4 \frac{d^3A^{(0)}}{d\alpha'^3};$$

$$H' = 2\alpha'^2 \frac{dA^{(0)}}{d\alpha'} + 4\alpha'^3 \frac{d^2A^{(0)}}{d\alpha'^2} + \alpha'^4 \frac{d^3A^{(0)}}{d\alpha'^3};$$

$$H'' = 2\alpha' A^{(1)} - 2\alpha'^2 \frac{dA^{(1)}}{d\alpha'} + 15\alpha'^3 \frac{d^2A^{(1)}}{d\alpha'^2} + 4\alpha'^4 \frac{d^3A^{(1)}}{d\alpha'^3}.$$

54. Lagrange a publié le premier cette formule dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1784. Il a vu qu'elle ne pouvait donner rien de sensible dans la théorie des planètes; mais il lui est échappé qu'en appliquant cette même formule à la théorie de la Lune, il en résultait l'équation séculaire due à la variation de l'excentricité de l'orbite de la Terre, telle que M. de Laplace l'a donnée le premier (Voyez les Mémoires de l'Académie de Paris, année 1786).

Pour mieux saisir ce rapprochement, il suffit de remarquer que le terme $\frac{1}{4}\Sigma\frac{m''}{M'}H'\varepsilon''^2$ renferme la série

$$-\frac{m''}{M'}\varepsilon''^2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{a'}{a''}\right)^3+\frac{63}{16}\left(\frac{a'}{a''}\right)^5+\text{etc.}\right],$$

dont le premier terme $-\frac{3}{2}\cdot\frac{m''}{M'}\left(\frac{a'}{a''}\right)^3\varepsilon''^2$ se change en $-\frac{3}{2}\cdot\frac{M'}{M''}\left(\frac{a}{a'}\right)^3\varepsilon'^2$, lorsque l'on applique cette même formule à la Lune troublée par le Soleil.

55. Avant de substituer les valeurs trouvées plus haut de τ' et θ' dans les formules (2) et (3), remarquons que l'on peut remplacer le radical $\sqrt{(1+s's')}$ par son développement $1+\frac{1}{4}\gamma'^2-\frac{1}{4}\gamma'^2\cos(2v'-2\theta')$ que l'on obtient en négligeant les termes multipliés par γ'^4; cela posé, l'on trouvera que les formules (1), (2), (3) peuvent être transformées dans les suivantes, où $\varkappa'$ et η' désignent les époques du nœud et du périhélie qui, quoique affectées de petits termes variables, doivent (par ce qui précède) être traitées dans les intégrations comme quantités constantes,

$$(\text{IX})\left\{\begin{array}{l}
s' = \gamma'\sin(v'-\theta');\\[2ex]
u' = \dfrac{1}{a'(1-\varepsilon'\varepsilon')}\left\{\begin{array}{ll}
\cos 0 & (1+\frac{1}{4}\gamma'^2)\\
\cos(c'v'-\varkappa') & (\varepsilon'+\frac{1}{4}\varepsilon'\gamma'^2)\\
\cos(2g'v'-2\eta') & (-\frac{1}{4}\gamma'^2)\\
\cos((2g'-c')v'-2\eta'+\varkappa') & (-\frac{1}{4}\varepsilon'\gamma'^2)
\end{array}\right\};\\[2ex]
\begin{array}{lll}
n'(t+f) = v' + & \sin(c'v'-\varkappa') & (-2\varepsilon')\\
& \sin(2c'v'-2\varkappa') & (+\frac{3}{4}\varepsilon'^2+\frac{1}{8}\varepsilon'^4)\\
& \sin(3c'v'-3\varkappa') & (-\frac{1}{3}\varepsilon'^3)\\
& \sin(4c'v'-4\varkappa') & (+\frac{5}{32}\varepsilon'^4)\\
& \sin(2g'v'-2\eta') & (+\frac{1}{4}\gamma'^2)\\
& \sin((2g'-c')v'-2\eta'+\varkappa') & (-\frac{1}{4}\varepsilon'\gamma'^2)\\
& \sin((2g'+c')v'-2\eta'-\varkappa') & (-\frac{1}{4}\varepsilon'\gamma'^2)\\
& \sin((2g'-2c')v'-2\eta'+2\varkappa') & (+\frac{3}{16}\varepsilon'^2\gamma'^2)\\
& \sin((2g'+2c')v'-2\eta'-2\varkappa') & (+\frac{3}{16}\varepsilon'^2\gamma'^2).
\end{array}
\end{array}\right.$$

Ces formules deviennent beaucoup plus simples en négligeant tous les termes périodiques multipliés par γ'^2, lesquels ne peuvent produire que des inégalités d'une extrême petitesse dans la théorie de la Lune; mais il importe de conserver dans cette même théorie ceux qui ne sont pas affectés de *sinus* ou de *cosinus* ; car on verra par la suite que ces termes peuvent augmenter par l'intégration, et donner naissance à des équations séculaires de la même espèce que celles provenantes de la variabilité de l'excentricité ε'.

§ 3.

Variation différentielle des six constantes arbitraires h^2, γ, θ, e, ϖ, f *de l'orbite de la Lune.*

56. La solution des trois équations différentielles que nous avons exposée dans le § 1 de ce chapitre, se rapportant au mouvement de la Lune dans l'ellipse immobile, ne peut pas être employée comme une première approximation, puisque les termes dus aux forces perturbatrices ajoutent aux quantités désignées par θ et ϖ des termes qui croissent progressivement avec le tems. Cette considération nous force de revenir aux équations différentielles (VIII) du n.° 23, qui renferment l'effet des forces perturbatrices, afin d'en déduire, par la méthode de la variation des constantes arbitraires, l'existence de ces mouvemens progressifs, et reconnaître en même tems les modifications qu'il faut faire subir aux résultats obtenus dans le paragraphe cité, pour pouvoir les employer dans les approximations suivantes.

Quoique les seconds membres des équations (VIII) renferment, outre les coordonnées de la Lune, les coordonnées s', u', v' du Soleil, l'on peut imaginer ces dernières variables traduites en fonction de v. En effet, soit $t = F(v')$ la valeur de t donnée par la troisième des équations (IX) du paragraphe précédent, et $t = \varphi(v)$ la valeur de t qui doit résulter de l'intégration des équations (VIII) par une suite d'approximations successives; en égalant ces deux valeurs de t, l'on aura une équation propre à fournir la valeur de v' en fonction de v.

57. Les formules trouvées dans ces derniers tems, d'après le principe de la variation des constantes arbitraires, ne pourraient être appliquées au système de constantes adoptées dans la solution exposée dans le premier paragraphe de ce chapitre, sans éliminer le tems et introduire ces mêmes constantes à la place de celles communément employées dans la théorie des Planètes. Mais les relations qui existent entre ces deux systèmes sont tellement compliquées, qu'il est beaucoup plus simple de chercher immédiatement la variation des constantes arbitraires h^2, γ, θ, e, ϖ, f, en partant des équations différentielles du second ordre. En opérant ainsi nous parviendrons à des formules différentes de celles qui donnent ces variations exprimées par les différentielles partielles d'une même fonction prises par rapport aux constantes arbitraires, et multipliées par des fonctions de ces mêmes constantes seulement. Mais pour le but que nous avons en vue, il nous a paru plus avantageux de renoncer à l'élégance de ces formules, et d'en chercher d'autres, qui ont un contact plus immédiat avec les équations différentielles qu'il s'agit effectivement d'intégrer en considérant les puissances supérieures des forces perturbatrices.

58. Retenons pour s, u, t les fonctions de v trouvées dans le paragraphe cité, et supposons que l'on y remplace chacune des constantes arbitraires h^2, γ, θ, e, ϖ, f par une fonction de la variable v déterminée de manière que après avoir opéré ce changement, les nouvelles expressions de u, s, t qui en résultent, aient la propriété,

1.° De donner pour t, $\frac{dt}{dv}$, $\frac{ds}{dv}$, $\frac{du}{dv}$ des fonctions de v d'une forme identique à celle que l'on aurait en substituant au lieu des constantes arbitraires les fonctions variables qui les remplacent dans les expressions de t, $\frac{dt}{dv}$, $\frac{ds}{dv}$, $\frac{du}{dv}$ formées en supposant constantes les quantités h^2, γ, θ, e, ϖ, f;

2.° De satisfaire aux équations différentielles du second ordre qui déterminent les valeurs de $\frac{d^2s}{dv^2}$, $\frac{d^2u}{dv^2}$.

En posant $\frac{d\Omega}{u^2dv} = \Pi'''$ et en désignant, comme dans le n.° 37, par h^2 la constante ajoutée à l'intégrale $2\int \frac{d\Omega}{u^2dv}dv$, la troisième des équations (VIII) devient

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{u^2}\left(h^2 + 2\int \Pi''' dv\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour satisfaire à cette équation par une expression de la forme $\frac{dt}{dv} = \frac{1}{hu^2}$, il faut changer dans cette dernière, h, en $\sqrt{h^2 + 2\int \Pi''' dv}$, ou, ce qui revient au même, il faut prendre pour h^2 une fonction de v telle qu'étant différentiée, l'on ait

$$\frac{d \cdot h^2}{dv} = 2\Pi'''.$$

59. En différentiant l'équation $s = \gamma \sin(v - \theta)$, et faisant tout varier, l'on a

$$\frac{ds}{dv} = \gamma \cos(v - \theta) + \frac{d\gamma}{dv} \sin(v - \theta) - \frac{d\theta}{dv} \gamma \cos(v - \theta);$$

donc, pour réduire cette expression à la forme $\frac{ds}{dv} = \gamma \cos(v - \theta)$, il faudra poser l'équation

$$\frac{d\gamma}{dv} \sin(v - \theta) - \frac{d\theta}{dv} \gamma \cos(v - \theta) = 0.$$

Alors, en différentiant la valeur de $\frac{ds}{dv}$, l'on a

$$\frac{d^2s}{dv^2} = -\gamma \sin(v - \theta) + \frac{d\gamma}{dv} \cos(v - \theta) + \gamma \frac{d\theta}{dv} \sin(v - \theta);$$

mais $s = \gamma \sin(v - \theta)$, partant

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s = \frac{d\gamma}{dv} \cos(v - \theta) + \gamma \frac{d\theta}{dv} \sin(v - \theta).$$

En substituant dans cette équation pour $\frac{d\gamma}{dv}$ sa valeur, il viendra

$$\frac{\gamma}{\sin(v - \theta)} \cdot \frac{d\theta}{dv} = \frac{d^2s}{dv^2} + s.$$

Or la première des équations (VIII), en y remplaçant l'intégrale $2\int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv$ par la fonction h^2, et en faisant

$$\Pi' = \frac{1}{h^2}\left(\frac{s}{u} \cdot \frac{d\Omega}{du} + \frac{1 + ss}{u^2} \cdot \frac{d\Omega}{ds} - \frac{ds}{dv} \Pi'''\right),$$

donne

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s = \Pi'.$$

On aura donc

$$\frac{\gamma}{\sin(v - \theta)} \cdot \frac{d\theta}{dv} = \Pi';$$

d'où l'on tire

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = \Pi' \sin(v - \theta), \qquad \frac{d\gamma}{dv} = \Pi' \cos(v - \theta).$$

60. En posant pour plus de simplicité $k = \frac{h^2(1+\gamma\gamma)}{\sigma}$, la valeur de u du n.° 37 donnera

$$ku = \sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi);$$

donc, en différentiant cette équation et faisant, d'après les conditions établies,

$$\frac{de}{dv}\cos(v-\varpi) + e\frac{d\varpi}{dv}\sin(v-\varpi) = u\frac{dk}{dv},$$

l'on aura

$$k\frac{du}{dv} = \frac{ds}{dv}\cdot\frac{s}{\sqrt{(1+ss)}} - e\sin(v-\varpi).$$

Maintenant, si l'on différentie cette dernière équation, l'on obtient

$$k\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{du}{dv}\cdot\frac{dk}{dv} =$$

$$\frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{d^2s}{dv^2} + \frac{1}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{ds^2}{dv^2} - \frac{de}{dv}\sin(v-\varpi) - e\cos(v-\varpi) + e\frac{d\varpi}{dv}\cos(v-\varpi).$$

L'expression de u posée plus haut donne

$$e\cos(v-\varpi) = ku - \sqrt{1+ss};$$

donc, en substituant cette valeur, l'on aura

$$e\frac{d\varpi}{dv}\cos(v-\varpi) - \frac{de}{dv}\sin(v-\varpi) =$$

$$k\left(\frac{d^2u}{dv^2} + u\right) + \frac{dk}{dv}\cdot\frac{du}{dv} - \sqrt{1+ss} - \frac{1}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 - \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{d^2s}{dv^2};$$

mais l'on a $ss + \left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \gamma^2$, et

$$\sqrt{1+ss} + \frac{1}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 + \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{d^2s}{dv^2} = \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\left(\frac{d^2s}{dv^2} + s\right) + \frac{1+\gamma\gamma}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}};$$

donc, en substituant, l'on aura

$$\frac{de}{dv}\sin(v-\varpi) - e\frac{d\varpi}{dv}\cos(v-\varpi) =$$

$$\frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\left(\frac{d^2s}{dv^2} + s\right) - \frac{dk}{dv}\cdot\frac{du}{dv} - k\left(\frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{\sigma}{h^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

En différentiant la valeur de k, l'on trouve

$$\frac{dk}{dv} = \frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\cdot\frac{d.h^2}{dv} + 2\,\frac{h^2\gamma}{\sigma}\cdot\frac{d\gamma}{dv};$$

et en substituant la valeur de $\frac{d.h^2}{dv}$ et de $\frac{d\gamma}{dv}$, l'on aura

$$\frac{dk}{dv} = 2\,\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\,\Pi''' + 2\,\frac{h^2\gamma\,\Pi'}{\sigma}\cos(v-\theta).$$

En écrivant dans la seconde des équations, h^2 au lieu de $2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv$, et posant ensuite

$$\Pi'' = \frac{1}{h^2}\left(\frac{d\Omega}{du} + \frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega}{ds} - \frac{du}{dv}\Pi'''\right),$$

l'on aura

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{\sigma}{h^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} = \Pi''.$$

En substituant cette valeur et celle de $\frac{d^2s}{dv^2} + s = \Pi'$, les deux équations entre de et $d\varpi$ deviendront

$$\frac{de}{dv}\cos(v-\varpi) + e\frac{d\varpi}{dv}\sin(v-\varpi) = \left(\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)\right)\left(\frac{2\Pi'''}{h^2} + \frac{2\gamma\cos(v-\theta)}{1+\gamma\gamma}\Pi'\right),$$

$$\frac{de}{dv}\sin(v-\varpi) - e\frac{d\varpi}{dv}\cos(v-\varpi) = -\left(\frac{ds}{dv}\cdot\frac{s}{\sqrt{(1+ss)}} - e\sin(v-\varpi)\right)\left(\frac{2\Pi'''}{h^2} + \frac{2\gamma\cos(v-\theta)}{1+\gamma\gamma}\Pi'\right)$$
$$+ \frac{s\,\Pi'}{\sqrt{(1+ss)}} - k\,\Pi''.$$

De là l'on conclut les valeurs suivantes de $e\frac{d\varpi}{dv}$ et de $\frac{de}{dv}$:

$$e\frac{d\varpi}{dv} = \left(k\,\Pi'' - \frac{s\,\Pi'}{\sqrt{(1+ss)}}\right)\cos(v-\varpi)$$
$$+ \left(\sqrt{1+ss}\,\sin(v-\varpi) + \frac{ds}{dv}\cdot\frac{s\cdot\cos(v-\varpi)}{\sqrt{(1+ss)}}\right)\left(\frac{2\,\Pi'''}{h^2} + \frac{2\gamma\cos(v-\theta)}{1+\gamma\gamma}\Pi'\right),$$

$$\frac{de}{dv} = -\left(k\,\Pi'' - \frac{s\,\Pi'}{\sqrt{(1+ss)}}\right)\sin(v-\varpi)$$
$$+ \left(e+\sqrt{1+ss}\,\cos(v-\varpi) - \frac{ds}{dv}\cdot\frac{s\cdot\sin(v-\varpi)}{\sqrt{(1+ss)}}\right)\left(\frac{2\,\Pi'''}{h^2} + \frac{2\gamma\cos(v-\theta)}{1+\gamma\gamma}\Pi'\right).$$

61. Cela posé, si l'on fait pour plus de simplicité

$$Q = 2(1+ss)\frac{ds}{dv}\sin(v-\varpi) - \left(1+\gamma\gamma - 2\frac{ds^2}{dv^2}\right)s\cdot\cos(v-\varpi),$$

$$Q' = 2(1+ss)\frac{ds}{dv}\cos(v-\varpi) + \left(1+\gamma\gamma - 2\frac{ds^2}{dv^2}\right)s\cdot\sin(v-\varpi),$$

l'on aura

$$e\frac{d\varpi}{dv} = k\Pi''\cos(v-\varpi) + \frac{Q\Pi'}{(1+\gamma\gamma)\sqrt{(1+ss)}}$$
$$+ 2\frac{\Pi'''}{h^2}\left\{\sqrt{1+ss}\,\sin(v-\varpi) + \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv}\cos(v-\varpi)\right\},$$

$$\frac{de}{dv} = -k\Pi''\sin(v-\varpi) + \frac{Q'\Pi'}{(1+\gamma\gamma)\sqrt{(1+ss)}} + 2e\left(\frac{\Pi'''}{h^2} + \frac{\gamma\cos(v-\theta)}{1+\gamma\gamma}\Pi'\right)$$
$$+ 2\frac{\Pi'''}{h^2}\left\{\sqrt{1+ss}\,\cos(v-\varpi) - \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv}\sin(v-\varpi)\right\}.$$

Maintenant, si l'on suppose

$$\Omega_{(1)} = \frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega}{du} + \frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega}{ds}, \qquad \Omega_{(2)} = \frac{d\Omega}{du} + \frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega}{ds},$$

l'on a

$$\Pi' = \frac{\Omega_{(1)}}{h^2} - \frac{1}{h^2}\cdot\frac{ds}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}, \qquad \Pi'' = \frac{\Omega_{(2)}}{h^2} - \frac{1}{h^2}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv};$$

donc, en substituant ces valeurs, et posant pour abréger

$$P = -\left(k\frac{du}{dv} - \frac{2s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv}\right)\cos(v-\varpi) + 2\sqrt{1+ss}\,\sin(v-\varpi) - \frac{Q}{(1+\gamma\gamma)\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv},$$

$$P' = \left(k\frac{du}{dv} - \frac{2s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv}\right)\sin(v-\varpi) + 2\sqrt{1+ss}\,\cos(v-\varpi) - \frac{Q'}{(1+\gamma\gamma)\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv}$$
$$+ 2e - \frac{2e}{1+\gamma\gamma}\cdot\frac{ds^2}{dv^2},$$

il viendra

$$e\frac{d\varpi}{dv} = \frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\Omega_{(2)}\cos(v-\varpi) + \frac{Q\Omega_{(1)}}{h^2(1+\gamma\gamma)\sqrt{(1+ss)}} + \frac{P}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv},$$

$$\frac{de}{dv} = -\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\Omega_{(2)}\sin(v-\varpi) + \left(\frac{Q'}{\sqrt{(1+ss)}} + 2e\gamma\cos(v-\theta)\right)\frac{\Omega_{(1)}}{h^2(1+\gamma\gamma)} + \frac{P'}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}.$$

En substituant dans les expressions de P et P' pour $k\frac{du}{dv}$ sa valeur

$$k\frac{du}{dv}=-e\sin(v-\varpi)+\frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv},$$

l'on trouvera

$$P=\frac{e}{2}\sin(2v-2\varpi)+2\left(1-\frac{1}{1+\gamma\gamma}\cdot\frac{ds^2}{dv^2}\right)\left(\sqrt{1+ss}\,\sin(v-\varpi)+\frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv}\cos(v-\varpi)\right),$$

$$P'=-\frac{e}{2}\cos(2v-2\varpi)+2\left(1-\frac{1}{1+\gamma\gamma}\cdot\frac{ds^2}{dv^2}\right)\left(\sqrt{1+ss}\,\cos(v-\varpi)-\frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}\cdot\frac{ds}{dv}\sin(v-\varpi)\right)$$
$$+\frac{3}{2}e-\frac{2e}{1+\gamma\gamma}\cdot\frac{ds^2}{dv^2}.$$

En substituant dans ces expressions de P, P', ainsi que dans celles de Q, Q' pour s et $\frac{ds}{dv}$ leurs valeurs, l'on aura

$$P=\frac{e}{2}\sin(2v-2\varpi)+\frac{2\sqrt{(1+ss)}}{1+\gamma\gamma}\left\{1+\frac{1}{2}\gamma\gamma-\frac{1}{2}\gamma\gamma\cos(2v-2\theta)\right\}\sin(v-\varpi)$$
$$+\frac{\gamma\gamma}{(1+\gamma\gamma)\sqrt{(1+ss)}}\left\{(1+\frac{1}{2}\gamma\gamma)\sin(2v-2\theta)-\frac{1}{4}\gamma\gamma\sin(4v-4\theta)\right\}\cos(v-\varpi),$$

$$P'=\frac{3}{2}e+\frac{e\gamma\gamma}{1+\gamma\gamma}-\frac{e\gamma\gamma}{1+\gamma\gamma}\cos(2v-2\theta)$$
$$+\frac{e}{2}\cos(2v-2\varpi)+\frac{2\sqrt{(1+ss)}}{1+\gamma\gamma}\left\{1+\frac{1}{2}\gamma\gamma-\frac{1}{2}\gamma\gamma\cos(2v-2\theta)\right\}\cos(v-\varpi)$$
$$-\frac{\gamma\gamma}{(1+\gamma\gamma)\sqrt{(1+ss)}}\left\{(1+\frac{1}{2}\gamma\gamma)\sin(2v-2\theta)-\frac{1}{4}\gamma\gamma\sin(4v-4\theta)\right\}\sin(v-\varpi);$$

$$Q=\left(\frac{3}{2}\gamma+\frac{1}{2}\gamma^3\right)\sin(\theta-\varpi)+\frac{1}{2}\gamma\sin(2v-\theta-\varpi)+\frac{1}{2}\gamma^3\sin(2v-3\theta+\varpi)$$

$$Q'=\left(\frac{3}{2}\gamma+\frac{1}{2}\gamma^3\right)\cos(\theta-\varpi)+\frac{1}{2}\gamma\cos(2v-\theta-\varpi)-\frac{1}{2}\gamma^3\cos(2v-3\theta+\varpi).$$

62. L'expression de $\frac{dt}{dv}$ relative à l'éllipse immobile, trouvée dans le n.° 39, peut être réduite à la forme

$$\frac{dt}{dv}=A'+A''\cos v+A'''\cos 2v+A^{IV}\cos 3v+\text{etc.}$$
$$+B''\sin v+B'''\sin 2v+B^{IV}\sin 3v+\text{etc.}$$

En imaginant substituées dans les fonctions A'', A''', A^{IV}, etc.; B'', B''', B^{IV}, etc. au lieu des cinq constantes arbitraires h^2, γ, e, θ, ϖ leurs valeurs variables, et en supposant pour plus de simplicité leurs variations représentées par les équations

$$dA'' = G''\,dv\,, \qquad dA''' = G'''\,dv\,, \qquad dA^{IV} = G^{IV}\,dv\,, \quad \text{etc.}$$
$$dB'' = H''\,dv\,, \qquad dB''' = H'''\,dv\,, \qquad dB^{IV} = H^{IV}\,dv\,, \quad \text{etc.},$$

l'on aura, après avoir intégré par parties,

$$\begin{aligned} t+f = \int A'\,dv + A''\sin v + \tfrac{1}{2}A'''\sin 2v + \tfrac{1}{3}A^{IV}\sin 3v + \text{etc.} \\ - B''\cos v - \tfrac{1}{2}B'''\cos 2v - \tfrac{1}{3}B^{IV}\cos 3v - \text{etc.} \\ - \int G''\sin v\,dv - \tfrac{1}{2}\int G'''\sin 2v\,dv - \text{etc.} \\ + \int H''\cos v\,dv + \tfrac{1}{2}\int H'''\cos 2v\,dv + \text{etc.} \end{aligned}$$

Dans le cas des forces perturbatrices nulles, la valeur de $t+f$ se réduit à la somme des deux premières lignes; ainsi, dans le cas de l'orbite troublée, l'on doit prendre pour f une fonction de v, telle qu'étant différentiée, l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv} = G''\sin v + \tfrac{1}{2}G'''\sin 2v + \tfrac{1}{3}G^{IV}\sin 3v + \text{etc.} \\ - H''\cos v - \tfrac{1}{2}H'''\cos 2v - \tfrac{1}{3}H^{IV}\cos 3v - \text{etc.}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv} = \frac{dA''}{dv}\sin v + \tfrac{1}{2}.\frac{dA'''}{dv}\sin 2v + \tfrac{1}{3}.\frac{dA^{IV}}{dv}\sin 3v + \text{etc.} \\ - \frac{dB''}{dv}\cos v - \tfrac{1}{2}.\frac{dB'''}{dv}\cos 2v - \tfrac{1}{3}.\frac{dB^{IV}}{dv}\cos 3v - \text{etc.}; \end{aligned}$$

car il est évident que, en prenant pour f l'intégrale de cette fonction, l'on a

$$\begin{aligned} t+f = \int A'\,dv + A''\sin v + \tfrac{1}{2}A'''\sin 2v + \tfrac{1}{3}A^{IV}\sin 3v + \text{etc.} \\ - B''\cos v - \tfrac{1}{2}B'''\cos 2v - \tfrac{1}{3}B^{IV}\cos 3v - \text{etc.}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire une expression de $t+f$ tout-à-fait semblable à celle que l'on obtient en supposant nulles les forces perturbatrices.

63. Il suit de là et de l'expression de $t+f$ rapportée à la fin du n.° 39, que l'on a aussi

$$t+f=\int A'\,d\nu+\frac{h^3(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2}\left\{\begin{array}{l} N\sin(\nu-\varpi)+\tfrac{1}{2}N'\sin(2\nu-2\varpi)+\tfrac{1}{2}N''\sin(2\nu-2\theta) \\ +\tfrac{1}{3}N'''\sin(3\nu-3\varpi)+N^{IV}\sin(\nu+\varpi-2\theta)+\tfrac{1}{3}N^{IV}\sin(3\nu-\varpi-2\theta) \\ +\tfrac{1}{4}N^{V}\sin(4\nu-4\varpi)+\tfrac{1}{4}N^{VI}\sin(4\nu-4\theta)+\tfrac{1}{4}N^{VII}\sin(4\nu-2\varpi-2\theta) \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}$$

La valeur de A' devant être égale à $\frac{h^3(1+\gamma\gamma)^2 A}{\sigma^2}$, l'on a sous forme finie (Voy. n.° 41)

$$A'=\frac{h^3(1+\gamma\gamma)^3}{\sigma^2\,[1+\gamma^2-e^2-e^2\gamma^2\cos^2(\varpi-\theta)]^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{a^3}{\sigma}};$$

et en développant jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement,

$$A'=\frac{h^3}{\sigma^2}\left(1+\tfrac{3}{2}e^2+\tfrac{3}{2}\gamma^2+\tfrac{15}{8}e^4+\tfrac{3}{8}\gamma^4+\tfrac{3}{2}e^2\gamma^2+\tfrac{3}{4}e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta)\right).$$

64. L'intégrale simple $\int A'\,d\nu$, qui entre dans la valeur de $t+f$, étant égale à l'intégrale double $\int d\nu\int\frac{dA'}{d\nu}\,d\nu$, l'on pourrait exprimer explicitement cette dernière par les fonctions de la force perturbatrice, en différentiant A' et remplaçant ensuite dh, $d\gamma$, de, $d\theta$, $d\varpi$ par leurs valeurs trouvées précédemment; en opérant ainsi l'on tomberait sur un résultat fort compliqué, et il serait assez difficile de voir qu'il peut être réduit à une forme fort simple. Mais il est aisé d'éviter cette complication à l'aide de la considération suivante.

En désignant par $-\frac{\sigma}{a}$ la constante arbitraire qui doit être ajoutée à l'intégrale $2\int d'\Omega$, l'on a cette équation du premier ordre (Voy. n.° 21)

$$\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\nu^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+ss}+\frac{ds^2}{d\nu^2}\cdot\frac{1}{(1+ss)^2}\right)=\frac{2\sigma}{r}-\frac{\sigma}{a}+2\int d'\Omega,$$

dans laquelle a représente, comme l'on sait, le demi-grand-axe de l'orbite lorsque l'on suppose la force perturbatrice nulle; donc pour conserver la même forme au second membre de cette équation dans le cas de l'orbite troublée, il est évident qu'il faudra prendre pour

$\frac{\sigma}{\alpha}$ une fonction telle, qu'étant différentiée, l'on ait $\sigma d \cdot \frac{1}{\alpha} = -2 d'\Omega$; d'où l'on tire en intégrant

$$\frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\sigma}{\alpha_{\prime}} - 2\int d'\Omega,$$

$\frac{\sigma}{\alpha_{\prime}}$ étant la constante arbitraire absolue qui doit être ajoutée à l'intégrale $-2\int d'\Omega$. Il suit de là que l'on a

$$\int A' \, dv = \int \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sigma}} dv = \sqrt{\frac{\alpha_{\prime}^{3}}{\sigma}} \cdot \int \left(1 - \frac{2\alpha_{\prime}}{\sigma}\int d'\Omega\right)^{-\frac{3}{2}} dv.$$

65. L'inspection de la valeur de $\frac{df}{dv}$ trouvée dans le n.° 62 démontre que l'on obtient cette formule en excluant le terme $\int A'dv$ de la valeur de $t + f$, et en différentiant ensuite par rapport aux constantes arbitraires seulement; donc, en posant pour plus de simplicité $q = \frac{h^3(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2}$, l'on aura

$$\frac{df}{dv} =$$

$$\frac{d \cdot qN}{dv} \sin(v - \varpi) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot qN'}{dv} \sin(2v - 2\varpi) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot qN''}{dv} \sin(2v - 2\theta)$$
$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{d \cdot qN'''}{dv} \sin(3v - 3\varpi) + \frac{d \cdot qN^{\text{IV}}}{dv} \sin(v + \varpi - 2\theta) + \frac{1}{3} \cdot \frac{d \cdot qN^{\text{IV}}}{dv} \sin(3v - \varpi - 2\theta)$$
$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{d \cdot qN^{\text{V}}}{dv} \sin(4v - 4\varpi) + \frac{1}{4} \cdot \frac{d \cdot qN^{\text{VI}}}{dv} \sin(4v - 4\theta) + \frac{1}{4} \cdot \frac{d \cdot qN^{\text{VII}}}{dv} \sin(4v - 2\varpi - 2\theta)$$
$$- q\frac{d\varpi}{dv}\left\{\begin{array}{l} N\cos(v - \varpi) + N'\cos(2v - 2\varpi) + N'''\cos(3v - 3\varpi) - N^{\text{IV}}\cos(v + \varpi - 2\theta) \\ + \frac{1}{3}N^{\text{IV}}\cos(3v - \varpi - 2\theta) + N^{\text{V}}\cos(4v - 4\varpi) + \frac{1}{2}N^{\text{VII}}\cos(4v - 2\varpi - 2\theta) \end{array}\right\}$$
$$- q\frac{d\theta}{dv}\left\{\begin{array}{l} N''\cos(2v - 2\theta) + 2N^{\text{IV}}\cos(v + \varpi - 2\theta) + \frac{2}{3}N^{\text{IV}}\cos(3v - \varpi - 2\theta) \\ + N^{\text{VI}}\cos(4v - 4\theta) + \frac{1}{2}N^{\text{VII}}\cos(4v - 2\varpi - 2\theta) \end{array}\right\}.$$

66. Les coefficiens qN, qN', qN'', etc. étant différentiés par rapport à e et γ, afin de former les valeurs de $\frac{d \cdot qN}{dv}$, $\frac{d \cdot qN'}{dv}$, etc. perdront chacun une dimension; ainsi il sera nécessaire de chercher leurs valeurs

développées jusqu'aux quantités de l'ordre $m+1$ pour avoir la valeur de $\frac{df}{dv}$ exacte jusqu'aux quantités de l'ordre m inclusivement.

67. Dans le paragraphe suivant nous montrerons par un petit nombre d'applications choisies l'usage des formules qui viennent d'être exposées, en considérant seulement les premiers termes des coefficiens de quelques inégalités lunaires. Comme l'expression de $\frac{df}{dv}$, posée plus haut, ne peut pas être développée ultérieurement sans tomber dans une excessive complication, nous conviendrons de borner la valeur de $\frac{df}{dv}$ au second ordre inclusivement par rapport aux quantités e et γ, ce qui nous suffira pour les applications que nous ferons de cette formule. En substituant pour N, N', N'', etc. leurs valeurs données dans le n.° 39, et remarquant que à l'égard des quantités e et γ les deux fonctions $\frac{d\theta}{dv}$, $\frac{d\varpi}{dv}$ sont de l'ordre -1, l'on trouvera

$$\begin{aligned}\frac{df}{dv} = {} & \frac{q}{h}\cdot\frac{dh}{dv}\Big(-6e\,sin(v-\varpi)+\tfrac{9}{4}e^2 sin(2v-2\varpi)+\tfrac{3}{4}\gamma^2 sin(2v-2\theta)\Big)\\ & +q\gamma\frac{d\theta}{dv}\Big(-\tfrac{1}{2}\gamma cos(2v-2\theta)+\tfrac{3}{2}e\gamma cos(v+\varpi-2\theta)+\tfrac{1}{2}e\gamma cos(3v-\varpi-2\theta)\Big)\\ & +q\,\frac{d\gamma}{dv}\Big(\tfrac{1}{2}\gamma sin(2v-2\theta)-\tfrac{3}{2}e\gamma sin(v+\varpi-2\theta)-\tfrac{1}{2}e\gamma sin(3v-\varpi-2\theta)-5e\gamma sin(v-\varpi)\Big)\\ & +q\,e\frac{d\varpi}{dv}\left\{\begin{array}{l}(2+3e^2-\tfrac{3}{2}\gamma^2)\,cos(v-\varpi)-\tfrac{3}{2}e\,cos(2v-2\varpi)+e^2 cos(3v-3\varpi)\\ -\tfrac{3}{4}\gamma^2 cos(v+\varpi-2\theta)+\tfrac{1}{4}\gamma^2 cos(3v-\varpi-2\theta)\end{array}\right\}\\ & +q\,\frac{de}{dv}\left\{\begin{array}{l}-(2+9e^2-\tfrac{3}{2}\gamma^2)\,sin(v-\varpi)+\tfrac{3}{2}e\,sin(2v-2\varpi)-e^2 sin(3v-3\varpi)\\ -\tfrac{3}{4}\gamma^2 sin(v+\varpi-2\theta)-\tfrac{1}{4}\gamma^2 sin(3v-\varpi-2\theta)\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

68. Or nous avons

$$\frac{d\cdot h^2}{dv} = 2\,\frac{d\Omega}{u^2 dv},$$

$$\gamma\,\frac{d\theta}{dv} = \frac{sin\,(v-\theta)}{h^2}\left(\Omega_{(1)}-\gamma\,cos(v-\theta)\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv}\right),$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{cos\,(v-\theta)}{h^2}\left(\Omega_{(1)}-\gamma\,cos(v-\theta)\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv}\right),$$

et en négligeant, comme on le doit, les quantités d'un ordre supérieur au second, les formules du n.° 61 donnent

$$\frac{de}{dv} = -\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\sin(v-\varpi)\cdot\Omega_{(2)}$$
$$+\left(\tfrac{3}{2}\gamma\cos(\varpi-\theta)+\tfrac{1}{2}\gamma\cos(2v-\theta-\varpi)+2e\gamma\cos(v-\theta)\right)\frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\tfrac{3}{2}e+(2-\tfrac{1}{2}\gamma^2)\cos(v-\varpi)+\tfrac{1}{2}e\cos(2v-2\varpi)\\ -\tfrac{5}{4}\gamma^2\cos(v-2\theta+\varpi)-\tfrac{1}{4}\gamma^2\cos(3v-2\theta-\varpi)\end{array}\right\}\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv},$$

$$e\frac{d\varpi}{dv} = \frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\cos(v-\varpi)\cdot\Omega_{(2)}$$
$$+\left(-\tfrac{3}{2}\gamma\sin(\varpi-\theta)+\tfrac{1}{2}\gamma\sin(2v-\theta-\varpi)\right)\frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$$
$$+\left\{\begin{array}{l}(2-\tfrac{1}{2}\gamma^2)\sin(v-\varpi)+\tfrac{1}{2}e\sin(2v-2\varpi)\\ +\tfrac{5}{4}\gamma^2\sin(v-2\theta+\varpi)-\tfrac{1}{4}\gamma^2\sin(3v-2\theta-\varpi)\end{array}\right\}\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv};$$

donc, en posant pour plus de simplicité

$$\frac{df}{dv} = A\frac{q}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}+B\frac{q}{h^2}\Omega_{(1)}+C\frac{q}{\sigma}\Omega_{(2)},$$

l'on aura

$$A =$$
$$-6e\sin(v-\varpi)+\tfrac{9}{4}e^2\sin(2v-2\varpi)+\tfrac{3}{4}\gamma^2\sin(2v-2\theta)$$
$$+\tfrac{1}{2}\gamma^2\left(\sin(v-\theta)\cos(2v-2\theta)-\cos(v-\theta)\sin(2v-2\theta)\right)\cos(v-\theta)$$
$$-3e\sin(v-\varpi)+\tfrac{9}{4}e^2\sin(2v-2\varpi)-18e^2\sin(v-\varpi)\cos(v-\varpi)+6e^2\cos(v-\varpi)\sin(v-\varpi)$$
$$+\left\{\begin{array}{l}-4(1+\gamma\gamma)\sin(v-\varpi)+3e\sin(2v-2\varpi)-2e^2\sin(3v-3\varpi)+e\sin(2v-2\varpi)\\ -\tfrac{3}{2}\gamma^2\sin(v+\varpi-2\theta)+\tfrac{1}{2}\gamma^2\sin(3v-\varpi-2\theta)+\tfrac{5}{2}\gamma^2\sin(v-2\theta+\varpi)-\tfrac{1}{2}\gamma^2\sin(3v-2\theta-\varpi)\end{array}\right\}\cos(v-\varpi)$$
$$+\left\{\begin{array}{l}+4(1+\gamma\gamma)\cos(v-\varpi)-3e\cos(2v-2\varpi)+2e^2\cos(3v-3\varpi)-e\cos(2v-2\varpi)\\ -\tfrac{3}{2}\gamma^2\cos(v+\varpi-2\theta)+\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos(3v-\varpi-2\theta)+\tfrac{5}{2}\gamma^2\cos(v-2\theta+\varpi)+\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos(3v-2\theta-\varpi)\end{array}\right\}\sin(v-\varpi)$$
$$+\tfrac{3}{4}e^2\left(\sin(2v-2\varpi)\cos(2v-2\varpi)-\cos(2v-2\varpi)\sin(2v-2\varpi)\right),$$

ou bien

$$A = -5e\sin(v-\varpi)-\tfrac{7}{2}e^2\sin(2v-2\varpi)+\tfrac{1}{2}\gamma^2\sin(2v-2\theta).$$

On trouvera de même

$$B =$$

$$\left(-\tfrac{1}{2}\gamma\cos(2\nu-2\theta)+\tfrac{3}{2}e\gamma\cos(\nu+\varpi-2\theta)+\tfrac{1}{2}e\gamma\cos(3\nu-\varpi-2\theta)\right)\sin(\nu-\theta)$$
$$\left(+\tfrac{1}{2}\gamma\sin(2\nu-2\theta)-\tfrac{3}{2}e\gamma\sin(\nu+\varpi-2\theta)-\tfrac{1}{2}e\gamma\sin(3\nu-\varpi-2\theta)\right)\cos(\nu-\theta)$$
$$\left(-3\gamma\cos(\theta-\varpi)-\gamma\cos(2\nu-\theta-\varpi)\right)\sin(\nu-\varpi)$$
$$\left(+3\gamma\sin(\theta-\varpi)+\gamma\sin(2\nu-\theta-\varpi)\right)\cos(\nu-\varpi)$$
$$\left(+\tfrac{9}{4}e\gamma\cos(\theta-\varpi)+\tfrac{3}{4}e\gamma\cos(2\nu-\theta-\varpi)\right)\sin(2\nu-2\varpi)$$
$$\left(-\tfrac{9}{4}e\gamma\sin(\theta-\varpi)-\tfrac{3}{4}e\gamma\sin(2\nu-\theta-\varpi)\right)\cos(2\nu-2\varpi)$$
$$-5e\gamma\sin(\nu-\varpi)\cos(\nu-\theta)-4e\gamma\sin(\nu-\varpi)\cos(\nu-\theta)$$
$$=-\tfrac{3}{2}\gamma\sin(\nu-\theta)-\tfrac{11}{4}e\gamma\sin(2\nu-\theta-\varpi)+\tfrac{9}{4}e\gamma\sin(\varpi-\theta)$$

$$C =$$

$$\left\{\begin{matrix}(2+9e^2+\tfrac{1}{2}\gamma^2)\sin(\nu-\varpi)-\tfrac{3}{2}e\sin(2\nu-2\varpi)+e^2\sin(3\nu-3\varpi)\\+\tfrac{3}{4}\gamma^2\sin(\nu+\varpi-2\theta)+\tfrac{1}{4}\gamma^2\sin(3\nu-\varpi-2\theta)\end{matrix}\right\}\sin(\nu-\varpi)$$
$$+\left\{\begin{matrix}(2+3e^2+\tfrac{1}{2}\gamma^2)\cos(\nu-\varpi)-\tfrac{3}{2}e\cos(2\nu-2\varpi)+e^2\cos(3\nu-3\varpi)\\-\tfrac{3}{4}\gamma^2\cos(\nu+\varpi-2\theta)+\tfrac{1}{4}\gamma^2\cos(3\nu-\varpi-2\theta)\end{matrix}\right\}\cos(\nu-\varpi)$$
$$=(2+6e^2+\tfrac{1}{2}\gamma^2)-\tfrac{3}{2}e\cos(\nu-\varpi)-2e^2\cos(2\nu-2\varpi)-\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos(2\nu-2\theta).$$

En substituant pour q sa valeur et en négligeant toujours les quantités au-delà du second ordre, l'on aura

$$\frac{df}{d\nu} =$$

$$\left(-\tfrac{3}{2}\gamma\sin(\nu-\theta)-\tfrac{11}{4}e\gamma\sin(2\nu-\theta-\varpi)+\tfrac{9}{4}e\gamma\sin(\varpi-\theta)\right)\frac{h\Omega_{(1)}}{\sigma^2}$$
$$+\left((2+6e^2+\tfrac{9}{2}\gamma^2)-\tfrac{3}{2}e\cos(\nu-\varpi)-2e^2\cos(2\nu-2\varpi)-\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos(2\nu-2\theta)\right)\frac{h^3\Omega_{(2)}}{\sigma^3}$$
$$+\left(-5e\sin(\nu-\varpi)-\tfrac{7}{2}e^2\sin(2\nu-2\varpi)+\tfrac{1}{2}\gamma^2\sin(2\nu-2\theta)\right)\frac{h}{\sigma^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2 d\nu}.$$

69. D'après la théorie que nous venons d'exposer, il est facile de démontrer que chacune des constantes arbitraires h, γ, θ, e, ϖ peut être exprimée explicitement par la variable indépendante v et les fonctions s, u, $\frac{ds}{dv}$, $\frac{du}{dv}$, $\frac{dt}{dv}$. En effet nous avons d'abord

$$h = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{dv}{dt},$$

et les équations

$$s = \gamma \sin(v - \theta), \qquad \frac{ds}{dv} = \gamma \cos(v - \theta)$$

donnent

$$\gamma = \sqrt{\left(s^2 + \frac{ds^2}{dv^2}\right)}, \qquad \tang(v - \theta) = s\frac{dv}{ds},$$

et par conséquent

$$\tang\theta = \frac{\frac{ds}{dv}\sin v - s \cdot \cos v}{\frac{ds}{dv}\cos v + s \cdot \sin v}.$$

Ensuite nous avons les équations

$$e\cos(v - \varpi) = ku - \sqrt{1 + ss}, \quad e\sin(v - \varpi) = \frac{s}{\sqrt{(1 + ss)}} \cdot \frac{ds}{dv} - k\frac{du}{dv},$$

lesquelles, en posant pour plus de simplicité

$$P = k\frac{du}{dv} - \frac{s}{\sqrt{(1 + ss)}} \cdot \frac{ds}{dv} = -e\sin(v - \varpi),$$

$$Q = ku - \sqrt{1 + ss} = e\cos(v - \varpi),$$

donnent

$$e^2 = P^2 + Q^2, \qquad \tang(v - \varpi) = -\frac{P}{Q}; \qquad \tang\varpi = \frac{P\cos v + Q\sin v}{Q\cos v - P\sin v}.$$

Actuellement, si l'on remarque que l'on a

$$k = \frac{h^2}{\sigma}(1 + \gamma\gamma) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1 + s^2 + \frac{ds^2}{dv^2}}{u^4} \cdot \frac{dv^2}{dt^2},$$

l'on en tire la conséquence que chacune de ces constantes arbitraires peut être effectivement exprimée par v et par les fonctions s, u, $\frac{ds}{dv}$, $\frac{du}{dv}$, $\frac{dt}{dv}$.

70. Nous terminerons cet article en donnant des formules assez simples pour trouver les valeurs des différentielles partielles $\frac{d\Omega}{dv}$, $\frac{d\Omega}{du}$, $\frac{d\Omega}{ds}$ au moyen du développement de la fonction Ω formé en y substituant

$$\gamma \sin(v-\theta) \quad \text{au lieu de} \quad s,$$

et $$\frac{\sigma}{h^2(1+\gamma\gamma)}\left\{\sqrt{1+\gamma\gamma\sin^2(v-\theta)}+e\cos(v-\theta)\right\} \quad \text{au lieu de} \quad u.$$

Soit $\Omega = F(v, h, \gamma, \theta, e, \varpi)$ le résultat de cette substitution, et supposons que l'on ait laissé v', u', s' pour représenter les coordonnées du Soleil; il est d'abord évident que, en prenant les différentielles partielles de Ω par rapport aux constantes arbitraires e et ϖ, l'on a

$$\frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{de}=\frac{d\Omega}{de}, \qquad \frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{d\varpi}=\frac{d\Omega}{d\varpi};$$

mais l'expression précédente de u donne

$$\frac{du}{de}=\frac{\sigma\cos(v-\varpi)}{h^2(1+\gamma\gamma)}, \qquad \frac{du}{d\varpi}=\frac{\sigma e\sin(v-\varpi)}{h^2(1+\gamma\gamma)},$$

et par conséquent

$$\frac{d\Omega}{de}=\frac{\sigma\cos(v-\varpi)}{h^2(1+\gamma\gamma)}\cdot\frac{d\Omega}{du}, \qquad \frac{d\Omega}{d\varpi}=\frac{\sigma e\sin(v-\varpi)}{h^2(1+\gamma\gamma)}\cdot\frac{d\Omega}{du}.$$

Il suit de ces deux équations, que l'on a

$$\frac{d\Omega}{du}=\frac{h^2(1+\gamma\gamma)}{\sigma}\left\{\cos(v-\varpi)\frac{d\Omega}{de}+\sin(v-\varpi)\frac{d\Omega}{e\,d\varpi}\right\},$$

et

$$\sin(v-\varpi)\frac{d\Omega}{de}-\cos(v-\varpi)\frac{d\Omega}{e\,d\varpi}=0.$$

71. Maintenant, si l'on différentie la même expression de Ω par rapport à γ et θ, il est clair que l'on a d'abord

$$\frac{d\Omega}{d\gamma}=\frac{d\Omega}{ds}\cdot\frac{ds}{d\gamma}+\frac{d\Omega}{du}\left(\frac{du}{d\gamma}+\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{d\gamma}\right),$$

$$\frac{d\Omega}{d\theta}=\frac{d\Omega}{ds}\cdot\frac{ds}{d\theta}+\frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{d\theta}.$$

Mais les valeurs précédentes de u, s donnent

$$\frac{ds}{d\gamma} = \sin(v-\theta), \qquad \frac{ds}{d\theta} = -\gamma\cos(v-\theta),$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{\sigma}{h^2(1+\gamma\gamma)} \cdot \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}, \quad \frac{du}{d\gamma} = -\frac{2\gamma u}{1+\gamma\gamma},$$

partant nous aurons

$$\frac{d\Omega}{d\gamma} = \left(\frac{d\Omega}{ds} + \frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{ds}\right)\sin(v-\theta) - \frac{2\gamma u}{1+\gamma\gamma}\cdot\frac{d\Omega}{du},$$

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = -\left(\frac{d\Omega}{ds} + \frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{ds}\right)\gamma\cos(v-\theta).$$

Ces deux équations donnent

$$\frac{d\Omega}{d\gamma}\sin(v-\theta) - \frac{d\Omega}{\gamma d\theta}\cos(v-\theta) = \frac{d\Omega}{ds} + \left(\frac{du}{ds} - \frac{2\gamma u \sin(v-\theta)}{1+\gamma\gamma}\right)\frac{d\Omega}{du};$$

donc, en substituant pour $\frac{d\Omega}{du}$ sa valeur trouvée plus haut, et faisant pour plus de simplicité

$$R' = \cos(v-\varpi)\frac{d\Omega}{de} + \sin(v-\varpi)\frac{d\Omega}{e\,d\varpi},$$

$$R'' = \sin(v-\theta)\frac{d\Omega}{d\gamma} - \cos(v-\theta)\frac{d\Omega}{\gamma d\theta},$$

l'on aura

$$\frac{d\Omega}{du} = h^2\cdot\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\cdot R', \qquad \frac{d\Omega}{ds} = R'' - \left(\frac{s}{\sqrt{(1+ss)}} - \frac{2h^2}{\sigma}us\right)R';$$

d'où l'on conclut,

$$\Omega_{(2)} = \frac{d\Omega}{du} + \frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega}{ds} = \frac{s}{u}R'' + \left(\frac{h^2(1+\gamma\gamma)}{\sigma} + \frac{2h^2}{\sigma}ss - \frac{ss}{u\sqrt{(1+ss)}}\right)R',$$

$$\Omega_{(1)} = \frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{s}{u} + \frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega}{ds} = \frac{1+ss}{u^2}R'' + \frac{s}{u}\left(\frac{h^2(1+\gamma\gamma)}{\sigma} - \frac{2h^2}{\sigma}(1+ss) - \frac{\sqrt{(1+ss)}}{u}\right)R'.$$

72. Pour tirer de l'équation

$$\Omega = F(v, h, \gamma, \theta, e, \varpi)$$

la valeur de la différentielle partielle $\frac{d\Omega}{dv}$, remarquons que, en désignant

par $\frac{d'\Omega}{d\varphi}$ le coefficient différentiel de la fonction F pris par rapport à la variable φ explicitement renfermée dans cette fonction, l'on a

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{d'\Omega}{d\varphi} - \frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{d\varphi} - \frac{d\Omega}{ds}\cdot\frac{ds}{d\varphi};$$

mais il est clair que l'on a

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{d\varphi} - \frac{\sigma e \sin(\varphi - \varpi)}{h^2(1+\gamma\gamma)}, \qquad \frac{ds}{d\varphi} = \gamma\cos(\varphi - \theta);$$

donc en observant que l'on a trouvé plus haut

$$\frac{d\Omega}{d\varpi} = \frac{\sigma e \sin(\varphi - \varpi)}{h^2(1+\gamma\gamma)}\cdot\frac{d\Omega}{du},$$

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = -\left(\frac{d\Omega}{ds} + \frac{d\Omega}{du}\cdot\frac{du}{ds}\right)\gamma\cos(\varphi - \theta),$$

l'on obtiendra

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{d'\Omega}{d\varphi} + \frac{d\Omega}{d\theta} + \frac{d\Omega}{d\varpi}.$$

Ce résultat et les deux précédens démontrent qu'il suffit de développer la fonction Ω pour en conclure, par de simples différentiations partielles exécutées par rapport à la variable indépendante φ et aux constantes arbitraires e, ϖ, γ, θ, les fonctions de la force perturbatrice qui entrent dans les équations différentielles.

Nous rapprocherons de cette conclusion l'équation suivante :

$$\frac{d\Omega}{dh}dh + \frac{d\Omega}{d\gamma}d\gamma + \frac{d\Omega}{de}de + \frac{d\Omega}{d\theta}d\theta + \frac{d\Omega}{d\varpi}d\varpi = 0,$$

à laquelle la fonction Ω (et toute fonction de s et de u) doit nécessairement satisfaire. En effet il est aisé de voir que le premier membre de cette équation est équivalent à $\frac{d\Omega}{du}du + \frac{d\Omega}{ds}ds$, les différentielles étant prises par rapport aux quantités h, γ, e, θ, ϖ seulement : ainsi l'on a ici $du = 0$, $ds = 0$, conformément aux conditions établies au commencement de ce paragraphe.

73. Enfin il est utile de remarquer que, en retenant seulement le terme principal de chacun des argumens, l'on peut représenter par

$A e^i \cos(q \mp i\varpi)$ un terme quelconque du devéloppement de Ω affecté d'une puissance de e, A étant indépendant de e; et qu'en conséquence l'on a, pour ce terme principal,

$$R' = i A e^{i-1} \left[\cos(v-\varpi)\cos(q \pm i\varpi) \mp \sin(v-\varpi)\sin(q \pm i\varpi)\right],$$

ou bien

$$R' = i A e^{i-1} \cos(v + (i-1)\varpi \pm q).$$

En désignant de même par $B\gamma^i \cos(p \pm i\theta)$ un terme principal de Ω dépendant de γ, l'on aura

$$R'' = i B \gamma^{i-1} \sin(v \pm (i-1)\theta \pm p);$$

on voit donc qu'il faut développer Ω jusqu'aux quantités de l'ordre $m+1$ par rapport à e et γ, si l'on veut obtenir pour R' et R'' des valeurs exactes jusqu'aux quantités de l'ordre m inclusivement.

§ 4.

Application des formules de la variation des constantes arbitraires à la recherche de quelques termes principaux des perturbations lunaires dues à l'action du Soleil.

74. Désignons par $h_{,}$, $\gamma_{,}$, $e_{,}$, $\theta_{,}$, $\varpi_{,}$ les valeurs constantes, censées données, que les variables h, γ, e, θ, ϖ ont à une époque déterminée. En considérant ces constantes comme la première valeur de ces fonctions, l'on pourra trouver la partie variable en intégrant successivement leurs différentielles. L'analyse que nous exposerons dans ce paragraphe est propre à faire voir clairement l'esprit de cette méthode, et à montrer comment on doit employer les formules générales dans des cas particuliers, à l'égard de certains termes que l'on a intérêt de connaître de préférence à d'autres du même ordre. Pour procéder avec plus d'ordre, nous énoncerons successivement les questions qu'il s'agit de résoudre, ce qui fera mieux comprendre le but vers lequel l'analyse est dirigée. Commençons par la solution de ce problème.

Calcul des deux premiers termes des séries qui déterminent le mouvement progressif du nœud et du périgée.

75. Considérons l'équation

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = \frac{1}{h^2} \left\{ \Omega_{(1)} - \gamma \cos(v-\theta) \frac{d\Omega}{u^2 dv} \right\} \sin(v-\theta)$$

donnée dans le n.° 68. En supposant $s' = 0$, et négligeant les termes qui dépendent de la parallaxe du Soleil, c'est-à-dire les termes de l'ordre du produit $\frac{M'u'^3}{h^2u^4} \cdot \frac{u'}{u}$, les formules trouvées dans le n.° 27 donnent

$$\frac{\Omega_{(1)}}{h^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4} s\left(1 + \cos(2v - 2v')\right),$$

$$\frac{1}{h^2} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4} \sin(2v - 2v').$$

Donc, en faisant $s = \gamma \sin(v - \theta)$, il viendra

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4} \left\{ \left(1 - \cos(2v - 2\theta)\right)\left(1 + \cos(2v - 2v')\right) - \sin(2v - 2\theta)\sin(2v - 2v') \right\},$$

ou bien

$$(1) \ldots \frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4} \left\{ 1 - \cos(2v' - 2\theta) - \cos(2v - 2\theta) + \cos(2v - 2v') \right\}.$$

Maintenant, si l'on néglige les termes multipliés par l'une ou l'autre des trois quantités e, ϵ', γ^2, il suffira de prendre $u' = \frac{1}{a'}$, $u = \frac{\sigma}{h^2}$, $v' = mv + \Lambda$; m étant une fraction du *premier ordre* égale au rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune, et Λ désignant la longitude du Soleil à une époque donnée. Comme dans cette première approximation l'on néglige le carré de la force perturbatrice, l'on peut réduire la fonction h à sa partie constante, et supposer $h = h_{,}$: alors le facteur $\frac{M'h_{,}^6}{\sigma^4 a'^3}$ représente une quantité de l'ordre du carré de la fraction m, puisque (par les formules du n.° 41) $h_{,}^2$ est à-peu-près égal au produit de σ par la distance moyenne de la Lune à la Terre.

Nous poserons en conséquence

$$\frac{M'h_{\prime}^{6}}{\sigma^{4}a'^{3}} = \mathrm{m}^2,$$

et nous regarderons m comme une quantité du premier ordre, qui, par sa nature, doit être très-peu différente de *m*.

Il suit de là que l'expression précédente de $\frac{d\theta}{dv}$ se réduit à celle-ci:

$$(2)\ldots \frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left\{1 - cos(2mv - 2\theta + 2\Lambda) + cos(2v - 2mv - 2\Lambda) - cos(2v - 2\theta)\right\}.$$

En intégrant cette expression, et considérant d'abord le seul terme progressif, il est clair que l'on a $\theta = \theta_{\prime} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 v$. Donc, en substituant cette valeur approchée de θ dans le second membre de l'équation (2), il viendra

$$(3)\ldots \frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left\{1 - cos(2mv + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{\prime} + 2\Lambda) - cos(2v + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{\prime}) \right.$$
$$\left. + cos(2v - 2mv - 2\Lambda)\right\}.$$

76. La valeur de θ qui résulte de l'intégration de cette expression, doit être substituée dans le second membre de l'équation (2). Mais notre but ici étant d'avoir seulement les termes du second et du troisième ordre, qui dans θ sont multipliés par l'arc v, il suffit d'avoir une valeur de θ exacte dans les quantités du premier ordre, pour en déduire les termes du troisième ordre qui doivent se trouver dans le développement du second membre de l'équation (2). Or, en intégrant le second membre de l'équation (3), les termes du second ordre affectés des argumens $2v - 2mv - 2\Lambda$, $2v + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{\prime}$ restent du second ordre après l'intégration; mais il n'en est pas ainsi pour le terme du second ordre affecté de l'argument $2mv + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{\prime} + 2\Lambda$. Il est évident que l'intégration abaisse son coefficient au premier ordre, puisqu'il acquiert comme diviseur la quantité $2m + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2$. Donc, en retenant dans la valeur de θ le seul terme périodique du premier ordre, et prenant $\frac{\mathrm{m}^2}{m + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{m}^2}{m}$ (ce qui revient à négliger les quantités du second ordre), l'on aura

$$\theta = \theta_{\prime} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 v + \frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\, sin(2mv + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{\prime} + 2\Lambda).$$

En substituant cette même valeur de θ dans le second membre de l'équation (2), et considérant seulement l'argument $2mv - 2\theta - 2\Lambda$, nous aurons

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2 + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \cos\left[2mv + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{,} + 2\Lambda - \frac{3}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\sin(2mv + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{,} + 2\Lambda)\right].$$

En développant ce cosinus, et négligeant les quantités d'un ordre supérieur au troisième, il est clair que l'on a

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2 + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \cos(2mv + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{,} + 2\Lambda) + \frac{9}{16}\cdot\frac{\mathrm{m}^4}{m}\sin^2(2mv + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{,} + 2\Lambda).$$

Donc, en négligeant les termes périodiques, il viendra

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2 + \frac{9}{32}\cdot\frac{\mathrm{m}^4}{m};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\theta = \theta_{,} - \left(\frac{3}{4}\mathrm{m}^2 - \frac{9}{32}\cdot\frac{\mathrm{m}^4}{m}\right)v.$$

Tels sont les deux premiers termes de la série qui détermine le mouvement progressif du nœud. Il est remarquable qu'il soit nécessaire de considérer le carré de la force perturbatrice, c'est-à-dire une quantité du quatrième ordre, pour pouvoir obtenir le second terme, quoiqu'il soit du troisième ordre. C'est aussi ce qui arrive dans le calcul des deux premiers termes de la série qui détermine le mouvement progressif du périgée, comme nous allons le faire voir.

77. Dans cette recherche nous pouvons négliger tous les termes multipliés par s ou par γ qui se trouvent dans la valeur complète de $e\frac{d\varpi}{dv}$ donnée dans le n.° 61. Car l'on comprendra clairement par le calcul même qui suit, qu'ils ne peuvent donner dans la valeur de ϖ aucune partie appartenante aux deux termes dont il est ici question.

D'après cela l'on a

$$e\frac{d\varpi}{dv} = \cos(v - \varpi)\cdot\frac{\Omega_{(2)}}{\sigma} + \left\{2\sin(v - \varpi) + \frac{e}{2}\sin(2v - 2\varpi)\right\}\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv};$$

et il est évident que les valeurs de $\Omega_{(2)}$, $\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv}$ posées dans le n.° 27 peuvent être réduites à celles-ci:

$$\frac{\Omega_{(2)}}{\sigma} = -\frac{M'u'^3}{\sigma u^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(2v - 2v')\right),$$

$$\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2\,dv} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M'u'^3}{h^2u^4}\sin(2v - 2v')\,.$$

Donc, en prenant $u' = \frac{1}{a'}$ et

$$\frac{1}{u^3} = \frac{h^6}{\sigma^3}\left\{1 + e\cos(v - \varpi)\right\}^{-3} = \frac{h^6}{\sigma^3}\left(1 - 3e\cos(v - \varpi)\right),$$

$$\frac{1}{u^4} = \frac{h^8}{\sigma^4}\left\{1 + e\cos(v - \varpi)\right\}^{-4} = \frac{h^8}{\sigma^4}\left(1 - 4e\cos(v - \varpi)\right),$$

l'on aura

$$\begin{aligned} e\frac{d\varpi}{dv} = &-\frac{M'h^6}{2\sigma^4a'^3}\cos(v - \varpi)\left(1 - 3e\cos(v - \varpi)\right)\left(1 + 3\cos(2v - 2v')\right) \\ &-\frac{3M'h^6}{4\sigma^4a'^3}\,e\sin(2v - 2v')\sin(2v - 2\varpi) \\ &-\frac{3M'h^6}{\sigma^4a'^3}\sin(2v - 2v')\sin(v - \varpi)\left(1 - 4e\cos(v - \varpi)\right). \end{aligned}$$

78. Maintenant, si l'on fait $h = h_{\prime}$ et, comme dans le n.° 75, $\mathrm{m}^2 = \frac{M'h_{\prime}^6}{\sigma^4 a'^3}$, l'on trouvera que, en retenant seulement les termes multipliés par e, l'on a

$$e\frac{d\varpi}{dv} = -e\,\mathrm{m}^2\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(2v - 2\varpi) - \frac{9}{4}\cos(2v - 2v') \\ -\frac{9}{4}\cos(2v - 2\varpi)\cos(2v - 2v') \\ -(6 - \frac{3}{4})\sin(2v - 2\varpi)\sin(2v - 2v') \end{array}\right\}.$$

Donc, en raisonnant ici comme l'on a fait précédemment à l'égard de $\frac{d\theta}{dv}$, il faudra d'abord considérer parmi tous ces termes le seul terme périodique affecté de l'argument $2v' - 2\varpi$, ce qui donne

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2 + \frac{15}{4}\,\mathrm{m}^2\cos(2v' - 2\varpi),$$

ou bien, en posant $v' = \mathrm{m}v + \Lambda$,

$$(4)\ \ldots\ldots\ \frac{d\varpi}{dv} = \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2 + \frac{15}{4}\,\mathrm{m}^2\cos(2\mathrm{m}v - 2\varpi + 2\Lambda).$$

En faisant abstraction du terme périodique et intégrant, l'on a d'abord $\varpi = \varpi_{,} + \frac{3}{4}m^2 v$. Donc, en substiuant cette valeur approchée de ϖ dans le second membre de l'équation (4), l'on aura

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{3}{4} m^2 + \frac{15}{4} m^2 \cos\left(2mv - \frac{3}{2} m^2 v - 2\varpi_{,} + 2\Lambda\right);$$

d'où l'on tire, en intégrant et prenant $\frac{m^2}{m - \frac{3}{4}m^2} = \frac{m^2}{m}$,

$$\varpi = \varpi_{,} + \frac{3}{4} m^2 v + \frac{15}{8} \cdot \frac{m^2}{m} \sin\left(2mv - \frac{3}{2} m^2 v - 2\varpi_{,} + 2\Lambda\right).$$

79. Actuellement, si l'on substitue cette fonction au lieu de ϖ dans le second membre de l'équation (4), il viendra

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{3}{4} m^2 + \frac{15}{4} m^2 \cos\left[2mv - \frac{3}{2}m^2 v - 2\varpi_{,} + 2\Lambda - \frac{15}{4} \cdot \frac{m^2}{m} \sin\left(2mv - \frac{3}{2}m^2 v - 2\varpi_{,} + 2\Lambda\right)\right].$$

Développant ce cosinus, rejetant les termes périodiques et les quantités d'un ordre supérieur au troisième, il est clair que l'on a

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{32} \cdot \frac{m^4}{m},$$

et par conséquent

$$\varpi = \varpi_{,} + \left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{32} \cdot \frac{m^4}{m}\right) v.$$

Le second terme de cette expression est, comme l'on voit, semblable à celui qui entre dans la valeur analogue de θ trouvée plus haut; mais il en diffère essentiellement à l'égard du coefficient numérique $\frac{225}{32}$, qui est beaucoup plus grand que la fraction $\frac{9}{32}$. Cette circonstance étant combinée avec la valeur numérique du rapport représenté par m, que l'on sait être presqu'égal à un 13.ième, rend le terme du troisième ordre, $\frac{225}{32} \cdot \frac{m^4}{m} v = \frac{225}{32 \times 13} m^2 v$, peu différent du premier terme $\frac{3}{4} m^2 v$ du second ordre. Voilà pourquoi la première approximation a pu suffire à *Newton* pour avoir le mouvement progressif du nœud; tandis qu'elle était absolument insuffisante pour avoir celui du périgée.

Clairaut fit sentir le premier aux Géomètres toute la force de cette difficulté. Il ne songea pas d'abord à la grandeur absolue des termes

qui devaient suivre le premier, ce qui l'a jeté dans bien de recherches divergentes. Mais il les conduisit en homme de génie, et sut reconnaître son erreur au moment où il considérait le carré de la force perturbatrice pour un objet qui n'était pas dirigé vers la recherche du second terme (Voyez les Mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour les années 1745, 1746). Cet exemple frappant de l'influence du coefficient numérique $\frac{225}{32}$ mérite toute l'attention : l'on trouvera dans cet ouvrage une foule de cas semblables, tous propres à démontrer que dans la théorie de la Lune la véritable difficulté consiste dans la recherche des coefficiens numériques qui affectent une quantité d'un ordre donné. L'on est fort peu avancé, lorsque l'on sait l'ordre d'un terme, si l'on n'a pas au moins une connaissance approchée de la grandeur de son coefficient numérique.

80. Le calcul que nous venons d'exposer fait connaître en même tems le principal terme périodique qui entre dans l'expression de θ et ϖ; de sorte que, en retenant seulement ce terme, les formules précédentes donnent

$$\theta = \frac{3}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \sin(2mv + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{,} - 2\Lambda),$$

$$\varpi = \frac{15}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \sin(2mv - \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\varpi_{,} + 2\Lambda).$$

Mais il est évident que pour rendre ces deux argumens plus exacts il faudrait écrire

$$\left(\frac{3}{2}\mathrm{m}^2 - \frac{9}{16} \cdot \frac{\mathrm{m}^4}{m}\right)v - 2\theta_{,} \text{ au lieu de } \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\theta_{,},$$

et $$-\left(\frac{3}{2}\mathrm{m}^2 + \frac{225}{16} \cdot \frac{\mathrm{m}^4}{m}\right)v - 2\varpi_{,} \text{ au lieu de } -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2 v - 2\varpi_{,}.$$

L'on pourra même remplacer θ et ϖ par les formules qui donnent plus exactement la partie de ces fonctions qui croît proportionnellement à l'arc v, lorsque celle-ci sera connue par les développemens ultérieurs. Ainsi, en faisant pour plus de simplicité

$$1 - g = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2 + \frac{9}{32} \cdot \frac{\mathrm{m}^4}{m} + \text{etc.},$$

$$1 - c = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 + \frac{225}{32} \cdot \frac{\mathrm{m}^4}{m} + \text{etc.},$$

et $1 - m = E$, l'on aura

$$\theta = -\frac{3}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \sin(2Ev - 2gv + 2\theta_{,} - 2\Lambda),$$

$$\varpi = -\frac{15}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \sin(2Ev - 2cv + 2\varpi_{,} - 2\Lambda);$$

ou bien, *en convenant* d'écrire seulement gv au lieu de $gv - \theta_{,}$; cv au lieu de $cv - \varpi_{,}$; mv au lieu de $mv + \Lambda$; et de désigner en général par $\delta\theta$, $\delta\varpi$ la partie périodique de θ et de ϖ, l'on posera

$$\delta\theta = -\frac{3}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \sin(2E - 2g)\,v,$$

$$\delta\varpi = -\frac{15}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \sin(2E - 2c)\,v.$$

Recherche du premier terme du coefficient de l'Évection en latitude, de l'Évection en longitude, de la Variation et de l'Équation annuelle.

81. Il est d'abord évident que le terme périodique du premier ordre qui entre dans $\delta\theta$, doit influer sur la latitude s, puisque l'on a $s = \gamma \sin(v - \theta)$; mais il n'est pas moins clair qu'il faut avoir le terme correspondant qui entre dans l'expression de la variable γ, si l'on veut connaître l'inégalité qui en résulte sur la latitude. Pour cela considérons l'équation (Voyez n.° 68)

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{1}{h^2}\left\{\Omega_{(1)} - \gamma \cos(v-\theta)\,\frac{d\Omega}{u^2\,dv}\right\}\cos(v-\theta).$$

En y substituant pour $\frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$, $\frac{1}{h^2} \cdot \frac{d\Omega}{u^2\,dv}$ leurs valeurs posées dans le n.° 75, l'on aura

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4}\gamma \sin(2v - 2\theta)\left(1 + \cos(2v - 2v')\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4}\gamma \cos^2(v-\theta)\sin(2v - 2v').$$

Donc, en considérant seulement l'argument $2v' - 2\theta$, il viendra

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\,\gamma \sin(2v' - 2\theta),$$

ou bien

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\,\gamma \sin(2mv - 2\theta + 2\Lambda).$$

Faisant dans cette équation $\theta = \theta_{,} + (1 - g)v$, $1 - m = E$, l'on pourra écrire d'après la convention établie plus haut

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{4} m^2 \gamma \sin(2E - 2g)v.$$

Pour intégrer cette expression, il suffit ici d'y faire $\gamma = \gamma_{,}$, et de prendre $\frac{1}{2E - 2g} = -\frac{1}{2m}$. Alors, en nommant $\delta\gamma$ la partie périodique de γ, l'on obtient

$$\delta\gamma = \frac{3}{8} \cdot \frac{m^2}{m} \gamma_{,} \cos(2E - 2g)v.$$

En substituant cette valeur de $\delta\gamma$ et la précédente de $\delta\theta$ dans l'équation $s = \gamma \sin(v - \theta)$, après l'avoir mise sous la forme

$$s = (\gamma_{,} + \delta\gamma) \sin(gv - \delta\theta),$$

l'on trouvera, en développant et négligeant les quantités d'un ordre supérieur au second,

$$s = \gamma_{,} \sin gv + \frac{3}{8} \cdot \frac{m^2}{m} \gamma_{,} \sin(2E - g)v.$$

L'argument $(2E - g)v$ qui constitue, comme l'on voit, le second terme de l'expression de la latitude, est celui que nous nommons, par analogie, *Évection en latitude.*

Au reste il est clair que cette même analyse donne, en conservant le diviseur $2E - 2g$,

$$\delta\theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2}{2E - 2g} \sin(2E - 2g)v; \qquad \delta\gamma = -\frac{3}{4} \cdot \frac{m^2\gamma_{,}}{2E - 2g} \cos(2E - 2g)v.$$

Donc, en substituant ces valeurs dans celle de s, l'on aurait

$$s = \gamma_{,} \sin gv - \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2\gamma_{,}}{2E - 2g} \sin(2E - g)v.$$

Mais, en employant cette forme, il importe de remarquer que ce coefficient de l'argument $(2E - g)v$ ne saurait être exact au-delà des quantités qui passent le second ordre.

82. Considérons maintenant la variable e, et cherchons le terme périodique analogue à celui qui entre dans l'expression précédente de $\delta\varpi$, c'est-à-dire le terme affecté de l'argument $(2E - 2c)v$. Pour cela,

il suffit de réduire l'expression de $\frac{de}{dv}$ trouvée dans le n.° 68 à celle-ci

$$\frac{de}{dv} = - \sin(v-\varpi)\frac{\Omega_{(2)}}{\sigma} + \left\{\frac{3}{2}e + 2\cos(v-\varpi) + \frac{e}{2}\cos(2v-2\varpi)\right\}\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}.$$

En substituant pour $\frac{\Omega_{(2)}}{\sigma}$, $\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}$, $\frac{1}{u^3}$, $\frac{1}{u^4}$ leurs valeurs posées dans le n.° 77, l'on aura

$$\frac{de}{dv} = \frac{1}{2}\mathrm{m}^2\sin(v-\varpi)\big(1+3\cos(2v-2v')\big)\big(1-3e\cos(v-\varpi)\big)$$
$$-\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\sin(2v-2v')\big(1-4e\cos(v-\varpi)\big)\left\{\frac{3}{2}e+2\cos(v-\varpi)+\frac{e}{2}\cos(2v-2\varpi)\right\}.$$

En considérant seulement l'argument $2v'-2\varpi$, cette équation donne

$$\frac{de}{dv} = \left(-\frac{9}{8}-\frac{21}{8}\right)e\,\mathrm{m}^2\sin(2v'-2\varpi) = -\frac{15}{4}e\,\mathrm{m}^2\sin(2v'-2\varpi).$$

Donc, en faisant $v' = mv + \Lambda$, $\varpi = \varpi_{,} + (1-c)v$, il viendra

$$\frac{de}{dv} = \frac{15}{4}e\,\mathrm{m}^2\sin(2E-2c)v.$$

Maintenant, si l'on fait dans le second membre de cette équation $e = e_{,}$, et $\frac{1}{2E-2c} = -\frac{1}{2m}$, l'on obtient, en intégrant,

$$e = e_{,} + \frac{15}{8}e_{,}\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cos(2E-2c)v;$$

et en nommant δe la partie périodique de e, l'on aura

$$\delta e = \frac{15}{8}e_{,}\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cos(2E-2c)v.$$

En réduisant la valeur de $t+f$ trouvée dans le n.° 63 à

$$t+f = -\frac{2h_{,}^3}{\sigma^2}e\sin(v-\varpi),$$

et écrivant

$$t+f = -\frac{2h_{,}^3}{\sigma^2}(e_{,}+\delta e)\sin(cv-\delta\varpi),$$

l'on obtiendra, au moyen de cette valeur de δe et de celle de $\delta\varpi$,

$$t+f = -\frac{15}{4}\cdot\frac{h_{,}^3}{\sigma^2}e_{,}\frac{\mathrm{m}^2}{m}\sin(2E-c)v.$$

Tel est le *premier* terme du coefficient de l'inégalité lunaire que l'on nomme *Évection en longitude.* Comme l'analyse que nous venons d'exposer donne

$$\delta e = -\frac{15}{4}\cdot\frac{e_{,}\mathrm{m}^2}{2E-2c}\cos(2E-2c)v\ ;\qquad \delta\varpi = \frac{15}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{2E-2c}\sin(2E-2c)v,$$

il est évident que, en substituant ces valeurs dans celle de $t+f$, l'on aurait

$$t+f = \frac{15}{2}\cdot\frac{h_{,}^3 e_{,}}{\sigma^2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{2E-2c}\sin(2E-c)v.$$

Mais, analytiquement parlant, cette formule ne saurait être exacte à l'égard des termes d'un ordre supérieur au second.

Il est presque superflu d'ajouter qu'un simple coup d'œil jeté sur la valeur de $\frac{df}{dv}$ donnée dans le n.° 68 suffit pour démontrer que la variable f ne renferme aucun terme du second ordre affecté de l'argument $(2E-c)v$.

83. Pour donner un exemple fort simple des cas où il est nécessaire de considérer la partie variable de la fonction h, cherchons le premier terme du coefficient de l'inégalité ayant pour argument $2Ev$, connue sous le nom de *Variation.* A cet effet remarquons d'abord que l'équation $\frac{d\cdot h^2}{dv} = \frac{2d\Omega}{u^2 dv}$ peut être réduite à celle-ci

$$\frac{d\cdot h^2}{dv} = -\frac{3M'u'^3}{u^4}\sin(2v-2v').$$

Maintenant, si l'on fait dans cette équation $u = \frac{\sigma}{h_{,}^2}$, $u' = \frac{1}{a'}$ et $v' = mv+\Lambda$, l'on aura

$$\frac{d\cdot h^2}{dv} = -3h_{,}^2\,\mathrm{m}^2\sin 2Ev\ ;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$h^2 = h_{,}^2 + \frac{3h_{,}^2\mathrm{m}^2}{2E}\cos 2Ev.$$

Il suit de là que l'on a

$$h^3 = h_{,}^3 + \frac{9h_{,}^3\mathrm{m}^2}{4E}\cos 2Ev.$$

En réduisant la valeur de $t+f$ à (Voyez n.° 63)

$$t+f = \int A' dv - \frac{h_I^3}{\sigma^2} 2e\, sin(v-\varpi),$$

et faisant $A' = \frac{h^3}{\sigma^2}$, nous aurons

$$\int A' dv = \frac{9}{8} \cdot \frac{h_I^3 \mathrm{m}^2}{\sigma^2 E^2} sin\, 2Ev.$$

Mais l'expression de $\frac{df}{dv}$ trouvée dans le n.° 68 peut être ici réduite à

$$\frac{df}{dv} = \frac{2h^3 \Omega_{(2)}}{\sigma^3} = -\frac{3h^3 M' u'^3}{\sigma^3 u^3} cos(2v-2v').$$

Donc, en prenant seulement le premier terme de cette expression, l'on aura

$$\frac{df}{dv} = -\frac{3h_I^3}{\sigma^2} \mathrm{m}^2 cos\, 2Ev;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$f = -\frac{3h_I^3 \mathrm{m}^2}{\sigma^2 2E} sin\, 2Ev.$$

Substituant cette valeur de f et celle de $\int A' dv$ dans la valeur de $t+f$ posée plus haut, nous aurons

$$t = \frac{h_I^3 \mathrm{m}^2}{\sigma^2}\left(\frac{9}{8E^2} + \frac{3}{2E}\right) sin\, 2Ev - \frac{h_I^3}{\sigma^2} 2e\, sin(v-\varpi),$$

ou bien, en prenant $E = 1 - m = 1$,

$$t = \frac{21}{8} \cdot \frac{h_I^3 \mathrm{m}^2}{\sigma^2} sin\, 2Ev - \frac{h_I^3}{\sigma^2} 2e\, sin(v-\varpi).$$

En réduisant les valeurs de $e\frac{d\varpi}{dv}$, $\frac{de}{dv}$ trouvées dans les n.os 77, 82 à ces termes

$$e\frac{d\varpi}{dv} = -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2 cos(2v-2v')\, cos(v-\varpi) - 3\mathrm{m}^2 sin(2v-2v')\, sin(v-\varpi)$$

$$= -\frac{9}{4}\mathrm{m}^2 cos(v-2v'+\varpi) + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 cos(3v-2v'-\varpi);$$

$$\frac{de}{dv} = \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 cos(2v-2v')\, sin(v-\varpi) - 3\mathrm{m}^2 sin(2v-2v')\, cos(v-\varpi)$$

$$= -\frac{9}{4}\mathrm{m}^2 sin(v-2v'+\varpi) - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 sin(3v-2v'-\varpi);$$

et remplaçant v' par $mv + \Lambda$, ϖ par $\varpi_{,} + (1 - c)v$, il viendra

$$e\frac{d\varpi}{dv} = -\frac{9}{4}\,\text{m}^2 \cos(2E - c)\,v + \frac{3}{4}\,\text{m}^2 \cos(2E + c)\,v,$$

$$\frac{de}{dv} = -\frac{9}{4}\,\text{m}^2 \sin(2E - c)\,v - \frac{3}{4}\,\text{m}^2 \sin(2E + c)\,v.$$

En intégrant ces expressions et négligeant les quantités d'un ordre supérieur au second, il est clair que l'on a

$$e_{,}\delta\varpi = -\frac{9}{4}\,\text{m}^2 \sin(2E - c)\,v + \frac{1}{4}\,\text{m}^2 \sin(2E + c)\,v,$$

$$\delta e = \frac{9}{4}\,\text{m}^2 \cos(2E - c)\,v + \frac{1}{4}\,\text{m}^2 \cos(2E + c)\,v.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$2e \sin(v - \varpi) = 2\delta e \sin c\,v - 2e_{,}\delta\varpi \cos c\,v,$$

et conservant seulement les termes affectés de l'argument $2Ev$, l'on a

$$2e \sin(v - \varpi) = 4\,\text{m}^2 \sin 2Ev.$$

Donc, en substituant cette valeur dans celle de t, il viendra

$$t = -\frac{11}{8}\cdot\frac{h_{,}^3\text{m}^2}{\sigma^2} \sin 2Ev.$$

84. Cherchons maintenant le premier terme du coefficient de l'inégalité ayant pour argument $c'mv - \varkappa'$, connue sous le nom d'*Équation annuelle*. En réduisant la valeur de $\frac{df}{dv}$ trouvée dans le n.° 68 à

$$\frac{df}{dv} = \frac{2h^3}{\sigma^3}\,\Omega_{(2)} = -\frac{M'h^3u'^3}{\sigma^3u^3},$$

et faisant dans cette expression (Voyez n.° 55)

$$u' = \frac{1}{a'}\left(1 + \varepsilon' \cos(c'v' - \varkappa')\right),$$

nous aurons

$$\frac{df}{dv} = -\frac{\text{m}^2h_{,}^3}{\sigma^2}\left(1 + \varepsilon' \cos(c'v' - \varkappa')\right)^3.$$

Donc, en développant ce binome, et retenant seulement le terme affecté de l'argument $c'v' - \varkappa'$, l'on a

$$\frac{df}{dv} = -\frac{3\text{m}^2h_{,}^3}{\sigma^2}\,\varepsilon' \cos(c'v' - \varkappa').$$

Maintenant, si l'on fait $v' = mv + \Lambda$, l'on obtient en intégrant

$$f = -\frac{3h_i^3}{\sigma^2} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{c'm}\, \varepsilon' \sin(c'mv - \varkappa').$$

En examinant la valeur complète de $t + f$, l'on comprendra aussitôt que pour avoir seulement le premier terme de cette inégalité il suffit de poser l'équation $t + f = 0$, ce qui donne

$$t = \frac{3h_i^3}{\sigma^2} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{c'm}\, \varepsilon' \sin(c'mv - \varkappa').$$

On voit par-là que l'intégration abaisse au second ordre le coefficient du troisième ordre qui se trouve dans l'expression de $\frac{df}{dv}$.

Déterminer le premier terme du coefficient de l'inégalité ayant pour argument le double de la distance angulaire du périgée au nœud de l'orbite, qui entre dans l'expression des quatre variables γ, θ, e, ϖ.

85. Cette inégalité, dont l'argument est $2\varpi - 2\theta$, est une des plus remarquables dans la théorie de la Lune par les difficultés d'analyse que présente le calcul de son coefficient.

En réduisant l'expression de $\frac{d\gamma}{dv}$ posée dans le n.° 81 à

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4} \gamma \sin(2v - 2\theta) = -\frac{3}{4} \mathrm{m}^2 \gamma \sin(2v - 2\theta) [\sqrt{1+ss} + e\cos(v - \varpi)]^{-4},$$

et prenant

$$[\sqrt{1+ss} + e\cos(v - \varpi)]^{-4} = 1 + 5e^2 \cos(2v - 2\varpi),$$

nous aurons

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{15}{8} \mathrm{m}^2 \gamma e^2 \sin(2\varpi - 2\theta).$$

En faisant dans le second membre de cette équation $\gamma = \gamma_i$, $e = e_i$, $\varpi = \varpi_i + (1 - c)v$, $\theta = \theta_i + (1 - g)v$, et intégrant ensuite, il est clair que l'on a

$$\delta\gamma = \frac{15}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 \gamma_i e_i^2}{2g - 2c} \cos(2g - 2c)v.$$

Les valeurs de g, c rapportées dans le n.° 80 donnent, en prenant seulement le premier terme, $\frac{1}{2g-2c} = \frac{1}{3m^2}$.
Donc, en substituant cette valeur, nous aurons

$$\delta\gamma = \frac{5}{8}\gamma_, e_,^2 \cos(2g-2c)v.$$

On doit remarquer que cette intégration abaisse de deux unités l'ordre du coefficient qui se trouve dans l'expression de $\frac{d\gamma}{dv}$, et qu'elle donne naissance au coefficient $\frac{5}{8}\gamma_, e_,^2$, qui est, comme l'on voit, indépendant du facteur m^2 de la force perturbatrice.

86. Cherchons maintenant le terme correspondant qui entre dans la valeur de θ. Pour cela nous partirons de l'équation

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{M'u'^3}{h^2u^4}\left\{1-\cos(2v-2\theta)\right\}$$

qui résulte de l'expression de $\frac{d\theta}{dv}$ posée dans le n.° 75. En faisant ici, comme dans le numéro précédent,

$$[\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)]^{-4} = 1+5e^2\cos(2v-2\varpi),$$

l'on trouvera

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{15}{8}m^2e^2\cos(2\varpi-2\theta).$$

Donc, en intégrant, il viendra

$$\delta\theta = \frac{15}{8}\cdot\frac{m^2e_,^2}{2g-2c}\cos(2g-2c)v,$$

ou bien, en posant $\frac{1}{2g-2c} = \frac{1}{3m^2}$,

$$\delta\theta = \frac{5}{8}e_,^2\sin(2g-2c)v.$$

87. Si l'on réduit l'expression de $\frac{de}{dv}$ du n.° 68 aux termes suivans

$$\frac{de}{dv} = -\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\sin(v-\varpi)\cdot\Omega_{(2)}$$
$$+\left\{\frac{3}{2}\gamma\cos(\varpi-\theta)+\frac{1}{2}\gamma\cos(2v-\theta-\varpi)+2e\gamma\cos(v-\theta)\right\}\frac{\Omega_{(1)}}{h^2},$$

l'on verra aisément que pour avoir seulement le premier terme du coefficient affecté de l'argument $2\varpi-2\theta$, il suffit de prendre

$$-\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\Omega_{(2)} = \frac{(1+\gamma\gamma)M'u'^3}{2\sigma u^3} = \frac{1}{2}\mathrm{m}^2\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-3}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{m}^2\left\{1-\frac{3}{2}e\gamma^2\cos(v+\varpi-2\theta)\right\};$$
$$\frac{\Omega_{(1)}}{h^2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M'u'^3\gamma\sin(v-\theta)}{h^2u^4} = -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\gamma\sin(v-\theta)\left\{1-4e\cos(v-\varpi)\right\}$$
$$= -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\left\{\gamma\sin(v-\theta)-2e\gamma\sin(2v-\varpi-\theta)-2e\gamma\sin(\varpi-\theta)\right\}.$$

Cela posé, l'on trouvera

$$\frac{de}{dv} = \left(\frac{3}{8}+\frac{9}{4}\right)\mathrm{m}^2e\gamma^2\sin(2\varpi-2\theta) = \frac{21}{8}\mathrm{m}^2e\gamma^2\sin(2\varpi-2\theta).$$

En intégrant cette expression, nous aurons

$$\delta e = -\frac{21}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2e_{,}\gamma_{,}^2}{2g-2c}\cos(2g-2c)v,$$

ou bien, en prenant $\frac{1}{2g-2c} = \frac{1}{3\mathrm{m}^2}$,

$$\delta e = -\frac{7}{8}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)v.$$

88. Pour avoir le terme correspondant qui entre dans l'expression de ϖ, nous réduirons l'expression de $e\frac{d\varpi}{dv}$ donnée dans le n.° 68 à celle-ci

$$e\frac{d\varpi}{dv} = \frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\cos(v-\varpi)\cdot\Omega_{(2)}+\left\{-\frac{3}{2}\gamma\sin(\varpi-\theta)+\frac{1}{2}\gamma\sin(2v-\theta-\varpi)\right\}\frac{\Omega_{(1)}}{h^2}.$$

Maintenant, à l'aide des valeurs précédentes de $\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}\Omega_{(2)}$, $\frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$, l'on voit aussitôt que l'on a

$$e\frac{d\varpi}{dv} = \left(\frac{3}{8}+\frac{9}{4}\right)\mathrm{m}^2e\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta),$$

ou bien

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{21}{8}\mathrm{m}^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta).$$

Donc, en intégrant cette expression, il viendra

$$\delta\varpi = \frac{21}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2\gamma_{,}^2}{2g-2c}\sin(2g-2c)v;$$

et en posant $\frac{1}{2g-2c} = \frac{1}{3\mathrm{m}^2}$, l'on aura

$$\delta\varpi = \frac{7}{8}\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v.$$

Conséquences qui résultent de l'analyse précédente.

89. Cette valeur de $\delta\varpi$ et celle de δe trouvées plus haut montrent d'une manière particulière l'influence de la perturbation sur l'inégalité dont l'argument est $(2g-c)v$. Pour avoir le premier terme de cette inégalité, il faut d'abord réduire l'expression de $t+f$ trouvée dans le n.° 63 à ces termes

$$t+f=\int A'dv+\frac{h^3}{\sigma^2}\left\{-2e\,sin(v-\varpi)-\frac{3}{4}e\gamma^2\,sin(v+\varpi-2\theta)\right\},$$

et poser ensuite

$$t+f=\int A'dv+\frac{h_{\prime}^3}{\sigma^2}\left\{-2\delta e\,sin\,cv+2e_{\prime}\delta\varpi\,cos\,cv-\frac{3}{4}e_{\prime}\gamma_{\prime}^2\,sin(2g-c)v\right\}.$$

Maintenant, si l'on fait ici

$$\delta e=-\frac{21}{8}\cdot\frac{m^2e_{\prime}\gamma_{\prime}^2}{2g-2c}cos(2g-2c)v;\qquad e_{\prime}\delta\varpi=\frac{21}{8}\cdot\frac{m^2e_{\prime}\gamma_{\prime}^2}{2g-2c}sin(2g-2c)v,$$

il est clair que l'on obtient

$$t+f=\int A'dv-\frac{h_{\prime}^3}{\sigma^2}e_{\prime}\gamma_{\prime}^2\left\{\frac{3}{4}-\frac{21}{4}\cdot\frac{m^2}{2g-2c}\right\}sin(2g-c)v.$$

Or nous avons $2g-2c=3m^2+$ etc.; ainsi il est évident que la perturbation ajoute un terme d'un signe contraire et à-peu-près double du coefficient elliptique (*). L'on peut aisément démontrer que le développement des quantités variables f et $\int A'dv$ ne peut donner aucun terme d'une forme identique à celle des deux précédens; donc, en posant $2g-2c=3m^2$, la valeur finale de $t+f$, après l'élimination des parties variables comprises dans e et γ, sera

$$t+f=\frac{h_{\prime}^3}{\sigma^2}v+\frac{h_{\prime}^3}{\sigma^2}e_{\prime}\gamma_{\prime}^2\,sin(2g-c)v.$$

(*) Mons. De Laplace (Voyez Mécanique céleste, tome III, pag. 187) après avoir donné la valeur de t en fonction de v, relative à une ellipse dont la longitude du périgée et celle du nœud ont un mouvement proportionnel à v, ajoute que les coefficiens de cette valeur sont *un peu modifiés* par l'action du Soleil. L'on voit par notre analyse que cette remarque n'est pas appliquable au coefficient de l'argument $2g-c$, ni à plusieurs autres de la même espèce, sur lesquels l'action du Soleil ne produit pas seulement une petite modification, mais un changement total de la valeur elliptique.

90. Les valeurs de $\delta\gamma$ et δe trouvées dans les n.os 85, 87 résolvent immédiatement une difficulté que l'on pourrait se proposer en considérant l'intégrale $\int A' dv$ qui entre dans l'expression de $t+f$. En prenant pour A' sa valeur développée dans le n.° 63, nous avons les termes suivans

$$\int A' dv = \int \frac{h^3}{\sigma^2} dv + \frac{3}{2}\int \frac{h^3}{\sigma^2}(e^2 + \gamma^2)\, dv + \frac{3}{4}\int \frac{h^3}{\sigma^2} e^2 \gamma^2 \cos(2\varpi - 2\theta)\, dv.$$

Donc, en faisant $\varpi = \varpi_, + (1-c)v$, $\theta = \theta_, + (1-g)v$, l'on voit aussitôt que le dernier terme de cette équation introduira dans la valeur de t le terme

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{h_,^3}{\sigma^2} \cdot \frac{e_,^2 \gamma_,^2}{2g-2c} \sin(2g-2c)v,$$

dont le coefficient est, analytiquement parlant, du second ordre. Mais il est essentiel de remarquer que le terme du second ordre que nous venons d'indiquer se trouve exactement détruit par le terme analogue donné par le développement de l'intégrale $\frac{3}{2}\int \frac{h^3}{\sigma^2}(e^2 + \gamma^2)dv$. En effet nous avons les équations

$$\gamma = \gamma_, + \frac{15}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 \gamma_, e_,^2}{2g-2c} \cos(2g-2c)v,$$

$$e = e_, - \frac{21}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 e_, \gamma_,^2}{2g-2c} \cos(2g-2c)v,$$

lesquelles donnent

$$\frac{3}{2}(e^2 + \gamma^2) = -\frac{9}{4} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 e_,^2 \gamma_,^2}{2g-2c} \cos(2g-2c)v;$$

partant l'on a

$$\int A' dv = \int \frac{h^3}{\sigma^2} dv + \frac{h_,^3}{\sigma^2} \cdot \frac{e_,^2 \gamma_,^2}{2g-2c} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{9}{4} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{2g-2c} \right\} \sin(2g-2c)v.$$

Mais les valeurs de c et de g trouvées dans le n.° 80 donnent $2g - 2c = 3\mathrm{m}^2 + \frac{27}{2} \cdot \frac{\mathrm{m}^4}{m}$. Ainsi il est évident que le coefficient numérique de ce terme du second ordre est parfaitement nul.

91. En considérant de nouveau l'expression de $\int A' dv$, et remarquant que dans les n.os 81, 82 l'on a trouvé

$$\delta\gamma = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 \gamma_,}{2E-2g} \cos(2E-2g)v; \qquad \delta e = -\frac{15}{4} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 e_,}{2E-2c} \cos(2E-2c)v,$$

l'on pourrait, au premier coup d'œil, penser que ces deux inégalités du *second ordre* deviennent du *premier ordre dans l'expression du tems* t, à cause de la nouvelle intégration qu'il faut exécuter pour obtenir la valeur correspondante de $\frac{3}{2}\int\frac{h^3}{\sigma^2}(e^2+\gamma^2)dv$. Mais il est facile de démontrer que les termes du premier ordre ainsi formés sont exactement détruits par l'intégrale $\int\frac{h^3}{\sigma^2}dv$. En effet reprenons l'équation

$$\frac{d.h^2}{dv} = -\frac{3M'u'^3}{u^4}\sin(2v-2v')$$

posée dans le n.° 83. En y substituant pour v sa valeur elliptique, nous aurons

$$\frac{d.h^2}{dv} = -\frac{3M'u'^3}{\sigma^4}h^8(1+\gamma\gamma)^4\sin(2v-2v')\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-4}.$$

Donc, en prenant

$$\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-4} = 1+\gamma^2\left(1+\frac{15}{2}e^2\right)\cos(2v-2\theta)+5e^2\left(1-\frac{3}{2}\gamma^2\right)\cos(2v-2\varpi),$$

l'on obtiendra

$$\frac{d.h^2}{h^8dv} = \frac{m^2(1+\gamma\gamma)^4}{h_{,}^6}\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{45}{4}e^2\right)\gamma^2\sin(2v'-2\theta)+\left(\frac{15}{2}-\frac{45}{4}\gamma^2\right)e^2\sin(2v'-2\varpi)\right\}.$$

En posant $(1+\gamma\gamma)^4 = 1+4\gamma\gamma$, nous aurons

$$\frac{d.h^2}{h^8dv} = \frac{m^2}{h_{,}^6}\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{45}{4}e^2\right)\gamma^2\sin(2v'-2\theta)+\left(\frac{15}{2}+\frac{75}{4}\gamma^2\right)e^2\sin(2v'-2\varpi)\right\}.$$

En conservant seulement les termes multipliés par $m^2\gamma_{,}^2$, $m^2e_{,}^2$, cette équation donne

$$\frac{d.h^2}{h^8dv} = -\frac{m^2}{h_{,}^6}\left\{\frac{3}{2}\gamma_{,}^2\sin(2E-2g)v+\frac{15}{2}e_{,}^2\sin(2E-2c)v\right\};$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$\frac{1}{h^6} = \frac{1}{h_{,}^6}\left\{1-\frac{9}{2}\cdot\frac{m^2\gamma_{,}^2}{2E-2g}\cos(2E-2g)v-\frac{45}{2}\cdot\frac{m^2e_{,}^2}{2E-2c}\cos(2E-2c)v\right\}.$$

Il suit de là que l'on a

$$\frac{h^3}{\sigma^2} = \frac{h_{,}^3}{\sigma^2}\left\{1+\frac{9}{4}\cdot\frac{m^2\gamma_{,}^2}{2E-2g}\cos(2E-2g)v+\frac{45}{4}\cdot\frac{m^2e_{,}^2}{2E-2c}\cos(2E-2c)v\right\},$$

et par conséquent

$$\int \frac{h^3}{\sigma^2} d\nu = \frac{h_i^3}{\sigma^2} \left\{ \frac{9}{4} \cdot \frac{m^2 \gamma_i^2}{(2E-2g)^2} \sin(2E-2g)\nu + \frac{45}{4} \cdot \frac{m^2 e_i^2}{(2E-2c)^2} \sin(2E-2c)\nu \right\}.$$

Ainsi il est évident que ces deux termes du *premier* ordre détruisent exactement ceux du même ordre donnés par l'intégrale $\frac{3}{2} \cdot \frac{h_i^3}{\sigma^2} \int (e^2 + \gamma^2) d\nu$.

Il est par-là démontré que les deux inégalités dont les argumens sont $(2E - 2g)\nu$, $(2E - 2c)\nu$, doivent se trouver dans t avec des coefficiens du second ordre au moins. Ainsi, à l'égard de ces deux argumens, l'intégrale $\int A' d\nu$ ne peut pas renfermer des termes d'un ordre inférieur à ceux que l'on obtiendrait en calculant la valeur de f.

92. Reprenons la considération de l'argument $(2g - 2c)\nu$. L'analyse exposée dans le n.° 90 démontre que cette inégalité doit se trouver dans t avec un coefficient du troisième ordre de la forme $B \frac{e_i^2 \gamma_i^2}{m}$; mais elle est insuffisante pour donner la valeur absolue du coefficient numérique désigné par B. Car l'on n'y tient aucun compte ni du terme analogue donné par l'intégrale $\int \frac{h^3}{\sigma^2} d\nu$, ni du second terme, qui dans l'expression de γ et de e affecte l'inégalité ayant pour argument $(2g - 2c)\nu$. Nous allons en conséquence continuer nos recherches sur cette importante inégalité, afin de mettre en évidence *toutes* les parties constituantes le *second* terme de son coefficient dans l'expression de l'intégrale $\int A' d\nu$. L'on verra qu'elles se détruisent complétement comme celles du premier ordre, et qu'en conséquence il faut nécessairement ranger cette inégalité parmi celles qui sont d'un ordre supérieur au troisième.

Déterminer pour les deux variables γ et e le second terme du coefficient de l'inégalité ayant pour argument $(2g - 2c)\nu$.

93. L'équation

$$\frac{d\gamma}{d\nu} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M' u'^3}{h^2 u^4} \gamma \sin(2\nu - 2\theta)[1 + \cos(2\nu - 2\nu')] + \frac{3}{2} \cdot \frac{M' u'^3}{h^2 u^4} \gamma \cos^2(\nu - \theta) \sin(2\nu - 2\nu')$$

posée dans le n.° 81 donne, en considérant seulement les deux

argumens $2v' - 2\theta$, $2v' - 2\varpi$;

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M' u'^3}{\sigma^4} h^6 (1 + \gamma\gamma)^4 (1 - \gamma^2 + 5e^2) \sin(2v' - 2\theta) - \frac{15}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 h^6 e^2}{h_i^6} \sin(2v' - 2\varpi).$$

En faisant $(1 + \gamma\gamma)^4 = 1 + 4\gamma\gamma$, nous aurons

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{h_i^6} h^6 (1 + 3\gamma^2 + 5e^2) \sin(2v' - 2\theta) - \frac{15}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 h^6 e^2}{h_i^6} \sin(2v' - 2\varpi).$$

Or nous avons

$$\sin(2v' - 2\theta) = -\sin[(2E - 2g)v + 2\delta\theta]; \quad \sin(2v' - 2\varpi) = -\sin[(2E - 2c)v + 2\delta\varpi],$$

ou bien, en développant,

$$\sin(2v' - 2\theta) = -\sin(2E - 2g)v - 2\delta\theta \cos(2E - 2g)v + 2(\delta\theta)^2 \sin(2E - 2g)v,$$

$$\sin(2v' - 2\varpi) = -\sin(2E - 2c)v - 2\delta\varpi \cos(2E - 2c)v + 2(\delta\varpi)^2 \sin(2E - 2c)v;$$

donc, pour avoir seulement le terme multiplié par $\frac{\mathrm{m}^2}{m} e_i^2 \sin(2g - 2c)v$, qui se trouve dans l'expression de $\frac{d\gamma}{\gamma dv}$, il est permis de n'avoir aucun égard à la fonction $e^2 \sin(2v' - 2\varpi)$, ce qui donne

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{h_i^6} h^6 (1 + 5e^2) \sin(2v' - 2\theta),$$

et nous montre la nécessité de chercher le terme affecté de l'argument $(2E - 2c)v$, qui entre dans l'expression de $\delta\theta$, afin d'avoir le terme qui naît du produit $-2\delta\theta \cos(2E - 2g)v$.

94. Pour cela remarquons que l'expression de $\frac{d\theta}{dv}$ posée dans le n.° 75 donne

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M' u'^3}{h^2 u^4} \cos(2v - 2v').$$

De là l'on conclut d'abord

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4} \mathrm{m}^2 \cos(2v - 2v') [1 + 5e^2 \cos(2v - 2\varpi)],$$

et ensuite

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{15}{4} \mathrm{m}^2 e^2 \cos(2v' - 2\varpi).$$

L'équation (1) rapportée dans le n.° 75 fait voir que la valeur de $\frac{d\theta}{dv}$ renferme aussi le terme $\frac{3}{4}m^2 \cos(2v' - 2\theta)$: ainsi, pour la recherche dont il est ici question, nous poserons l'équation

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{4}m^2 \cos(2v' - 2\theta) - \frac{15}{8}m^2 e^2 \cos(2v' - 2\varpi),$$

de laquelle l'on conclut celle-ci

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{4}m^2 \cos(2E - 2g)v - \frac{15}{8}m^2 e_{,}^2 \cos(2E - 2c)v - \frac{3}{2}m^2 \delta\theta \sin(2E - 2g)v.$$

Donc, en prenant pour $\delta\theta$ la valeur $\delta\theta = \frac{5}{8}e_{,}^2 \sin(2g - 2c)v$ trouvée dans le n.° 86, il viendra

$$\frac{d\theta}{dv} = \left(-\frac{15}{8} + \frac{15}{32}\right)m^2 e_{,}^2 \cos(2E - 2c)v = -\frac{45}{32}m^2 e_{,}^2 \cos(2E - 2c);$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\delta\theta = \frac{45}{64} \cdot \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \sin(2E - 2c)v.$$

Pour avoir le terme analogue qui entre dans l'expression de $(\delta\theta)^2$, il suffit d'observer que d'après les résultats trouvés dans les n.ºs 80, 86 l'on a l'équation

$$\delta\theta = \frac{5}{8}e_{,}^2 \sin(2g - 2c)v - \frac{3}{8} \cdot \frac{m^2}{m} \sin(2E - 2g)v,$$

laquelle, en faisant le carré, donne

$$(\delta\theta)^2 = \frac{15}{64} \cdot \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \cos(2E - 2c)v.$$

95. Cela posé, l'on trouvera sans difficulté

$$-2h^6 \delta\theta \cos(2E - 2g)v = -\frac{45}{64} \cdot \frac{m^2}{m} h_{,}^6 e_{,}^2 \sin(2g - 2c)v,$$

$$+2h^6 (\delta\theta)^2 \sin(2E - 2g)v = -\frac{15}{64} \cdot \frac{m^2}{m} h_{,}^6 e_{,}^2 \sin(2g - 2c)v;$$

et à l'aide de l'expression de $\frac{1}{h^6}$ trouvée dans le n.° 91, l'on obtiendra

$$-h^6 \sin(2E - 2g)v = -\frac{45}{8} \cdot \frac{m^2}{m} h_{,}^6 e_{,}^2 \sin(2g - 2c)v.$$

Il suit de là que nous avons

$$h^6 \sin(2v' - 2\theta) = \left(-\frac{45}{64} - \frac{15}{64} - \frac{45}{8}\right)\frac{m^2}{m} h_,^6 e_,^2 \sin(2g - 2c)v$$

$$= -\frac{105}{16} \cdot \frac{m^2}{m} h_,^6 e_,^2 \sin(2g - 2c)v.$$

Pour obtenir le terme donné par la fonction

$$5h^6 e^2 \sin(2v' - 2\theta) = -5h_,^6 e^2 \sin(2E - 2g)v,$$

il suffit d'y substituer pour e^2 la valeur donnée par l'équation $e = e_, + \frac{15}{8} \cdot \frac{m^2}{m} e_, \cos(2E - 2c)v$ (Voy. n.° 82); par ce moyen l'on aura

$$-5h_,^6 e^2 \sin(2E - 2g)v = \frac{75}{8} \cdot \frac{m^2}{m} h_,^6 e_,^2 \sin(2g - 2c)v.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $\frac{d\gamma}{\gamma dv}$ posée vers la fin du n.° 93, l'on aura

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{m^4}{m} e_,^2 \left(-\frac{105}{16} + \frac{75}{8}\right) \sin(2g - 2c)v,$$

ou bien

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv} = -\frac{135}{64} \cdot \frac{m^4}{m} e_,^2 \sin(2g - 2c)v.$$

Maintenant, si l'on réunit ce terme avec celui trouvé dans le n.° 85, il viendra

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv} = \left(-\frac{15}{8} - \frac{135}{64} \cdot \frac{m^2}{m}\right) m^2 e_,^2 \sin(2g - 2c)v.$$

En intégrant cette expression, il est clair que l'on a

$$Log\left(\frac{\gamma}{\gamma_,}\right) = \frac{\left(\frac{15}{8} + \frac{135}{64} \cdot \frac{m^2}{m}\right) m^2 e_,^2}{2g - 2c} \cos(2g - 2c)v.$$

Les valeurs de c, g posées dans le n.° 80 donnent

$$\frac{m^2}{2g - 2c} = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2}{m} + \text{etc.};$$

partant nous avons

$$Log\left(\frac{\gamma}{\gamma_,}\right) = \left(\frac{5}{8} - \frac{135}{64} \cdot \frac{m^2}{m}\right) e_,^2 \cos(2g - 2c)v,$$

où le coefficient $-\frac{135}{64} = \frac{45}{64} - \frac{45}{16}$.

Donc, en passant des logarithmes aux nombres, l'équation précédente donnera

$$\gamma = \gamma_{,} + \left(\frac{5}{8} - \frac{135}{64} \cdot \frac{\text{m}^2}{m}\right) \gamma_{,} e_{,}^2 \cos(2g - 2c) v.$$

96. Pour avoir le terme analogue qui entre dans l'expression de e, il est nécessaire de nous procurer le terme affecté de l'argument $(2E - 2g)v$ qui entre dans la valeur de ϖ. A cet effet considérons l'équation

$$e \frac{d\varpi}{dv} = \frac{1+\gamma\gamma}{\sigma} \cos(v - \varpi) \cdot \Omega_{(2)}$$
$$+ \left\{ -\frac{3}{2}\gamma \sin(\varpi - \theta) + \frac{1}{2}\gamma \sin(2v - \theta - \varpi) \right\} \frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$$
$$+ \left\{ \frac{5}{4}\gamma^2 \sin(v + \varpi - 2\theta) - \frac{1}{4}\gamma^2 \sin(3v - \varpi - 2\theta) \right\} \frac{1}{h^2} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv},$$

que l'on déduit de celle rapportée dans le n.° 68. En y faisant

$$\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma} \cdot \Omega_{(2)} = -\frac{3}{2} \text{m}^2 \cos(2v - 2v') \left\{ \sqrt{1+ss} + e\cos(v - \varpi) \right\}^{-3}$$
$$= -\frac{3}{2} \text{m}^2 \cos(2v - 2v') \left\{ 1 - \frac{3}{2} e\gamma^2 \cos(v + \varpi - 2\theta) - \frac{3}{2} e\gamma^2 \cos(3v - \varpi - 2\theta) \right\};$$
$$\frac{\Omega_{(1)}}{h^2} = -\frac{3}{2} \text{m}^2 \cos(2v - 2v') \gamma \sin(v - \theta) \left\{ \sqrt{1+ss} + e\cos(v - \varpi) \right\}^{-4}$$
$$= -\frac{3}{2} \text{m}^2 \cos(2v - 2v') \gamma \sin(v - \theta) \left\{ 1 - 4e\cos(v - \varpi) \right\}$$
$$= -\frac{3}{2} \text{m}^2 \cos(2v - 2v') \left\{ \gamma \sin(v - \theta) - 2e\gamma \sin(2v - \varpi - \theta) - 2e\gamma \sin(\varpi - \theta) \right\};$$
$$\frac{1}{h^2} \cdot \frac{d\Omega}{u\,dv} = -\frac{3}{2} \text{m}^2 \sin(2v - 2v') \left\{ \sqrt{1+ss} + e\cos(v - \varpi) \right\}^{-4}$$
$$= -\frac{3}{2} \text{m}^2 \sin(2v - 2v') \left\{ 1 - 4e\cos(v - \varpi) \right\},$$

et conservant seulement les combinaisons capables de produire l'angle $2v' - 2\theta$, l'on trouvera

$$e \frac{d\varpi}{dv} = -\frac{3}{2} \text{m}^2 \cos(2v - 2v') \times -\frac{3}{2} e\gamma^2 \cos(2v - 2\theta)$$
$$- \frac{3}{2} \text{m}^2 \cos(2v - 2v') \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) e\gamma^2 \cos(2v - 2\theta)$$
$$+ \frac{3}{2} \text{m}^2 \sin(2v - 2v') \times \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) e\gamma^2 \sin(2v - 2\theta);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d\varpi}{dv} = \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right) m^2 \gamma^2 \sin(2v' - 2\theta),$$

ou bien

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{27}{8} m^2 \gamma^2 \sin(2v' - 2\theta).$$

Dans le n.° 78 l'on a trouvé dans cette même fonction le terme $\frac{15}{4} m^2 \cos(2v' - 2\varpi)$; ainsi, en posant l'équation

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{15}{4} m^2 \cos(2v' - 2\varpi) + \frac{27}{8} m^2 \gamma^2 \cos(2v' - 2\theta),$$

l'on en tirera

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{15}{4} m^2 \cos(2E - 2c)v + \frac{27}{8} m^2 \gamma^2 \cos(2E - 2g)v - \frac{15}{2} m^2 \delta\varpi \sin(2E - 2c) v.$$

Donc, en faisant ici $\delta\varpi = \frac{7}{8}\gamma_{,}^2 \sin(2g - 2c) v$ (Voy. n.° 83), l'on aura

$$\frac{d\varpi}{dv} = \left(\frac{27}{8} - \frac{105}{32}\right) m^2 \gamma_{,}^2 \cos(2E - 2g) v = \frac{3}{32} m^2 \gamma_{,}^2 \cos(2E - 2g) v,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\delta\varpi = -\frac{3}{64} \cdot \frac{m^2}{m} \gamma_{,}^2 \sin(2E - 2g) v.$$

97. Cela posé, réduisons l'expression de $\frac{de}{dv}$ rapportée dans le n.° 61 à celle-ci

$$\frac{de}{dv} = -\frac{1 + \gamma\gamma}{\sigma} \sin(v - \varpi) \cdot \Omega_{(2)} + \frac{P'}{h^2} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv}$$
$$+ \left\{\frac{3}{2}\gamma \cos(\varpi - \theta) + \frac{1}{2}\gamma \cos(2v - \varpi - \theta) + 2e\gamma \cos(v - \theta)\right\} \frac{\Omega_{(1)}}{h^2},$$

et cherchons d'abord le terme de la forme $Be\gamma^2 \sin(2v' - 2\theta)$ renfermé dans cette expression. Pour cela remarquons que les valeurs de $\frac{\Omega_{(2)}}{\sigma}$, $\frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$ posées dans le numéro précédent donnent

$$-\frac{1 + \gamma\gamma}{\sigma} \sin(v - \varpi) \cdot \Omega_{(2)} = \frac{3}{2} m^2 \cos(2v - 2v') \times \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) e\gamma^2 \sin(2v - 2\theta) = 0;$$

$$\left\{\frac{3}{2}\gamma \cos(\varpi - \theta) + \frac{1}{2}\gamma \cos(2v - \varpi - \theta) + 2e\gamma \cos(v - \theta)\right\} \frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$$
$$= -\frac{3}{2} m^2 \cos(2v - 2v') \times \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) e\gamma^2 \sin(2v - 2\theta)$$
$$= \frac{3}{4} m^2 e\gamma^2 \sin(2v' - 2\theta).$$

Maintenant, si l'on prend

$$\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv} = -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2 sin(2v-2v')\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-4}$$

$$= -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2 sin(2v-2v')\left\{\begin{array}{l} 1-4e\cos(v-\varpi)+\gamma^2\cos(2v-2\theta) \\ -\frac{5}{2}e\gamma^2\cos(v+\varpi-2\theta)-\frac{5}{2}e\gamma^2\cos(3v-\varpi-2\theta)\end{array}\right\},$$

et (Voyez n.° 61)

$$P' = \frac{3}{2}e + 2\cos(v-\varpi) - \frac{1}{4}\gamma^2\cos(3v-\varpi-2\theta) - \frac{5}{4}\gamma^2\cos(v+\varpi-2\theta) - e\gamma^2\cos(2v-2\theta),$$

l'on trouvera

$$\frac{P'}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv} = -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2 sin(2v-2v')\times\left(-1+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)e\gamma^2\cos(2v-2\theta)$$

$$= -\frac{9}{8}\mathrm{m}^2 e\gamma^2 sin(2v'-2\theta).$$

Il suit de là que l'on a

$$\frac{de}{dv} = \left(\frac{3}{4}-\frac{9}{8}\right)\mathrm{m}^2 e\gamma^2 sin(2v'-2\theta),$$

ou bien

$$\frac{de}{dv} = -\frac{3}{8}\mathrm{m}^2 e\gamma^2 sin(2v'-2\theta).$$

98. L'analyse exposée dans le n.° 82 démontre que l'expression de $\frac{de}{dv}$ renferme le terme $-\frac{15}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 h^6}{h_1^6}e\,sin(2v'-2\varpi)$. Pour l'objet dont il est ici question, il faut chercher en outre la partie du coefficient de ce même argument qui se trouve multipliée par $e\gamma^2$. A cet effet il faudra prendre

$$-\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma}sin(v-\varpi)\cdot\Omega_{(2)}$$

$$= \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(1+\gamma\gamma)^4\cos(2v-2v')\,sin(v-\varpi)\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-3}$$

$$= \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(1+4\gamma\gamma)\cos(2v-2v')\,sin(v-\varpi)\left\{1-3(1-\gamma\gamma)e\cos(v-\varpi)\right\}$$

$$= -\frac{9}{4}\mathrm{m}^2 e(1+4\gamma\gamma)(1-\gamma\gamma)\cos(2v-2v')\,sin(2v-2\varpi)$$

$$= -\frac{27}{8}\mathrm{m}^2 e\gamma^2 sin(2v-2\varpi);$$

$$\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv} = -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2(1+\gamma\gamma)^4 \sin(2v-2v')\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-4}$$

$$= -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2(1+4\gamma\gamma)\sin(2v-2v')\left\{1-\gamma^2-(4-5\gamma^2)e\cos(v-\varpi)\right\}$$

$$= -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\sin(2v-2v')\left\{1+3\gamma^2-(4+11\gamma^2)e\cos(v-\varpi)\right\};$$

$$P' = \left(2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)\cos(v-\varpi)+\frac{e}{2}\cos(2v-2\varpi);$$

$$\frac{P'}{h^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv} = -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\sin(2v-2v')\times\left(\frac{3}{2}-10\right)e\gamma^2\cos(2v-2\varpi)$$

$$= -\frac{51}{8}\mathrm{m}^2 e\gamma^2\sin(2v'-2\varpi).$$

Ainsi il est clair que l'on a

$$\frac{de}{dv} = \left(-\frac{27}{8}+\frac{3}{4}-\frac{51}{8}\right)\mathrm{m}^2 e\gamma^2\sin(2v'-2\varpi),$$

ou bien

$$\frac{de}{dv} = -9\,\mathrm{m}^2 e\gamma^2\sin(2v'-2\varpi).$$

Il suit de là que nous avons cette équation

$$\frac{de}{e\,dv} = \mathrm{m}^2\left(-\frac{15}{4}\cdot\frac{h^6}{h_{\prime}^6}-9\gamma^2\right)\sin(2v'-2\varpi)-\frac{3}{8}\mathrm{m}^2\gamma^2\sin(2v'-2\theta).$$

99. Cela posé, reprenons l'équation

$$\sin(2v'-2\varpi) = -\sin(2E-2c)v-2\delta\varpi\cos(2E-2c)v+2(\delta\varpi)^2\sin(2E-2c)v$$

donnée dans le n.° 93, et remarquons d'abord que l'on a (Voy. n.° 91)

$$-\frac{h^6}{h_{\prime}^6}\sin(2E-2c)v = \frac{9}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{\prime}^2\sin(2g-2c)v.$$

Ensuite, si l'on prend pour $d\varpi$ la valeur

$$\delta\varpi = -\frac{3}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{\prime}^2\sin(2E-2g)v$$

trouvée dans le n.° 96, il viendra

$$-2\delta\varpi\cos(2E-2c)v = -\frac{3}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{\prime}^2\sin(2g-2c)v.$$

D'après les valeurs de $\delta\varpi$ trouvées dans les n.ºs 81 et 88, nous avons l'équation

$$\delta\varpi = \tfrac{7}{8}\gamma_{,}^{2} \sin(2g - 2c)v - \frac{15}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\sin(2E - 2c)v,$$

laquelle donne,

$$(\delta\varpi)^2 = -\frac{105}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}^{2}\cos(2E - 2g)v;$$

partant l'on a

$$2(\delta\varpi)^2 \sin(2E - 2c)v = -\frac{105}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}^{2}\sin(2g - 2c)v.$$

Concluons de là que l'on a

$$\frac{h^6}{h_{,}^{6}}\sin(2v' - 2\varpi) = \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{64} - \frac{105}{64}\right)\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}^{2}\sin(2g - 2c)v;$$

et par conséquent

$$-\frac{15}{4}\cdot\frac{h^6}{h_{,}^{6}}\sin(2v' - 2\varpi) = \frac{135}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}^{2}\sin(2g - 2c)v.$$

En posant l'équation $\gamma = \gamma_{,} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}\cos(2E - 2g)v$ (Voyez n.° 81), l'on obtient $\gamma^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}^{2}\cos(2E - 2g)v$; d'où l'on conclut

$$-9\gamma^2\sin(2v' - 2\varpi) = 9\gamma^2\sin(2E - 2c)v = \frac{27}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}^{2}\sin(2g - 2c)v.$$

Il est aisé de voir que la fonction $-\frac{3}{8}\mathrm{m}^2\gamma^2\sin(2v' - 2\theta)$ ne donne ici aucun terme; ainsi, en réunissant les parties que l'on vient de calculer, nous aurons

$$\frac{de}{e\,dv} = \left(\frac{135}{64} + \frac{27}{8}\right)\frac{\mathrm{m}^4}{m}\gamma_{,}^{2}\sin(2g - 2c)v,$$

ou bien

$$\frac{de}{e\,dv} = \frac{351}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^4}{m}\gamma_{,}^{2}\sin(2g - 2c)v.$$

En réunissant ce terme avec celui trouvé dans le n.° 87, nous aurons l'équation

$$\frac{de}{e\,dv} = \left(\frac{21}{8} + \frac{351}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\right)\mathrm{m}^2\gamma_{,}^{2}\sin(2g - 2c)v,$$

laquelle étant intégrée donne

$$Log\left(\frac{e}{e_{,}}\right) = -\frac{\left(\frac{21}{8} + \frac{351}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\right)\mathrm{m}^3\gamma_{,}^{2}}{2g - 2c}\cos(2g - 2c)v.$$

En faisant ici, comme dans le n.° 95,

$$\frac{m^2}{2g-2c} = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{m^2}{m} + \text{etc.},$$

l'on aura

$$Log\left(\frac{e}{e_{,}}\right) = \left(-\frac{7}{8} + \frac{135}{64}\cdot\frac{m^2}{m}\right)\gamma_{,}^2 \cos(2g-2c)\,v;$$

et en passant du logarithme au nombre, il viendra

$$e = e_{,} + \left(-\frac{7}{8} + \frac{135}{64}\cdot\frac{m^2}{m}\right) e_{,}\gamma_{,}^2 \cos(2g-2c)\,v.$$

A l'aide des recherches précédentes on démontre que l'inégalité ayant pour argument $(2g-2c)\,v$*, ou le double de la distance angulaire du périgée au nœud de l'orbite, doit être du quatrième ordre, au moins, dans l'expression du tems en fonction de la longitude vraie.*

100. La valeur précédente de e et la valeur de γ trouvée à la fin du n.° 95 donnent

$$\gamma^2 = \gamma_{,}^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{135}{32}\cdot\frac{m^2}{m}\right) e_{,}^2\gamma_{,}^2 \cos(2g-2c)\,v,$$

$$e^2 = e_{,}^2 + \left(-\frac{7}{4} + \frac{135}{32}\cdot\frac{m^2}{m}\right) e_{,}^2\gamma_{,}^2 \cos(2g-2c)\,v.$$

Donc la fonction $e^2 + \gamma^2$ présente le terme $\frac{m^2}{m} e_{,}^2\gamma_{,}^2 \cos(2g-2c)\,v$ multiplié par un coefficient numérique égal à zéro. Il suit de là et de l'analyse exposée dans le n.° 90, que l'on peut réduire la valeur de $\int A'\,dv$ à celle-ci

$$\int A'\,dv = \int \frac{h^3}{\sigma^2}\,dv.$$

Ainsi la question est réduite à démontrer que l'on a

$$0\cdot\frac{m^2}{m} e_{,}^2\gamma_{,}^2 \cos(2g-2c)\,v \quad \text{dans la fonction} \quad \frac{h^3}{\sigma^2}.$$

Pour cela il est nécessaire de considérer de nouveaux termes dans l'expression des constantes arbitraires censées variables.

101. Avant tout nous chercherons dans l'expression de γ le terme affecté de l'argument $(2E-2c)v$. En réduisant la valeur de $\frac{d\gamma}{dv}$ posée au commencement du n.° 93 à

$$\frac{d\gamma}{dv}=\frac{3}{4}\cdot\frac{M'u'^3}{h^2u^4}\gamma\,sin(2v-2v'),$$

l'on en conclut

$$\frac{d\gamma}{dv}=\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma\,sin(2v-2v')\left\{1+5e^2cos(2v-2\varpi)\right\};$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\gamma}{dv}=-\frac{15}{8}\mathrm{m}^2\gamma e^2\,sin(2v'-2\varpi).$$

L'on a trouvé (n.° 81) que l'expression de $\frac{d\gamma}{dv}$ renferme aussi le terme $-\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma\,sin(2v'-2\theta)$; en le réunissant au précédent nous formerons l'équation

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv}=-\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\,sin(2v'-2\theta)-\frac{15}{8}\mathrm{m}^2e^2\,sin(2v'-2\varpi),$$

laquelle donne

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv}=\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\,sin(2E-2g)v+\frac{15}{8}\mathrm{m}^2e^2\,sin(2E-2c)v+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\delta\theta\,cos(2E-2g)v.$$

Donc, en prenant $\delta\theta=\frac{5}{8}e_{,}^2\,sin(2g-2c)v$ (Voyez n.° 86), il viendra

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv}=\left(\frac{15}{8}+\frac{15}{32}\right)\mathrm{m}^2e_{,}^2\,sin(2E-2c)v=\frac{75}{32}\mathrm{m}^2e_{,}^2\,sin(2E-2c)v.$$

En intégrant cette expression, il est clair que l'on a

$$Log\left(\frac{\gamma}{\gamma_{,}}\right)=\frac{75}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{,}^2\,cos(2E-2c)v.$$

Mais, pour avoir exactement le coefficient numérique de ce terme dans la valeur de γ, il faut ajouter au second membre de cette équation la fonction

$$\frac{5}{8}e_{,}^2\,cos(2g-2c)v+\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\,cos(2E-2g)v$$

résultante de l'analyse exposée dans les n.os 85 et 81. Alors, en passant du logarithme au nombre d'après l'équation

$$Log\left(\frac{\gamma}{\gamma_{\prime}}\right) = \frac{5}{8}e_{\prime}^{2}\cos(2g-2c)v + \frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^{2}}{m}\cos(2E-2g)v + \frac{75}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^{2}}{m}e_{\prime}^{2}\cos(2E-2c)v,$$

l'on trouvera

$$\gamma = \gamma_{\prime} + \frac{165}{128}\cdot\frac{\mathrm{m}^{2}}{m}\gamma_{\prime}e_{\prime}^{2}\cos(2E-2c)v,$$

où le coefficient $\frac{165}{128} = \frac{75}{64} + \frac{15}{128}$.

102. Reprenons l'équation

$$\frac{de}{e\,dv} = -\frac{15}{4}\mathrm{m}^{2}\sin(2v'-2\varpi) - \frac{3}{8}\mathrm{m}^{2}\gamma^{2}\sin(2v'-2\theta)$$

résultante de celle trouvée dans le n.° 98, et cherchons le terme affecté de l'argument $(2E-2g)v$ qui se trouve dans la valeur de e. Cette équation donne

$$\frac{de}{e\,dv} = \frac{15}{4}\mathrm{m}^{2}\sin(2E-2c)v + \frac{3}{8}\mathrm{m}^{2}\gamma^{2}\sin(2E-2g)v + \frac{15}{2}\mathrm{m}^{2}\delta\varpi\cos(2E-2c)v.$$

Donc, en prenant $\delta\varpi = \frac{7}{8}\gamma_{\prime}^{2}\sin(2g-2c)v$ (Voyez n.° 88), l'on aura

$$\frac{de}{e\,dv} = \left(\frac{3}{8}-\frac{105}{32}\right)\mathrm{m}^{2}\gamma_{\prime}^{2}\sin(2E-2g)v = -\frac{93}{32}\mathrm{m}^{2}\gamma_{\prime}^{2}\sin(2E-2g)v.$$

Cette expression étant intégrée donne

$$Log\left(\frac{e}{e_{\prime}}\right) = -\frac{93}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^{2}}{m}\gamma_{\prime}^{2}\cos(2E-2g)v.$$

Mais ici, de même que dans le numéro précédent, il faudra poser l'équation

$$Log\left(\frac{e}{e_{\prime}}\right) = -\frac{7}{8}\gamma_{\prime}^{2}\cos(2g-2c) + \frac{15}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^{2}}{m}\cos(2E-2c)v - \frac{93}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^{2}}{m}\gamma_{\prime}^{2}\cos(2E-2g)v,$$

(Voyez n.ºs 87 et 82) avant de passer du logarithme au nombre. D'après cela l'on trouvera

$$e = e_{\prime} - \frac{291}{128}\cdot\frac{\mathrm{m}^{2}}{m}e_{\prime}\gamma_{\prime}^{2}\cos(2E-2g)v,$$

où le coefficient $-\frac{291}{128} = -\frac{93}{64} - \frac{105}{128}$.

103. Nous aurons encore besoin du terme affecté de l'argument $(2E+2c-4g)v$ qui entre dans θ et γ, et de celui affecté de l'argument $(2E+2g-4c)v$ qui se trouve dans ϖ et e. Il est très-facile de les calculer. D'abord en posant l'équation (Voyez n.° 75)

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{4}\text{m}^2 \cos(2v'-2\theta),$$

l'on en tire

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{2}\text{m}^2\,\delta\theta\,\sin(2E-2g)v.$$

Donc, en faisant $\delta\theta = \frac{5}{8}e_{,}^2\sin(2g-2c)v$ et intégrant ensuite, l'on en tirera

$$\delta\theta = \frac{15}{64}\cdot\frac{\text{m}^2}{m}e_{,}^2\sin(2E+2c-4g)v.$$

L'équation

$$\frac{d\gamma}{\gamma dv} = -\frac{3}{4}\text{m}^2\sin(2v'-2\theta)$$

donne, en la traitant de la même manière,

$$Log\left(\frac{\gamma}{\gamma_{,}}\right) = -\frac{15}{64}\cdot\frac{\text{m}^2}{m}e_{,}^2\cos(2E+2c-4g)v.$$

Donc, en ajoutant ce terme à ceux qui se trouvent dans la valeur de $Log\left(\frac{\gamma}{\gamma_{,}}\right)$ rapportée vers la fin du n.° 101, l'on en conclura, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\delta\gamma = -\frac{15}{128}\cdot\frac{\text{m}^2}{m}\gamma_{,}e_{,}^2\cos(2E+2c-4g)v,$$

où le coefficient $-\frac{15}{128} = -\frac{15}{64}+\frac{15}{128}$.

104. En posant l'équation

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{15}{4}\text{m}^2\cos(2v'-2\varpi),$$

l'on en tire d'abord

$$\frac{d\varpi}{dv} = -\frac{15}{2}\text{m}^2\,\delta\varpi\,\sin(2E-2c)v.$$

Donc, en y faisant $\delta\varpi = \frac{7}{8}\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v$ et intégrant, l'on obtiendra

$$\delta\varpi = -\frac{105}{64}\cdot\frac{\text{m}^2}{m}\gamma_{,}^2\sin(2E+2g-4c)v.$$

Maintenant, si l'on pose l'équation

$$\frac{de}{e\,dv} = -\frac{15}{4}\,\mathrm{m}^2 \sin(2v' - 2\varpi),$$

l'on en conclura d'abord

$$Log\left(\frac{e}{e_{\prime}}\right) = \frac{105}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{\prime}^2 \cos(2E + 2g - 4c)\,v.$$

En réunissant ce terme avec ceux qui se trouvent dans la valeur de $Log\left(\frac{e}{e_{\prime}}\right)$ posée dans le numéro précédent, et passant ensuite des logarithmes aux nombres, il viendra

$$\delta e = \frac{105}{128}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}\gamma_{\prime}^2 \cos(2E + 2g - 4c)\,v,$$

où le coefficient $\frac{105}{128} = \frac{105}{64} - \frac{105}{128}$.

105. En reprenant actuellement l'équation

$$\frac{d\cdot h^2}{h^8 dv} = \frac{\mathrm{m}^2}{h_{\prime}^6}\left\{\left(\frac{3}{2} + \frac{45}{4}e^2\right)\gamma^2 \sin(2v' - 2\theta) + \left(\frac{15}{2} + \frac{75}{4}\gamma^2\right)e^2 \sin(2v' - 2\varpi)\right\}$$

trouvée dans le n.° 91, nous démontrons à l'aide des résultats précédens que l'on a $0\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2\cos(2g - 2c)v$ dans l'expression de la fonction $\frac{h^3}{\sigma^2}$.

Il est d'abord évident que cette équation étant intégrée donne

$$\frac{1}{h^6} = \frac{1}{h_{\prime}^6} + \frac{\mathrm{m}^2}{h_{\prime}^6}\int dv\left(-\frac{9}{2} - \frac{135}{4}e^2\right)\gamma^2 \sin(2v' - 2\theta)$$
$$+ \frac{\mathrm{m}^2}{h_{\prime}^6}\int dv\left(-\frac{45}{2} - \frac{225}{4}\gamma^2\right)e^2 \sin(2v' - 2\varpi),$$

et que par conséquent l'on a

$$h^2 = h_{\prime}^2 + h_{\prime}^2\,\mathrm{m}^2\int dv\left(\frac{3}{2} + \frac{45}{4}e^2\right)\gamma^2 \sin(2v' - 2\theta)$$
$$+ h_{\prime}^2\,\mathrm{m}^2\int dv\left(\frac{15}{2} + \frac{75}{4}\gamma^2\right)e^2 \sin(2v' - 2\varpi).$$

Or en faisant, comme dans le n.° 93,

$$\sin(2v' - 2\theta) = -\sin(2E - 2g)v - 2\delta\theta\cos(2E - 2g)v + 2(\delta\theta)^2\sin(2E - 2g)v,$$

et observant que la réunion des résultats précédens donne

$$\delta\theta = \frac{5}{8} e_{,}^{2} \sin(2g - 2c)v - \frac{3}{8} \cdot \frac{m'^{2}}{m} \sin(2E - 2g)v$$

$$+ \frac{45}{64} \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \sin(2E - 2c)v + \frac{15}{64} \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \sin(2E + 2c - 4g)v,$$

l'on en tirera

$$(\delta\theta)^{2} = \frac{15}{64} \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \cos(2E - 2c)v - \frac{15}{64} \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \cos(2E + 2c - 4g)v;$$

d'où l'on conclut

$$2(\delta\theta)^{2} \sin(2E - 2g)v = \left(-\frac{15}{64} - \frac{15}{64}\right) \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \sin(2g - 2c)v,$$

et par conséquent

$$2\gamma^{2}(\delta\theta)^{2} \sin(2E - 2g)v = -\frac{15}{32} \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \gamma_{,}^{2} \sin(2g - 2c)v.$$

En réunissant les termes qui appartiennent à la variable γ, l'on formera l'équation

$$\gamma = \gamma_{,} + \frac{5}{8} \gamma_{,} e_{,}^{2} \cos(2g - 2c)v + \frac{3}{8} \cdot \frac{m'^{2}}{m} \gamma_{,} \cos(2E - 2g)v$$

$$+ \frac{165}{128} \cdot \frac{m'^{2}}{m} \gamma_{,} e_{,}^{2} \cos(2E - 2c)v - \frac{15}{128} \cdot \frac{m'^{2}}{m} \gamma_{,} e_{,}^{2} \cos(2E + 2c - 4g)v,$$

laquelle donne

$$\gamma^{2} = \frac{45}{16} \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \gamma_{,}^{2} \cos(2E - 2c)v + 0 \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \gamma_{,}^{2} \cos(2E + 2c - 4g)v,$$

en observant que l'on a le coefficient du second terme $\frac{15}{64} - \frac{15}{64} = 0$. Donc nous avons

$$-\gamma^{2} \sin(2E - 2g)v = \frac{45}{32} \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \gamma_{,}^{2} \sin(2g - 2c)v.$$

La valeur de $\delta\theta$ posée plus haut donne

$$-2\delta\theta \cos(2E - 2g)v = -\frac{5}{8} e_{,}^{2} \sin(2E - 2c)v + \frac{5}{8} e_{,}^{2} \sin(2E + 2c - 4g)v$$

$$-\frac{15}{32} \cdot \frac{m'^{2}}{m} e_{,}^{2} \sin(2g - 2c)v,$$

où $-\frac{15}{32} = \frac{15}{64} - \frac{45}{64}$. En multipliant cette fonction par

$$\gamma^{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{m'^{2}}{m} \gamma_{,}^{2} \cos(2E - 2g)v,$$

l'on aura

$$-2\gamma^2\,\delta\theta\cos(2E-2g)v = \left(-\frac{15}{64}-\frac{15}{64}-\frac{15}{32}\right)\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2\sin(2g-2c)v,$$

ou bien

$$-2\gamma^2\,\delta\theta\cos(2E-2g)v = -\frac{15}{16}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2\sin(2g-2c)v.$$

Cela posé, il est évident que l'on a

$$\gamma^2\sin(2v'-2\theta) = \left(-\frac{15}{32}+\frac{45}{32}-\frac{15}{16}\right)\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2\sin(2g-2c)v,$$

c'-est-à-dire

$$\gamma^2\sin(2v'-2\theta) = 0\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2\sin(2g-2c)v.$$

Les valeurs de e et γ donnent

$$e^2\gamma^2 = \frac{15}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2\cos(2E-2c)v;$$

partant il est clair que l'on a

$$\frac{45}{4}e^2\gamma^2\sin(2v'-2\theta) = -\frac{45}{4}\sin(2E-2g)v\times\frac{15}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2\cos(2E-2c)v,$$

ou bien

$$\frac{45}{4}e^2\gamma^2\sin(2v'-2\theta) = \frac{675}{32}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2\sin(2g-2c)v.$$

Il suit de là que nous avons

$$\int dv\left(\frac{3}{2}+\frac{45}{4}e^2\right)\gamma^2\sin(2v'-2\theta) = -\frac{675}{32}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{e_{\prime}^2\gamma_{\prime}^2}{2g-2c}\cos(2g-2c)v.$$

106. Reprenons maintenant l'équation

$$\sin(2v'-2\varpi) = -\sin(2E-2c)v-2\delta\varpi\cos(2E-2c)v+2(\delta\varpi)^2\sin(2E-2c)v$$

posée dans le n.° 93. En considérant les termes qui entrent dans l'expression de la variable ϖ, l'on obtient

$$\delta\varpi = \frac{7}{8}\cdot\gamma_{\prime}^2\sin(2g-2c)v-\frac{15}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\sin(2E-2c)v$$
$$-\frac{3}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{\prime}^2\sin(2E-2g)v-\frac{105}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{\prime}^2\sin(2E+2g-4c)v.$$

Cette équation donne

$$(\delta\varpi)^2 = -\frac{105}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{\prime}^2\cos(2E-2g)v+\frac{105}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{\prime}^2\cos(2E+2g-4c)v;$$

ainsi nous avons

$$2(\delta\varpi)^2 \sin(2E-2c)v = \left(-\frac{105}{64}-\frac{105}{64}\right)\frac{m^2}{m}\gamma_{,}^2 \sin(2g-2c)v,$$

d'où l'on conclut

$$2e^2(\delta\varpi)^2 \sin(2E-2c)v = -\frac{105}{32}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2 \sin(2g-2c)v.$$

En réunissant les termes qui appartiennent à la variable e, l'on a

$$e = e_{,} - \frac{7}{8}e_{,}\gamma_{,}^2 \cos(2g-2c)v + \frac{15}{8}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}\cos(2E-2c)v$$
$$-\frac{291}{128}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2E-2g)v + \frac{105}{128}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2E+2g-4c)v;$$

d'où l'on tire

$$e^2 = -\frac{99}{16}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2E-2g)v + 0\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2E+2g-4c)v,$$

en observant que le coefficient $0 = \frac{105}{64} - \frac{105}{64}$. Nous avons donc

$$-e^2 \sin(2E-2c)v = \frac{99}{32}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2 \sin(2g-2c)v.$$

L'expression de $\delta\varpi$ posée plus haut donne

$$-2\delta\varpi\cos(2E-2c)v = \frac{7}{8}\gamma_{,}^2\sin(2E-2g)v - \frac{7}{8}\gamma_{,}^2\sin(2E+2g-4c)v$$
$$+\frac{51}{32}\cdot\frac{m^2}{m}\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v,$$

où le coefficient $\frac{51}{32} = \frac{105}{64} - \frac{3}{64}$.

Donc, en multipliant cette fonction par

$$e^2 = \frac{15}{4}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}^2\cos(2E-2c)v,$$

l'on trouvera

$$-2e^2\delta\varpi\cos(2E-2c)v = \left(-\frac{105}{64}-\frac{105}{64}+\frac{51}{32}\right)\frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v,$$

ou bien

$$-2e^2\delta\varpi\cos(2E-2c)v = -\frac{27}{16}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v.$$

Concluons de là que l'on a

$$e^2\sin(2v'-2\varpi)v = \left(-\frac{105}{32}+\frac{99}{32}-\frac{27}{16}\right)\frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v,$$

et par conséquent

$$\frac{15}{2} e^2 \sin(2v' - 2\varpi) = -\frac{225}{16} \cdot \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \sin(2g - 2c) v.$$

Si l'on observe maintenant que, en posant

$$e^2 \gamma^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \cos(2E - 2g) v,$$

l'on a

$$\frac{75}{4} e^2 \gamma^2 \sin(2v' - 2\varpi) = -\frac{75}{4} \sin(2E - 2c) v \times \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \cos(2E - 2c) v,$$

ou bien

$$\frac{75}{4} e^2 \gamma^2 \sin(2v' - 2\varpi) = -\frac{225}{32} \cdot \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \sin(2g - 2c) v,$$

l'on en conclura que

$$\left(\frac{15}{2} + \frac{75}{4}\gamma^2\right) e^2 \sin(2v' - 2\varpi) = \left(-\frac{225}{16} - \frac{225}{32}\right) \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \sin(2g - 2c) v$$

$$= -\frac{675}{32} \cdot \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \sin(2g - 2c) v;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\int dv \left(\frac{15}{2} + \frac{75}{4}\gamma^2\right) e^2 \sin(2v' - 2\varpi) = \frac{675}{32} \cdot \frac{m^2}{m} \cdot \frac{e_{,}^2 \gamma_{,}^2}{2g - 2c} \cos(2g - 2c) v;$$

c'est-à-dire une quantité égale et de signe contraire à celle trouvée à la fin du numéro précédent. Ainsi il est démontré que dans l'expression de h^2 l'on a $0 \cdot \frac{m^2}{m} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \cos(2g - 2c) v$, et que par conséquent l'on a aussi

$$\int A' dv = \int \frac{h^3}{\sigma^2} dv = 0 \cdot \frac{m^2}{m} \cdot \frac{e_{,}^2 \gamma_{,}^2}{2g - 2c} \sin(2g - 2c) v.$$

En réunissant cette conclusion avec celle qui a été établie dans le n.° 90, il est complétement démontré que l'inégalité ayant pour argument $(2g - 2c)v$, doit se trouver dans t avec un coefficient du quatrième ordre au moins; mais si l'on voulait chercher par cette méthode le terme suivant du quatrième ordre, tel qu'il doit entrer dans la valeur de t, il faudrait aussi considérer la partie du même ordre qui entre dans l'expression de la variable f, ce qui entraînerait dans des

calculs fort compliqués, propres à mettre dans tout son jour les inconvéniens inhérens à la méthode de la variation des constantes arbitraires lorsque l'on veut pénétrer un peu en avant dans la recherche des inégalités lunaires.

107. Cependant s'il était *uniquement* question de démontrer que l'inégalité ayant pour argument $(2g - 2c)v$, doit être du quatrième ordre au moins dans l'expression de t, l'on pourrait y parvenir d'une manière beaucoup plus expéditive par les considérations suivantes.

Remarquons qu'il nous a fallu calculer à part chacun des termes qui appartiennent à la fonction

$$\frac{h^3}{\sigma^2}\left(1 + \frac{3}{2}(e^2 + \gamma^2) + \frac{3}{4}e^2\gamma^2 \cos(2\varpi - 2\theta)\right)$$

pour parvenir à un résultat *nul dans cette somme.* D'après cela, l'on doit penser que l'on pourrait rendre plus aisément évidente la nullité des deux termes que nous avons calculés, en considérant d'abord la fonction explicite de la force perturbatrice qui renferme la fonction précédente. Ainsi, d'après la transformation exposée dans le n.° 64, il faudra poser l'équation

$$\int A' dv = \sqrt{\frac{\alpha_1^3}{\sigma}} \cdot \int \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\sigma}\int d'\Omega\right)^{-\frac{3}{2}} dv,$$

et faire voir que les deux premiers termes, dont il est ici question, ne se présentent pas dans le développement de la fonction $\int d'\Omega$.

108. Pour cet objet il suffit de conserver les termes suivans :

$$\frac{d\Omega}{dv} dv = -\frac{3}{2} \cdot \frac{M'u'^3}{u^4} \sin(2v - 2v') \cdot dv;$$

$$\frac{d\Omega}{du} du = -\frac{M'u'^3}{u^3}\left\{\frac{1}{2} - ss + \frac{3}{2}\cos(2v - 2v')\right\} du;$$

$$\frac{d\Omega}{ds} ds = -\frac{M'u'^3 s}{u^2} ds,$$

faciles à déduire des formules données dans les n.os 26 et 27.

En y considérant u' comme une quantité constante, l'on peut mettre la somme de ces trois fonctions sous cette forme

$$d\Omega = d\cdot\left\{-\frac{M'u'^3}{2u^4}\left(ss-\frac{1}{2}\right)\right\} + d\cdot\left\{\frac{3M'u'^3}{4u^2}\cos(2v-2v')\right\}$$
$$-\frac{3M'u'^3}{2u^4}\sin(2v-2v')\,dv'.$$

Or il suffit ici de prendre $u' = \frac{1}{a'}$, $v' = mv + \Lambda$, $dv' = m\,dv$; donc, en intégrant, il viendra

$$-\frac{2\alpha_{\prime}}{\sigma}\int d'\Omega = \frac{M'\alpha_{\prime}}{\sigma a'^3}\cdot\frac{(ss-\frac{1}{2})}{u^4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{M'\alpha_{\prime}}{\sigma a'^3}\cdot\frac{\cos(2v-2v')}{u^2}$$
$$+3m\frac{M'\alpha_{\prime}}{\sigma a'^3}\int dv\frac{\sin(2v-2v')}{u^2}.$$

En substituant pour u et s leurs valeurs elliptiques, nous aurons

$$-\frac{2\alpha_{\prime}}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{M'\alpha_{\prime}h^4(1+\gamma\gamma)^2}{2\sigma^3a'^3}\left\{1-\gamma\gamma+\gamma^2\cos(2v-2\theta)\right\}\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-2}$$
$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{M'\alpha_{\prime}h^4(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^3a'^3}\cos(2v-2v')\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-2}$$
$$+3m\cdot\frac{M'\alpha_{\prime}}{\sigma^3a'^3}\int dv\cdot h^4(1+\gamma\gamma)^2\sin(2v-2v')\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-2}.$$

Au reste l'on pourrait encore parvenir plus directement à ces résultats en observant que si l'on désigne par $d\Omega$ la différentielle complète de Ω dont l'expression est $\frac{d\Omega}{dv}dv + \frac{d\Omega}{du}du + \frac{d\Omega}{ds}ds + \frac{d\Omega}{dv'}dv' + \frac{d\Omega}{du'}du' + \frac{d\Omega}{ds'}ds'$, l'on a l'équation générale

$$\int d\Omega = \Omega - \int\frac{d\Omega}{dv'}dv' - \int\frac{d\Omega}{du'}du' - \int\frac{d\Omega}{ds'}ds';$$

et par conséquent

$$\int d\Omega = \Omega - \int\frac{d\Omega}{dv'}dv',$$

lorsque l'on suppose, comme dans le cas actuel, $du' = 0$, $ds' = 0$.

109. Comme $\alpha_{\prime}$ doit être égal au demi-grand-axe de l'orbite de la Lune lorsque les forces perturbatrices sont nulles, l'on peut supposer $\alpha_{\prime} = \frac{h_{\prime}^2}{\sigma}$, en négligeant les autres termes multipliés par $e_{\prime}^2$ ou par $\gamma_{\prime}^2$ (Voy. n.° 41). Alors l'on peut faire ici, comme dans le n.° 75,

$$\frac{M'\alpha_{\prime}h_{\prime}^4}{\sigma^3a'^3} = m^2.$$

Maintenant, si l'on prend

$$\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(\nu-\varpi)\right\}^{-2}=1-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{4}e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^2\right)\gamma^2\cos(2\nu-2\theta)+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\gamma^2\right)e^2\cos(2\nu-2\varpi),$$

l'on trouvera que, en considérant seulement les trois argumens $(2\varpi-2\theta)$, $(2\nu'-2\theta)$, $(2\nu'-2\varpi)$ et les termes multipliés par e^2 ou par γ^2, l'on a

$$(1+\gamma\gamma)^2\left\{1-\gamma\gamma+\gamma^2\cos(2\nu-2\theta)\right\}\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(\nu-\varpi)\right\}^{-2}$$
$$=1+\frac{1}{2}\gamma\gamma+\frac{3}{2}ee+\frac{3}{2}e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta);$$

$$(1+\gamma\gamma)^2\cos(2\nu-2\nu')\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(\nu-\varpi)\right\}^{-2}$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^2\right)\gamma^2\cos(2\nu'-2\theta)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\gamma^2\right)e^2\cos(2\nu'-2\varpi);$$

$$(1+\gamma\gamma)^2\sin(2\nu-2\nu')\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(\nu-\varpi)\right\}^{-2}$$
$$=-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^2\right)\gamma^2\sin(2\nu'-2\theta)-\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\gamma^2\right)e^2\sin(2\nu'-2\varpi).$$

Il suit de là que

$$-\frac{2\alpha_i}{\sigma}\int d'\Omega=$$
$$-\frac{m^2h^4}{2h_i^4}\left\{1+\frac{1}{2}\gamma\gamma+\frac{3}{2}ee+\frac{3}{2}e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta)\right\}$$
$$-\frac{3m^2h^4}{2h_i^4}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^2\right)\gamma^2\cos(2\nu'-2\theta)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\gamma^2\right)e^2\cos(2\nu'-2\varpi)\right\}$$
$$-3m\cdot\frac{m^2}{h_i^4}\int d\nu\cdot h^4\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^2\right)\gamma^2\sin(2\nu'-2\theta)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\gamma^2\right)e^2\sin(2\nu'-2\varpi)\right\}.$$

110. A l'aide des résultats précédens l'on peut trouver le coefficient numérique qui affecte le premier terme du coefficient de l'argument $(2g-2c)\nu$ dans le développement de la fonction $-\frac{2\alpha_i}{\sigma}\int d'\Omega$.

Il est facile de voir que dans le premier terme de cette fonction l'on peut faire $h=h_i$, et que le second terme étant du septième ordre, doit être négligé; l'on aura donc

$$-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{\mathrm{m}^2}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta)\right\}$$

$$-\frac{3m\mathrm{m}^2}{h_{,}^4}\int dv.h^4\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^2\right)\gamma^2\sin(2v'-2\theta)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\gamma^2\right)e^2\sin(2v'-2\varpi)\right\}.$$

En appliquant ici à la fonction soumise au signe intégral l'analyse exposée dans les n.ºs 105 et 106, l'on voit aussitôt que l'on a

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^2\right)\gamma^2\sin(2v'-2\theta) = \frac{675}{32\times15}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v;$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\gamma^2\right)e^2\sin(2v'-2\varpi) = -\left(\frac{225}{32\times25}+\frac{225}{16\times10}\right)\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v.$$

Remarquons maintenant que, en posant l'équation

$$\frac{1}{4}h^4\gamma_{,}^2\sin(2v'-2\theta)+\frac{3}{4}h^4e_{,}^2\sin(2v'-2\varpi)$$

$$= -\frac{1}{4}h^4\gamma_{,}^2\sin(2E-2g)v-\frac{3}{4}h^4e_{,}^2\sin(2E-2c)v,$$

et en y faisant

$$h^4 = h_{,}^4\left\{1-\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}^2\cos(2E-2g)v-\frac{15}{2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{,}^2\cos(2E-2c)v\right\}$$

(Voyez n.° 91), l'on obtient

$$\frac{1}{4}h^4\gamma_{,}^2\sin(2v'-2\theta)+\frac{3}{4}h^4e_{,}^2\sin(2v'-2\varpi)$$

$$= \left(\frac{9}{16}-\frac{15}{16}\right)h_{,}^4\frac{\mathrm{m}^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v$$

$$= -\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}h_{,}^4e_{,}^2\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v.$$

Donc, en réunissant ces parties, il viendra

$$-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{\mathrm{m}^2}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta)\right\}$$

$$+\frac{63}{32}\mathrm{m}^4\int dv\,e_{,}^2\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v,$$

où le coefficient $\frac{63}{32} = -3\left(\frac{675}{32\times15}-\frac{225}{32\times25}-\frac{225}{16\times10}-\frac{3}{8}\right)$.

Il suit de là que nous avons

$$-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{\mathrm{m}^2}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\left(\frac{3}{2}+\frac{21}{16}\right)e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)v\right\}.$$

Mais les valeurs de $\delta\gamma$ et δe trouvées dans les n.os 85 et 87 démontrent que l'on doit ici prendre

$$\gamma^2 = \frac{5}{4} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \cos(2g - 2c)v, \quad e^2 = -\frac{7}{4} e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \cos(2g - 2c)v;$$

partant l'on a

$$-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d\Omega = -\frac{m^2}{2}\left(\frac{5}{8} - \frac{21}{8} + \frac{3}{2} + \frac{21}{16}\right) e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \cos(2g - 2c)v,$$

ou bien

$$-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d\Omega = -\frac{13}{32} m^2 e_{,}^2 \gamma_{,}^2 \cos(2g - 2c)v.$$

Nous avons vu dans le n.° 64 que l'expression du demi-grand-axe α est donnée par l'équation

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_{,}} - \frac{2}{\sigma}\int d'\Omega;$$

ainsi nous avons

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_{,}} - \frac{13}{32} \cdot \frac{m^2 e_{,}^2 \gamma_{,}^2}{\alpha_{,}} \cos(2g - 2c)v.$$

Il est donc clairement prouvé que l'inégalité ayant pour argument $(2g - 2c)v$ *ne disparaît pas de la valeur de* α.

111. L'on peut aussi trouver la valeur du terme intégral

$$+\frac{3mM'\alpha_{,}}{\sigma\alpha'^3}\int dv \frac{\sin(2v - 2v')}{u^2},$$

qui entre dans l'expression de $-\frac{2\alpha'}{\sigma}\int d'\Omega$ donnée dans le n.° 108 par un procédé plus simple que celui que nous avons suivi dans les numéros précédens. Pour cet objet il suffit d'intervertir l'ordre des substitutions et de chercher d'abord la valeur de u qui résulte de l'élimination des variables $\delta\gamma$, $\delta\theta$, etc.

Si dans l'équation

$$u = \frac{\sigma}{h^2(1 + \gamma\gamma)}\left(\sqrt{1 + ss} + e\cos(v - \varpi)\right)$$

l'on substitue pour h^2 et γ^2 leurs valeurs

$$h^2 = h_{,}^2\left\{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{m^2}{m}\gamma_{,}^2\cos(2E - 2g)v - \frac{15}{4}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}^2\cos(2E - 2c)v\right\},$$

$$\gamma^2 = \gamma_{,}^2 + \frac{5}{4}\gamma_{,}^2 e_{,}^2 \cos(2g - 2c)v + \frac{3}{4}\cdot\frac{m^2}{m}\gamma_{,}^2\cos(2E - 2g)v + \frac{45}{16}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2E - 2c)v,$$

il viendra

$$u = \frac{\sigma}{h_{,}^{2}}\left(\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)\right)\left(1-\gamma_{,}^{2}-\frac{5}{4}e_{,}^{2}\gamma_{,}^{2}\cos(2g-2c)v+\frac{15}{4}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}^{2}\cos(2E-2c)v\right).$$

Or nous avons

$$\sqrt{1+ss} = 1+\frac{1}{4}\gamma^{2}\cos(2v-2\theta),$$

$$\cos(2v-2\theta) = \cos 2gv + 2\delta\theta\sin 2gv - 2(\delta\theta)^{2}\cos 2gv,$$

$$2\delta\theta\sin 2gv = \frac{5}{8}e_{,}^{2}\cos 2cv - \frac{5}{8}e_{,}^{2}\cos(4g-2c)v + \frac{3}{8}\cdot\frac{m^{2}}{m}\cos 2Ev$$
$$- \frac{3}{8}\cdot\frac{m^{2}}{m}\cos(2E-4g)v - \frac{45}{64}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}^{2}\cos(2E+2g-2c)v$$
$$- \frac{15}{64}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}^{2}\cos(2E-2g+2c)v$$

$$-2(\delta\theta)^{2}\cos 2gv = -\frac{15}{64}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}^{2}\cos(2E+2g-2c)v + \frac{15}{64}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}^{2}\cos(2E-2g+2c)v;$$

donc, en substituant ces valeurs, il viendra

$$\sqrt{1+ss} = 1+\frac{1}{4}\gamma_{,}^{2}-\frac{1}{4}\gamma_{,}^{2}\cos 2gv+\frac{5}{16}e_{,}^{2}\gamma_{,}^{2}\cos(2g-2c)v+\frac{3}{16}\cdot\frac{m^{2}}{m}\gamma_{,}^{2}\cos(2E-2g)v$$
$$-\frac{15}{128}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}^{2}\gamma_{,}^{2}\cos(2E+2g-2c)v-\frac{15}{128}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}^{2}\gamma_{,}^{2}\cos(2E-2g+2c)v.$$

112. En développant la valeur de $e\cos(v-\varpi)$, l'on a

$$e\cos(v-\varpi) = e_{,}\cos cv + \delta e\cos cv + e_{,}\delta\varpi\sin cv - \frac{1}{2}e_{,}(\delta\varpi)^{2}\cos cv + \delta e\,\delta\varpi\sin cv.$$

Or les valeurs de δe, $\delta\varpi$ que nous avons trouvées, donnent

$$\delta e\cdot\cos cv = -\frac{7}{16}e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(2g-c)v + \frac{15}{16}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}\cos(2E-c)v$$
$$-\frac{291}{256}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(2E-2g+c)v,$$

$$e_{,}\delta\varpi\cdot\sin cv = -\frac{7}{16}e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(2g-c)v + \frac{15}{16}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}\cos(2E-c)v$$
$$+\frac{3}{128}\cdot\frac{m^{2}}{m}e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(2E-2g+c)v;$$

$$-\frac{1}{2}e_{,}(\delta\varpi)^2\cos cv = \frac{105}{256}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2E-2g+c)v, \qquad \delta e\,\delta\varpi = 0;$$

l'on aura donc

$$e\cos(v-\varpi) = e_{,}\cos cv - \frac{7}{8}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2g-c)v + \frac{15}{8}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}\cos(2E-c)v$$
$$-\frac{45}{64}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}\gamma^2\cos(2E-2g+c)v.$$

En réunissant les deux fonctions que nous venons de trouver, l'on obtient

$$\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi) =$$
$$1+\frac{1}{4}\gamma_{,}^2 + e_{,}\cos cv - \frac{1}{4}\gamma_{,}^2\cos 2gv - \frac{7}{8}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2g-c)v + \frac{5}{16}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)v,$$
$$+\frac{m^2}{m}\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{8}e_{,}\cos(2E-c)v + \frac{3}{16}\gamma_{,}^2\cos(2E-2g)v - \frac{45}{64}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2E-2g+c)v\\ -\frac{15}{128}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2E+2g-2c)v - \frac{15}{128}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2E-2g+2c)v\end{array}\right\};$$

d'où l'on conclut

$$u = \frac{\sigma}{h_{,}^2}\left(1+e_{,}\cos cv - \frac{1}{4}\gamma_{,}^2\cos 2gv - \frac{7}{8}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2g-c)v - \frac{15}{16}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)v\right)$$
$$+\frac{\sigma}{h_{,}^2}\cdot\frac{m^2}{m}\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{8}e_{,}\cos(2E-c)v + \frac{15}{4}e_{,}^2\cos(2E-2c)v + \frac{3}{16}\gamma_{,}^2\cos(2E-2g)v\\ -\frac{45}{64}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2E-2g+c)v - \frac{75}{128}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2E+2g-2c)v\\ -\frac{15}{128}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2E-2g+2c)v\end{array}\right\}.$$

113. A présent, si l'on suppose $u = \frac{\sigma}{h_{,}^2}(1+x)$, l'on aura

$$u^{-2} = \frac{h_{,}^4}{\sigma^2}\left(1-2x+3x^2-4x^3\right),$$

et en ne considérant que les deux argumens $2Ev \pm (2g-2c)v$,

$$-2x = \frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\left(\frac{75}{64}\cos(2E+2g-2c)v + \frac{15}{64}\cos(2E-2g+2c)v\right)$$
$$+3x^2 = \frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\left(-\frac{495}{64}\cos(2E+2g-2c)v - \frac{135}{64}\cos(2E-2g+2c)v\right)$$
$$-4x^3 = \frac{m^2}{m}e_{,}^2\gamma_{,}^2\left(\frac{45}{16}\cos(2E+2g-2c)v - \frac{9}{16}\cos(2E-2g+2c)v\right);$$

d'où l'on déduit

$$u^{-2} = \frac{h_i^4}{\sigma^2} \cdot \frac{m^2}{m} e_i^2 \gamma_i^2 \left(-\frac{15}{4} \cos(2E + 2g - 2c) - \frac{39}{16} \cos(2E - 2g + 2c) v\right).$$

En multipliant cette fonction par $sin(2v - 2v') = sin\, 2Ev$, l'on aura, par rapport à l'argument $(2g - 2c)v$,

$$3m \frac{M' a_i^2}{\sigma a'^3} \cdot \frac{sin(2v - 2v')}{u^2} = + \frac{63}{32} m^4 e_i^2 \gamma_i^2 \, sin(2g - 2c) v,$$

et par conséquent

$$-\frac{2\alpha_i}{\sigma} \int d'\Omega = -\frac{13}{32} m^2 e_i^2 \gamma_i^2 \cos(2g - 2c) v.$$

114. Par un procédé semblable l'on trouvera

$$u^{-4} = \frac{h_i^8}{\sigma^4}\left(1 - 4x + 10x^2 - 20x^3\right)$$

$$= -\frac{75}{8} \cdot \frac{m^2}{m} e_i^2 \gamma_i^2 \cos(2E + 2g - 2c) - \frac{75}{8} \cdot \frac{m^2}{m} e_i^2 \gamma_i^2 \cos(2E - 2g + 2c) v,$$

et par conséquent

$$h^2 = -3M \int \frac{u'^3}{u^4} sin(2v - 2v')\, dv = -3M u'^3 \int \frac{sin\, 2Ev}{u^4} dv$$

$$= \left(\frac{75}{16} - \frac{75}{16}\right) \frac{m^2 e_i^2 \gamma_i^2}{m(2g - 2c)} \cos(2g - 2c) v = 0.$$

115. Dans l'analyse précédente nous avons considéré v comme la variable principale ; il ne sera pas inutile d'examiner les changemens que subit la fonction $\int d'\Omega$ lorsqu'on y substitue la variable v en fonction de t.

Nous avons démontré, n.° 108, que l'on a

$$\int d'\Omega = \Omega - \frac{3}{2} M' \int \frac{u'^3}{u^2} sin(2v - 2v')\, dv',$$

et nous venons de trouver que le second terme de cette expression donne par rapport à l'argument $2g - 2c$ le terme

$$+ \frac{63}{64} \cdot \frac{m^4 \sigma}{a_i} \cdot \frac{e_i^2 \gamma_i^2}{2g - 2c} \cos(2g - 2c) v.$$

Ce terme ne change pas de coefficient par la substitution de v en fonction de t ; il nous reste donc à exécuter cette transformation dans la fonction Ω.

A cet effet il suffit de réduire la valeur de cette fonction à celle-ci

$$\Omega = -\frac{M'u'^3}{2u^2}\left(ss - \frac{1}{2}\right),$$

et de la développer en y substituant nos valeurs elliptiques de s et de u.

116. En considérant seulement l'argument $(2g - 2c)v$, l'analyse que l'on vient d'exposer dans le n.° 111 démontre que l'on a

$$-\frac{M'u'^3}{2u^2}\left(ss - \frac{1}{2}\right) = \frac{m^2}{4}\cdot\frac{\sigma}{a_{,}}\left(\frac{5}{8} - \frac{21}{8} + \frac{3}{2}\right)e_{,}^2\gamma_{,}^2 \cos(2g - 2c)v,$$

ou bien

$$\Omega = -\frac{m^2}{8}\cdot\frac{\sigma}{a_{,}}e_{,}^2\gamma_{,}^2 \cos(2g - 2c)v.$$

Mais en retenant en outre dans le développement de la fonction Ω les termes suivans, savoir:

$$\Omega = \frac{M'h^4(1+\gamma\gamma)^2}{4a'^3\sigma^2}\left\{\begin{array}{l} -2e\cos(v-\varpi) + \frac{3}{2}e^2\cos(2v-2\varpi) \\ +\frac{3}{2}\gamma^2\cos(2v-2\theta) - \frac{7}{4}e\gamma^2\cos(v+\varpi-2\theta)\end{array}\right\},$$

et remarquant que la partie variable de e et de ϖ donne

$$-2e\cos(v-\varpi) = -2\delta e\cdot\cos cv - 2e_{,}\delta\varpi \sin cv,$$

l'on en conclura que, en prenant

$$\delta e = -\frac{7}{8}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)v, \qquad \delta\varpi = \frac{7}{8}\gamma_{,}^2\sin(2g-2c)v,$$

l'on a

$$-2e\cos(v-\varpi) = -2e_{,}\cos cv + \frac{7}{4}e_{,}\gamma_{,}^2\cos(2g-c)v.$$

Donc, en substituant cette valeur dans la précédente de Ω, et posant $\frac{M'h_{,}^4}{a'^3\sigma^2} = m^2\frac{\sigma}{a_{,}}$ (Voyez n.° 108), l'on en conclura

$$\Omega = -\frac{m^2}{8}\cdot\frac{\sigma}{a_{,}}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)v$$
$$+\frac{m^2}{4}\cdot\frac{\sigma}{a_{,}}\left\{-2e_{,}\cos cv + \frac{3}{2}e_{,}^2\cos 2cv + \frac{3}{2}\gamma_{,}^2\cos 2gv\right\}.$$

117. Supposons maintenant que l'on substitue ici au lieu de v sa valeur en fonction de t, au moyen d'une équation de la forme

$$nt = v - \varphi(v),$$

et cherchons quel doit être après cette substitution le coefficient numérique qui affecte l'argument $(2g-2c)\,nt$. Pour cela il est nécessaire d'avoir la fonction désignée par $\phi(v)$. Or l'expression de $t+f$ trouvée dans le n.° 63, après le développement des parties variables de e et γ exposé dans le n.° 89, donne

$$t+f=\frac{h_{,}^3}{\sigma^2}v+\frac{h_{,}^3}{\sigma^2}\left\{-2e_{,}\sin cv+\frac{3}{4}e_{,}^2\sin 2cv+\frac{1}{4}\gamma_{,}^2\sin 2gv+e_{,}\gamma_{,}^2\sin(2g-c)\right\};$$

donc, en posant $n=\frac{\sigma^2}{h_{,}^3}$, et écrivant pour plus de simplicité nt au lieu de $nt+nf$, l'on aura

$$\phi(v)=2e_{,}\sin cv-\frac{3}{4}e_{,}^2\sin 2cv-\frac{1}{4}\gamma_{,}^2\sin 2gv-e_{,}\gamma_{,}^2\sin(2g-c)\,v.$$

Cela posé, si l'on fait

$$\psi(v)=-2e_{,}\cos cv+\frac{3}{2}e_{,}^2\cos 2cv+\frac{3}{2}\gamma_{,}^2\cos 2gv,$$

$$\frac{d\cdot\psi(v)}{dv}=\psi'(v)=2e_{,}\sin cv-3e_{,}^2\sin 2cv-3\gamma_{,}^2\sin 2gv,$$

nous aurons, d'après le théorème de Lagrange,

$$\psi(v)=\psi(nt)+\phi(nt)\times\psi'(nt)+\frac{1}{2}\frac{d\cdot\psi'(nt)\times\overline{\phi(nt)}^2}{dnt}+\text{etc.}$$

En formant le produit $\phi(nt)\times\psi'(nt)$, et retenant seulement l'argument $(2g-2c)\,nt$, l'on trouvera

$$\begin{aligned}\phi(nt)\times\psi'(nt)&=\left(-1+\frac{3}{8}+\frac{9}{8}\right)e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)\,nt\\&=\frac{1}{2}e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)\,nt.\end{aligned}$$

Il est d'ailleurs évident que la fonction $\frac{1}{2}\cdot\frac{d\cdot\psi'(nt)\times\overline{\phi(nt)}^2}{dnt}$ donnerait, en vertu de la différentiation, un résultat de la forme

$$A(2g-2c)\,e_{,}^2\gamma_{,}^2\cos(2g-2c)\,nt,$$

c'est-à-dire un terme que l'on peut négliger comme étant d'un ordre supérieur au précédent de deux unités. Donc les deux parties qui composent la valeur de Ω posée à la fin du numéro précédent, donnent un résultat nul, puisque l'on a

$$\Omega=-\frac{m^2}{8}\cdot\frac{\sigma}{\alpha_{,}}e_{,}^2\gamma_{,}^2(1-1)\cos(2g-2c)\,nt=0.$$

118. Il suit de là (Voyez n.° 115) que nous avons

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{2}M'\int \frac{u'^3}{u^2}\sin(2v-2v')\,dv' = \frac{63}{64}\cdot\frac{m^4\sigma}{a_i}\cdot\frac{e_i^2\gamma_i^2}{2g-2c}\cos(2g-2c)nt\,;$$

ou bien, en prenant $2g-2c = 3m^2$,

$$-\frac{2a_i}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{21}{32}m^2 e_i^2\gamma_i^2\cos(2g-2c)nt\,.$$

En substituant cette valeur dans celle de $\frac{1}{a}$ (Voy. n.° 110), nous aurons

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_i} - \frac{21}{32}\cdot\frac{m^2 e_i^2\gamma_i^2}{a_i}\cos(2g-2c)nt\,.$$

En rapprochant cette équation de celle trouvée à la fin du même numéro

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_i} - \frac{13}{32}\cdot\frac{m^2 e_i^2\gamma_i^2}{a_i}\cos(2g-2c)v\,,$$

l'on acquiert une idée nette de la différence *analytique* qu'il y a, à l'égard de cet argument, dans l'expression de la fonction $\frac{1}{a}$, suivant que l'on adopte le tems ou la longitude vraie pour la variable indépendante.

Comparaison des résultats précédens avec ceux trouvés par M. de Laplace dans son Mémoire publié dans la Connaissance des tems pour l'année 1824, *pag.* 287-296.

119. M. de Laplace dans le volume cité de la Connaissance des tems a entrepris la recherche de l'inégalité lunaire dont l'argument est le double de la distance angulaire du périgée au nœud de l'orbite. Dans cette recherche il a fait usage des formules de la variation des constantes en fonction du tems qu'il avait données dans le Supplément au troisième volume de la Mécanique céleste. Comme son analyse l'a conduit à un résultat tout-à-fait différent du nôtre, nous pensons qu'il est de notre devoir d'examiner à quoi tient la cause de cette discordance.

L'auteur appelle $-R$ la fonction

$$\frac{M'u'^3}{2u^2}\left(\frac{1}{2} - ss + \frac{3}{2}\cos(2v - 2v')\right) = \frac{M'u'^3r^2}{4}\left(1 - 3\cdot ss + 3(1-ss)\cos(2v - 2v')\right)$$

que nous avons désignée par Ω, et il suppose que R développé dans une suite ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de e et de γ soit de la forme

$$M\cdot m^2 + H\cdot m^2e^2 + H'\cdot m^2\gamma^2 + L\cdot m^2e^2\cos(2mt - 2\varpi)$$
$$+ L'\cdot m^2\gamma^2\cos(2mt - 2\theta) + P\cdot m^2e^2\gamma^2\cos(2\varpi - 2\theta) + \text{etc.}$$

Pour avoir la valeur du demi-grand-axe, il fait usage de l'équation (1) du même Supplément, c'est-à-dire de l'équation

$$da = -2a^2dR \qquad \text{de laquelle il tire} \qquad \frac{1}{2a} = R.$$

Or il faut remarquer que la différentielle $-dR$, que nous avons désignée par $d'\Omega$, n'étant prise que par rapport aux coordonneés de la Lune, il n'est pas permis d'écrire, comme il le fait,

$$\int dR = R.$$

Voilà donc la source principale des différences que l'on rencontre entre nos formules et celles de M. de Laplace. Mais pour rendre plus évidente la différence essentielle qui existe entre ces deux fonctions, nous allons calculer la valeur de R, telle qu'elle résulte des formules mêmes de M. de Laplace, en ayant l'attention de séparer les termes qui sont introduits par l'élimination des coordonnées du Soleil.

120. Pour cet objet désignons par t' le tems qui naît de ces dernières coordonnées, il faudra écrire la valeur de R sous cette forme

$$R = M\cdot m^2 + H\cdot m^2e^2 + H'\cdot m^2\gamma^2 + L\cdot m^2e^2\cos(2mt' - 2\varpi)$$
$$+ L'\cdot m^2\gamma^2\cos(2mt' - 2\theta) + P\cdot m^2e^2\gamma^2\cos(2\varpi - 2\theta).$$

En suivant les dénominations de M. de Laplace, et faisant, d'après les formules données dans la Mécanique céleste, tome I, pag. 181 et 182,

$$v = t + 2e\sin(t - \varpi) + \frac{5}{4}e^2\sin(2t - 2\varpi) - \frac{1}{4}\gamma^2\sin(2t - 2\theta);$$

$$\frac{r^2}{4} = a^2\left\{\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^2 - \frac{1}{2}e\cos(t - \varpi) - \frac{e^2}{8}\cos(2t - 2\varpi)\right\},$$

l'on trouve sans difficulté

$$\cos(2v-2v') = (1-4e^2)\cos(2t-2mt) - 2e\cos(t-2mt+\varpi) + \left(2-\frac{5}{4}\right)e^2\cos(2mt-2\varpi) + \frac{1}{4}\gamma^2\cos(2mt-2\theta).$$

Il suit de là que l'on a

$$\frac{3}{4}r^2\cos(2v-2v') = \left(\frac{9}{16}+\frac{3}{2}-\frac{3}{16}\right)a^2e^2\cos(2mt-2\varpi) + \frac{3}{16}a^2\gamma^2\cos(2mt-2\theta),$$

ou bien

$$\frac{3}{4}r^2\cos(2v-2v') = \frac{15}{8}a^2e^2\cos(2mt-2\varpi) + \frac{3}{16}a^2\gamma^2\cos(2mt-2\theta).$$

La fonction

$$r^2s^2\cos(2v-2v') = \frac{r^2\gamma^2}{2}\left\{1-\cos(2v-2\theta)\right\}\cos(2v-2v')$$

donne évidemment le terme

$$-\frac{r^2\gamma^2}{4}\cos(2v'-2\theta) = -\frac{a^2\gamma^2}{4}\cos(2mt-2\theta);$$

partant l'on a

$$-\frac{3}{4}r^2s^2\cos(2v-2v') = \frac{3}{16}a^2\gamma^2\cos(2mt-2\theta).$$

Nous avons en conséquence

$$\frac{3}{4}r^2(1-s^2)\cos(2v-2v') = \frac{15}{8}a^2e^2\cos(2mt-2\varpi) + \frac{3}{8}a^2\gamma^2\cos(2mt-2\theta).$$

121. En considérant maintenant l'équation

$$-3s^2 = -\frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma^2\cos(2v-2\theta),$$

l'on trouvera

$$-3s^2 = -\frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma^2\cos(2t-2\theta) - 3e\gamma^2\cos(t-2\theta+\varpi) + \frac{9}{8}e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta).$$

Multipliant cette fonction par la valeur précédente de $\frac{r^2}{4}$, et conservant seulement l'argument $2\varpi-2\theta$, l'on obtiendra

$$-\frac{3}{4}r^2s^2 = -\frac{3}{8}a^2\gamma^2 + a^2\left(\frac{9}{32}+\frac{3}{4}-\frac{3}{32}\right)e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta),$$

ou bien

$$-\frac{3}{4}r^2s^2 = -\frac{3}{8}a^2\gamma^2 + \frac{15}{16}a^2e^2\gamma^2\cos(2\varpi-2\theta).$$

Maintenant, si l'on fait $u' = \frac{1}{a'}$, l'on a

$$M' a^2 u'^3 = \frac{\sigma}{a} \cdot \frac{M'}{\sigma} \cdot \frac{a^3}{a'^3} = \frac{\sigma}{a} m^2.$$

Donc, en substituant ces valeurs dans celle de R, et écrivant mt' au lieu de mt, nous aurons

$$\frac{a}{\sigma} R = m^2 \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} \gamma^2 - \frac{15}{16} e^2 \gamma^2 \cos(2\varpi - 2\theta) \right\}$$
$$- m^2 \left\{ \frac{15}{8} e^2 \cos(2mt' - 2\varpi) + \frac{3}{8} \gamma^2 \cos(2mt' - 2\theta) \right\}.$$

En supposant, comme M. de Laplace, $a = 1$, $\sigma = 1$, l'on obtient sa valeur de R, et l'on voit de plus qu'il faut y supposer $P = -\frac{15}{16}$.

122. Cela posé, il s'agit de substituer dans cette expression de R les valeurs de δe, $\delta \varpi$, $\delta \gamma$, $\delta \theta$, *telles qu'elles sont données par les formules trouvées par M. de Laplace*, et de différentier ensuite par rapport a t le résultat ainsi formé, afin d'avoir l'expression de la différentielle désignée par dR. Après cela, l'on posera $t' = t$, et en intégrant l'on aura la valeur que prend l'intégrale $\int dR$ relativement à l'argument $(2g - 2c)t$.

En posant pour plus de simplicité

$$\delta' e = \frac{Pm^2 e \gamma^2}{g - c} \cos(2g - 2c)\, t, \qquad \delta' \varpi = -\frac{Pm^2 \gamma^2}{g - c} \sin(2g - 2c)\, t,$$

et écrivant ensuite $e + \delta' e$, $\varpi + \delta' \varpi$ à la place de e et ϖ dans le premier terme de la valeur de δe donnée à la page 287, l'on aura

$$\delta e = -\frac{Lm^2 \cdot \delta' e}{m + c - 1} \cos[2m - 2(1 - c)]\, t - \frac{2Lm^2 e \cdot \delta' \varpi}{m + c - 1} \sin[2m - 2(1 - c)]\, t.$$

Donc, en substituant pour $\delta' e$, $\delta' \varpi$ leurs valeurs précédentes, il viendra

$$\delta e = -\frac{P \cdot Lm^4 e \gamma^2}{(m + c - 1)(g - c)} \left\{ \frac{3}{2} \cos[2g - 2c + 2m - 2(1 - c)]\, t - \frac{1}{2} \cos[2g - 2c - 2m + 2(1 - c)]\, t \right\}.$$

Actuellement, si l'on pose

$$\delta e = -\frac{Lm^2 e}{m + c - 1} \cos[2m - 2(1 - c)]\, t + \frac{Pm^2 e \gamma^2}{g - c} \cos(2g - 2c)\, t,$$

l'on obtient, en faisant le carré,

$$(\delta e)^2 = -\frac{P \cdot Lm^4 e \gamma^2}{(m + c - 1)(g - c)} \left\{ \cos[2g - 2c + 2m - 2(1 - c)]\, t + \cos[2g - 2c - 2m + 2(1 - c)]\, t \right\}.$$

123. Il suit de là que, en ayant égard à ces deux argumens seulement, l'on a

$$m^2L(e+\delta e)^2 =$$

$$-\frac{P.L^2m^6e^2\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\left\{4\cos[2g-2c+2m-2(1-c)]t+0\cos[2g-2c-2m+2(1-c)]t\right\},$$

ou bien, en supprimant le terme multiplié par zéro,

$$m^2L(e+\delta e)^2 = -\frac{4P.L^2m^6e^2\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\cos[2g-2c+2m-2(1-c)]t.$$

Nous avons

$$\cos(2mt'-2\varpi-2\delta\varpi) = \cos[2mt'-2(1-c)t]+2\delta\varpi\sin[2mt'-2(1-c)t];$$

$$\delta\varpi = \frac{2Lm^2.\delta'\varpi}{m+c-1}\cos[2m-2(1-c)]t$$

$$= -\frac{P.Lm^4\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\left\{\sin[2g-2c+2m-2(1-c)]t+\sin[2g-2c-2m+2(1-c)]t\right\};$$

et par conséquent

$$m^2L(e+\delta e)^2\cos[2mt'-2(1-c)t] = -\frac{2P.L^2m^6e^2\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\cos(2gt-2ct+2mt-2mt');$$

$$m^2L(e+\delta e)^2 2\delta\varpi\sin[2mt'-2(1-c)t] = -\frac{P.L^2m^6e^2\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\left\{\begin{array}{l}\cos(2gt-2ct+2mt-2mt')\\ -\cos(2gt-2ct-2mt+2mt')\end{array}\right\}.$$

En sommant ces deux parties, l'on voit que le terme $Lm^2e^2\cos(2mt'-2\varpi)$, qui entre dans la valeur de R, devient

$$Lm^2e^2\cos(2mt'-2\varpi) = -\frac{P.L^2m^6e^2\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\left\{\begin{array}{l}3\cos(2gt-2ct+2mt-2mt')\\ -\cos(2gt-2ct-2mt+2mt')\end{array}\right\}.$$

Il est d'ailleurs évident que l'on a

$$Hm^2e^2 = 2Hm^2e\delta'e = \frac{2HPm^4e^2\gamma^2}{g-c}\cos(2g-2c)t,$$

$$H'm^2\gamma^2 = 2H'm^2\gamma\delta'\gamma = -\frac{2H'Pm^4e^2\gamma^2}{g-c}\cos(2g-2c)t.$$

124. Actuellement faisons pour plus de simplicité

$$\delta'\gamma = -\frac{Pm^2\gamma e^2}{g-c}\cos(2g-2c)t; \qquad \delta'\theta = -\frac{Pm^2e^2}{g-c}\sin(2g-2c)t.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$\delta\gamma = -\frac{L'm^2 \cdot \delta'\gamma}{m+g-1} \cos[2m-2(1-g)]t - \frac{2L'm^2\gamma \cdot \delta'\theta}{m+g-1} \sin[2m-2(1-g)]t,$$

nous aurons

$$\delta\gamma = \frac{P \cdot L'm^4\gamma e^2}{(m+g-1)(g-c)} \left\{ -\frac{1}{2}\cos[2g-2c+2m-2(1-g)]t + \frac{3}{2}\cos[2g-2c-2m+2(1-g)]t \right\}.$$

En faisant le carré de l'équation

$$\delta\gamma = -\frac{L'm^2\gamma}{m+g-1}\cos[2m-2(1-g)]t - \frac{Pm^2\gamma e^2}{g-c}\cos(2g-2c)t,$$

l'on obtient

$$(\delta\gamma)^2 = \frac{P \cdot L'm^4 e^2\gamma^2}{(m+g-1)(g-c)} \left\{ \cos[2g-2c+2m-2(1-g)]t + \cos[2g-2c-2m+2(1-g)]t \right\}.$$

En formant d'après cela la valeur de la fonction $L'm^2(\gamma+\delta\gamma)^2$, l'on voit que le coefficient de l'inégalité ayant pour argument $2gt-2ct+2mt-2(1-g)t$ est égal à zéro, de sorte que l'on a

$$L'm^2(\gamma+\delta\gamma)^2 = \frac{4P \cdot L'^2 m^6 e^2\gamma^2}{(m+g-1)(g-c)} \cos[(2g-2c-2m+2(1-g)]t.$$

Mais nous avons

$$\cos(2mt'-2\theta-2\delta\theta) = \cos[2mt'-2(1-g)t] + 2\delta\theta \sin[2mt'-2(1-g)t];$$

$$\delta\theta = \frac{2L'm^2 \cdot \delta'\theta}{m+g-1}\cos[2m-2(1-g)]t$$

$$= -\frac{P \cdot L'm^4 e^2}{(m+g-1)(g-c)} \left\{ \sin[2g-2c+2m-2(1-g)]t + \sin[2g-2c-2m+2(1-g)]t \right\};$$

partant l'on a

$$L'm^2(\gamma+\delta\gamma)^2\cos[2mt'-2(1-g)t] = \frac{2P \cdot L'^2 m^6 e^2\gamma^2}{(m+g-1)(g-c)}\cos(2gt-2ct-2mt+2mt');$$

$$2L'm^2(\gamma+\delta\gamma)^2 \cdot \delta\theta \sin[2mt'-2(1-g)t] = \frac{P \cdot L'^2 m^6 e^2\gamma^2}{(m+g-1)(g-c)} \left\{ \begin{array}{l} \cos(2gt-2ct-2mt+2mt') \\ -\cos(2gt-2ct+2mt-2mt') \end{array} \right\}.$$

Il est donc évident que le terme $L'm^2\gamma^2\cos(2mt'-2\theta)$, qui entre dans l'expression de R, donne

$$L'm^2\gamma^2\cos(2mt'-2\theta) = \frac{P \cdot L'^2 m^6 e^2\gamma^2}{(m+g-1)(g-c)} \left\{ \begin{array}{l} 3\cos(2gt-2ct-2mt+2mt') \\ -\cos(2gt-2ct+2mt-2mt') \end{array} \right\}.$$

L'on aurait pu conclure ce résultat de celui trouvé plus haut pour la valeur de $Lm^2e^2\cos(2mt'-2\varpi)$, mais, pour plus de clarté, nous avons préféré d'en exposer le calcul.

125. En réunissant ces différentes parties, l'on trouve

$$R = \left(1 + \frac{2Hm^2 - 2H'm^2}{g-c}\right)Pm^2e^2\gamma^2\cos(2g-2c)t$$
$$-\frac{P\cdot L^2m^6e^2\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\left\{3\cos(2gt-2ct+2mt-2mt')-\cos(2gt-2ct-2mt+2mt')\right\}$$
$$+\frac{P\cdot L'^2m^6e^2\gamma^2}{(m+g-1)(g-c)}\left\{3\cos(2gt-2ct-2mt+2mt')-\cos(2gt-2ct+2mt-2mt')\right\}.$$

En faisant dans cette formule $t'=t$, et observant que l'on a (Voyez Connaissance des tems 1824, pag. 288)

$$\frac{2L^2m^4}{m+c-1} = 1-c+2m^2H, \qquad \frac{2L'^2m^4}{m+g-1} = 1-g+2m^2H',$$

il est clair qu'il en résulte l'équation $R=0$.

Mais en différentiant cette expression de R par rapport à t, et traitant t' comme quantité constante, nous aurons

$$dR = -dt[2g-2c+4m^2(H-H')]\,Pm^2e^2\gamma^2\sin(2g-2c)t$$
$$-dt\frac{P\cdot L^2m^6e^2\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\left\{\begin{array}{l}-3(2g-2c+2m)\sin(2gt-2ct+2mt-2mt')\\+\;\;(2g-2c-2m)\sin(2gt-2ct-2mt+2mt')\end{array}\right\}$$
$$+dt\frac{P\cdot L'^2m^6e^2\gamma^2}{(m+g-1)(g-c)}\left\{\begin{array}{l}-3(2g-2c-2m)\sin(2gt-2ct-2mt+2mt')\\+\;\;(2g-2c+2m)\sin(2gt-2ct+2mt-2mt')\end{array}\right\}.$$

Donc, en faisant $t'=t$, et intégrant ensuite par rapport à t, il viendra

$$\int dR = \left(1+\frac{2m^2(H-H')}{g-c}\right)Pm^2e^2\gamma^2\cos(2g-2c)t$$
$$-\frac{P\cdot L^2m^6e^2\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)^2}\left\{\frac{3}{2}(2g-2c+2m)-\frac{1}{2}(2g-2c-2m)\right\}\cos(2g-2c)t$$
$$+\frac{P\cdot L'^2m^6e^2\gamma^2}{(m+g-1)(g-c)^2}\left\{\frac{3}{2}(2g-2c-2m)-\frac{1}{2}(2g-2c+2m)\right\}\cos(2g-2c)t;$$

ou bien

$$\int dR = \left(1 + \frac{2m^2(H - H')}{g - c}\right) Pm^2 e^2 \gamma^2 \cos(2g - 2c)t$$

$$- \left\{ \frac{4L^2 m^7}{m + c - 1} + \frac{4L'^2 m^7}{m + g - 1} \right\} \frac{Pe^2\gamma^2}{(g - c)^2} \cos(2g - 2c)\,t$$

$$- \left\{ \frac{2L^2 m^6}{m + c - 1} - \frac{2L'^2 m^6}{m + g - 1} \right\} \frac{Pe^2\gamma^2}{g - c} \cos(2g - 2c)\,t.$$

Mais les équations de la page 288 déjà citées donnent

$$\frac{2L^2 m^4}{m + c - 1} - \frac{2L'^2 m^4}{m + g - 1} = g - c + 2m^2(H - H');$$

$$\frac{4L^2 m^4}{m + c - 1} + \frac{4L'^2 m^4}{m + g - 1} = 4 - 2(g + c) + 4m^2(H + H').$$

Donc, en observant que $H + H' = 0$, l'on aura

$$\int dR = \frac{(4 - 2g - 2c)\,Pm^3 e^2 \gamma^2}{(g - c)^4} \cos(2g - 2c)\,t,$$

ou bien

$$\int dR = - \left\{ \frac{4L^2 m}{m + c - 1} + \frac{4L'^2 m}{m + g - 1} \right\} \frac{Pm^6 e^2 \gamma^2}{(g - c)^4} \cos(2g - 2c)\,t.$$

En faisant dans cette expression $m + c - 1 = m$, $m + g - 1 = m$, $(g - c)^2 = \frac{2}{4} m^2$, nous aurons

$$\int dR = -\frac{16}{9} P(L^2 + L'^2)\, m^2 e^2 \gamma^2 \cos(2g - 2c)\,t.$$

Donc, en posant $P = -\frac{15}{16}$, $L = -\frac{15}{8}$, $L' = -\frac{3}{8}$, il viendra

$$\int dR = \frac{195}{32}\, m^2 e^2 \gamma^2 \cos(2g - 2c)\,t.$$

Il est donc prouvé que la valeur de $\int dR$ n'est pas égale à zéro, même en y substituant pour δe, $\delta \varpi$, $\delta \gamma$, $\delta \theta$ les valeurs fournies par les formules de M. Laplace; et que ces formules sont loin d'être d'accord avec le théorème général relatif aux inégalités à longue période, énoncé en ces termes à la page 290 du volume cité; *ainsi ces inégalités disparaissent, comme dans* R, *des expressions de* a *et de* n.

126. Cette valeur de $\int dR$ devrait être affectée du même coefficient numérique que nous avons trouvé par notre méthode dans le n.° 118, c'est-à-dire que l'on aurait dû trouver

$$\int dR = -\frac{21}{64}m^2e^2\gamma^2 \cos(2g-2c)t.$$

La différence sur ce résultat tient à ce que nous ne sommes pas d'accord avec M. Laplace sur la valeur des variations des coordonnées de la Lune qui entrent dans ce calcul.

Pour reconnaître les termes sur lesquels tombent ces différences, posons, comme dans le n.° 80, $1-m=E$; les expressions de $\delta\theta$ et $\delta\gamma$ trouvées dans le n.° 124 deviennent

$$\delta\theta = \frac{PL'm^4e^2}{(m+g-1)\cdot(g-c)}\left\{\sin(2E+2c-4g)t - \sin(2E-2c)t\right\};$$

$$\delta\gamma = -\frac{PL'm^4\gamma e^2}{(m+g-1)(g-c)}\left\{\frac{1}{2}\cos(2E+2c-4g)t - \frac{3}{2}\cos(2E-2c)t\right\},$$

où $P.L' = \frac{3}{8}\cdot\frac{15}{16} = \frac{45}{128}$. Donc, en prenant $(m+g-1)(g-c) = \frac{3}{2}m^3$, et changeant t en v, l'on aura

$$\delta\theta = \frac{15}{64}me^2\sin(2E+2c-4g)v - \frac{15}{64}me^2\sin(2E-2c)v,$$

$$\delta\gamma = -\frac{15}{128}m\gamma e^2\cos(2E+2c-4g)v + \frac{45}{128}m\gamma e^2\cos(2E-2c)v.$$

Dans les n.ºs 94, 102, 103 nous avons trouvé

$$\delta\theta = \frac{15}{64}me^2\sin(2E+2c-4g)v + \frac{45}{64}me^2\sin(2E-2c)v,$$

$$\delta\gamma = -\frac{15}{128}m\gamma e^2\cos(2E+2c-4g)v + \frac{165}{128}m\gamma e^2\cos(2E-2c)v.$$

Il y a donc une différence très-considérable entre nos coefficiens numériques et ceux fournis par les formules de M. Laplace, à l'égard de l'argument $(2E-2c)v$.

127. Pour comparer les résultats relatifs aux quantités δe, $\delta\varpi$ exposés dans le n.° 123 avec ceux donnés par notre méthode, il est essentiel d'observer que les lettres désignées par e et ϖ dans les formules de M. Laplace reviennent à celles que nous désignons respectivement par ε et τ, et que celles-ci sont liées avec les constantes arbitraires que nous nommons e et ϖ par les équations posées

dans le n.° 41. Ces équations, en négligeant les quantités du quatrième ordre, donnent

$$\varepsilon = e\left\{1 - \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2\varpi - 2\theta)\right\},$$

$$\tau = \varpi - \frac{1}{4}\gamma^2 \sin(2\varpi - 2\theta).$$

De là il est aisé de conclure que, en retenant seulement les premiers termes de la variation, l'on a

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon = \; & \frac{1}{4}\gamma_{,}^{2} e_{,} \cos(2g - 2c)v + \left(1 - \frac{1}{4}\gamma_{,}^{2}\right)\delta e - \frac{1}{2}e_{,}\gamma_{,}\delta\gamma \\ & + \left(\frac{1}{4}\gamma_{,}^{2}\delta e + \frac{1}{2}e_{,}\gamma_{,}\delta\gamma\right)\cos(2g - 2c)v \\ & - \frac{1}{2}e_{,}\gamma_{,}^{2}(\delta\varpi - \delta\theta)\sin(2g - 2c)v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\tau = & - \frac{1}{4}\gamma_{,}^{2}\sin(2g - 2c)v + \delta\varpi + \frac{1}{2}\gamma_{,}\delta\gamma \sin(2g - 2c)v \\ & - \frac{1}{2}\gamma_{,}^{2}(\delta\varpi - \delta\theta)\cos(2g - 2c)v.\end{aligned}$$

128. En substituant dans ces formules nos valeurs de δe, $\delta\gamma$, $\delta\varpi$, $\delta\theta$, l'on obtiendra, pour un argument donné, les valeurs de $\delta\varepsilon$ et $\delta\tau$. En appliquant ce procédé aux argumens $(2E - 2g)v$, $(2E + 2g - 4c)v$, l'on trouvera que nos formules donnent

$$\delta\varepsilon = -\frac{225}{128}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(2E - 2g)v + \frac{75}{128}\cdot\frac{m^2}{m}e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(2E + 2g - 4c)v,$$

$$\delta\tau = +\frac{27}{64}\cdot\frac{m^2}{m}\gamma_{,}^{2}\sin(2E - 2g)v - \frac{75}{64}\cdot\frac{m^2}{m}\gamma_{,}^{2}\sin(2E + 2g - 4c)v,$$

où l'on a

$$-\frac{225}{128} = -\frac{291}{128} - \frac{3}{16} + \frac{15}{64} + \frac{15}{32}; \qquad \frac{75}{128} = \frac{105}{128} + \frac{15}{64} - \frac{15}{32};$$

$$\frac{27}{64} = -\frac{3}{64} + \frac{15}{32}; \qquad -\frac{75}{64} = -\frac{105}{64} + \frac{15}{32}.$$

D'après le calcul exposé dans le n.° 122, les formules de M. de Laplace donnent

$$\delta e = -\frac{PLm^4e\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\left\{\frac{3}{2}\cos(2E-2g)t - \frac{1}{2}\cos(2E+2g-4c)t\right\},$$

$$\delta\varpi = -\frac{PLm^4\gamma^2}{(m+c-1)(g-c)}\left\{\sin(2E-2g)t - \sin(2E+2g-4c)t\right\}.$$

En y faisant $P = -\frac{15}{16}$, $L = -\frac{15}{8}$, $m-c-1 = m$, $g-c = \frac{3}{2}m^2$, l'on voit que l'expression de δe s'accorde avec celle de $\delta\varepsilon$, mais qu'il il y a une différence dans l'expression de $\delta\varpi$.

129. D'après cela, il est aisé de sentir que l'expression de R, trouvée au commencement du n.° 125, a besoin d'être rectifiée, puisque l'on vient de voir qu'elle a été formée avec des valeurs inexactes de $\delta\theta$, $\delta\gamma$, $\delta\varpi$. En exécutant cette rectification l'on obtient pour R un résultat qui, relativement aux termes multipliés par m^3, cesse de donner $R = 0$, lorsque l'on y fait $t = t'$. Comme il est important de ne laisser aucun doute sur cette assertion contraire au théorème énoncé par M. de Laplace à l'égard de cette fonction, nous allons reprendre ici rapidement le calcul qui conduit à la valeur de R en question, au moyen des véritables valeurs de $\delta\theta$, $\delta\gamma$, $\delta\varpi$, δe.

Notre expression de $\delta\tau$, trouvée dans le n.° 128, devient, en écrivant $\delta\varpi$ au lieu de $\delta\tau$,

$$\delta\varpi = -\frac{27}{64}m\gamma^2 . \sin[2g-2c+2m-2(1-c)]t$$
$$-\frac{75}{64}m\gamma^2 . \sin[2g-2c-2m+2(1-c)]t.$$

Il suit de là que l'on a

$$m^2L(e+\delta e)^2 . 2\delta\varpi\sin[2mt'-2(1-c)t] = m^3Le^2\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{27}{64}\cos(2gt-2ct+2mt-2mt') \\ +\frac{75}{64}\cos(2gt-2ct-2mt+2mt')\end{array}\right\},$$

au lieu du résultat correspondant trouvé dans le n.° 123. La valeur de δe étant exacte, l'on peut conserver pour

$$m^2L(e+\delta e)^2\cos[2mt'-2(1-c)t]$$

l'expression donnée dans le même numéro; mais nous l'écrirons sous cette forme

$$m^2L(e+\delta e)^2\cos[2mt'-2(1-c)t] = -\frac{75}{32}m^3Le^2\gamma^2\cos(2gt-2ct+2mt-2mt').$$

D'après ces changemens l'on obtient

$$Lm^2e^2\cos(2mt' - 2\varpi) = m^3Le^2\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{177}{64}\cos(2gt - 2ct + 2mt - 2mt') \\ +\frac{75}{64}\cos(2gt - 2ct - 2mt + 2mt') \end{array} \right\},$$

où le coefficient $-\frac{177}{64} = -\frac{27}{64} - \frac{75}{32}$.

La valeur de $\delta\gamma$ trouvée dans le n.° 126 donne

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= -\frac{15}{128} m\gamma e^2 \cos[2g - 2c + 2m - 2(1-g)]t \\ &\quad + \frac{165}{128} m\gamma e^2 \cos[2g - 2c - 2m + 2(1-g)]t. \end{aligned}$$

L'on peut retenir pour $(\delta\gamma)^2$ la valeur donnée dans le n.° 124, c'est-à-dire

$$(\delta\gamma)^2 = -\frac{5}{8}L'me^2\gamma^2 \left\{ \cos[2g-2c+2m-2(1-g)]t + \cos[2g-2c-2m+2(1-g)]t \right\}.$$

Alors l'on trouve

$$L'm^2(\gamma+\delta\gamma)^2 = L'^2m^3e^2\gamma^2 \left\{ 0\cdot\cos[2g-2c+2m-2(1-g)]t - \frac{15}{2}\cos[2g-2c-2m+2(1-g)]t \right\},$$

en observant que $0 = \frac{5}{8} - \frac{5}{8}$, et $-\frac{15}{2} = -\frac{55}{8} - \frac{5}{8}$.

Dans le même n.° 126 l'on a trouvé

$$\begin{aligned} \delta\theta &= -\frac{15}{64} me^2 \sin[2g - 2c + 2m - 2(1-g)]t \\ &\quad + \frac{45}{64} me^2 \sin[2g - 2c - 2m + 2(1-g)]t. \end{aligned}$$

D'après cela, il est facile de former ces deux équations:

$$L'm^2(\gamma+\delta\gamma)^2\cos[2mt'-2(1-g)t] = \frac{45}{32}L'm^3e^2\gamma^2\cos(2gt - 2ct - 2mt + 2mt');$$

$$2L'm^2(\gamma+\delta\gamma)^2\delta\theta\sin[2mt'-2(1-g)t] = -L'm^3e^2\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{45}{64}\cos(2gt-2ct-2mt+2mt') \\ +\frac{15}{64}\cos(2gt-2ct+2mt-2mt') \end{array} \right\},$$

et d'en conclure que l'on a

$$L'm^2\gamma^2 cos(2mt'-2\theta) = L'm^3e^2\gamma^2 \left\{\begin{array}{l} \frac{45}{64} cos(2gt - 2ct - 2mt + 2mt') \\ -\frac{15}{64} cos(2gt - 2ct + 2mt - 2mt') \end{array}\right\},$$

où $\frac{45}{64} = + \frac{45}{32} - \frac{45}{64}$.

Cela posé, si l'on forme la valeur de R, l'on aura

$$R = \left(1 + \frac{2Hm^2 - 2H'm^2}{g-c}\right) Pm^2e^2\gamma^2 cos(2g - 2c)t$$

$$+ m^3Le^2\gamma^2\left\{-\frac{177}{64} cos(2gt-2ct+2mt-2mt') + \frac{75}{64} cos(2gt-2ct-2mt+2mt')\right\}$$

$$+ m^3L'e^2\gamma^2\left\{-\frac{15}{64} cos(2gt-2ct+2mt-2mt') + \frac{45}{64} cos(2gt-2ct-2mt+2mt')\right\}.$$

Actuellement, si l'on fait dans cette formule $t = t'$, il est clair que l'on a

$$R = \left(1 - \frac{1}{1+\frac{9}{2}m}\right) Pm^2 e^2\gamma^2 cos(2g - 2c)t$$

$$+ \left(-\frac{51}{32}L + \frac{15}{32}L'\right) m^3 e^2 \gamma^2 cos(2g - 2c)t.$$

Mais $\frac{1}{1+\frac{9}{2}m} = 1 - \frac{9}{2}m +$ etc., et $-\frac{51}{32}L + \frac{15}{32}L' = \frac{51}{32}\times\frac{15}{8} - \frac{15}{32}\times\frac{3}{8} = \frac{45}{16}$; partant nous avons

$$R = 0\cdot Pm^2 e^2\gamma^2 cos(2g - 2c)t + \left(\frac{45}{16} - \frac{9}{2}\times\frac{15}{16}\right) m^3 e^2 \gamma^2 cos(2g - 2c)t,$$

ou bien

$$R = -\frac{45}{32} m^3 e^2\gamma^2 cos(2g - 2c)t.$$

Ainsi il est démontré que l'on n'a pas $R = 0$, lorsque l'on considère les termes multipliés par m^3 qui entrent dans l'expression analytique du coefficient de l'argument $(2g - 2c)t$.

130. L'on doit maintenant observer que la fonction prise ici pour R est en réalité la valeur du produit $\frac{a}{\sigma}R$, comme on le voit par son expression rapportée à la fin du n.° 121. En conséquence, si l'on

voulait la valeur de R capable de donner les résultats fournis par notre fonction Ω, il faudrait en outre considérer la partie variable de a, qui peut avoir de l'influence sur le second terme du coefficient de l'argument $(2g - 2c)t$.

Il y aurait d'autres objections à faire contre le procédé que M. Laplace a suivi pour calculer le coefficient analytique de l'argument $(2g - 2c)t$, mais les discussions précédentes démontrent assez que le résultat qu'il a trouvé à la page 295 de son Mémoire doit être inexact, étant fondé sur l'équation $\int dR = 0$. Il est presque superflu d'ajouter que la proximité de la valeur numérique du coefficient trouvé par M. Laplace avec celui donné par l'observation ne prouve pas, à beaucoup près, que l'intégration a été bien conduite. Ce n'est pas par la différence, mais par le rapport que l'on doit juger de l'approximation que donne le calcul d'un terme qui ne peut être que très-petit, à cause du facteur $e^2 \gamma^2$ par lequel il est multiplié. Ce facteur couvre, pour ainsi dire, toutes les erreurs commises dans la partie vraiment difficile de cette théorie, c'est-à-dire dans la recherche du coefficient *numérique absolu et indépendant de la valeur particulière des élémens des orbites.*

En général toute théorie de la Lune qui ne fournit pas précisément ces coefficiens numériques absolus, doit être regardée comme incomplète, puisque ces nombres aussi mathématiquement exacts que ceux qui entrent, par exemple, dans la série de Taylor, sont une conséquence necéssaire de la gravitation universelle et de la forme des équations différentielles qu'il s'agit d'intégrer.

---

§ 5.

Application des formules de la variation des constantes arbitraires à la recherche de quelques termes principaux des perturbations lunaires dues à la figure de la Terre.

131. Commençons par la solution de cette question :

Recherche du premier terme du coefficient de l'inégalité produite par la figure elliptique de la Terre, ayant pour argument la distance de la Lune au nœud projetée sur l'ecliptique.

Pour avoir d'abord la première valeur de γ et de θ, il suffit de prendre, conformément aux formules trouvées dans le n.° 30,

$$\Omega_{(1)} = 2\sigma(\psi - K_{(2)})\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\omega\right) D^2u \cdot \gamma \sin(v - \theta)$$
$$+ 2\sigma(\psi - K_{(2)}) \sin\omega \cos\omega \cdot D^2u \sin(v + \phi),$$

et supposer nulle la fonction $\frac{1}{u^2} \cdot \frac{d\Omega}{dv}$, ce qui donne (Voyez n.° 68)

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = \sin(v - \theta) \frac{\Omega_{(1)}}{h^2}; \qquad \frac{d\gamma}{dv} = \cos(v - \theta) \frac{\Omega_{(1)}}{h^2}.$$

Mais, pour plus de clarté, il importe de ne pas perdre de vue que ces valeurs de $\gamma \frac{d\theta}{dv}$, $\frac{d\gamma}{dv}$ sont, tacitement, censées précédées de la partie due à l'action du Soleil; de sorte que il faut traiter ces équations comme une seconde approximation d'une espèce particulière. Alors il devient évident que, d'après les développemens exposés dans le paragraphe précédent, l'on doit remplacer l'angle $(v - \theta)$ par $(gv - \delta\theta)$, ce qui donne

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = \sin(gv - \delta\theta) \frac{\Omega_{(1)}}{h^2}; \qquad \frac{d\gamma}{dv} = \cos(gv - \delta\theta) \frac{\Omega_{(1)}}{h^2}.$$

Si l'on remarque maintenant que, en prenant $u = \frac{\sigma}{h_{\prime}^2}$, le premier terme de l'expression précédente de $\Omega_{(1)}$ introduit dans la

valeur de $\frac{d\theta}{dv}$ la partie constante

$$\frac{d\theta}{dv} = \sigma(\psi - K_{(2)})\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\omega\right)\frac{D^2}{h_i^4},$$

l'on comprendra aussitôt que la figure elliptique de la Terre modifie le mouvement progressif du nœud, et qu'il faut en conséquence regarder cette partie comme comprise dans la valeur de $1-g$ définie dans le n.° 80.

Cela posé, nous supprimerons de l'expression de $\Omega_{(1)}$ la première partie, et nous ferons pour plus de simplicité

$$A = D^2(\psi - K_{(2)})\sin\omega\cos\omega.$$

En outre, pour simplifier l'écriture des argumens, nous poserons $v + \phi = iv$, en nous rappelant que la lettre i représente une quantité très-peu différente de l'unité, puisque ϕ désigne le mouvement du point équinoxial sur l'écliptique fixe (Voyez n.° 9).

Il suit de là que nous avons

$$\gamma\frac{d\theta}{dv} = \frac{2\sigma Au}{h^2}\sin iv\sin(gv - \delta\theta),$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{2\sigma Au}{h^2}\sin iv\cos(gv - \delta\theta);$$

$\delta\theta$ désignant la partie composée de termes périodiques qui entre dans la valeur de θ. Nous poserons dans la première approximation $\delta\theta = 0$, ce qui réduit ces équations à celles-ci

$$\gamma\frac{d\theta}{dv} = \frac{2\sigma Au}{h^2}\sin iv\sin gv,$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{2\sigma Au}{h^2}\sin iv\cos gv.$$

132. Maintenant, si l'on fait $h = h_i$ et $u = \frac{\sigma}{h_i^2}$, il est évident que l'on a

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{\sigma^2 A}{\gamma h_i^4}\left\{\cos(g-i)v - \cos(g+i)v\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{\sigma^2 A}{h_i^4}\left\{\sin(g-i)v - \sin(g+i)v\right\}.$$

En intégrant la seconde de ces équations, et traitant i comme quantité constante (ce qui est permis par les mêmes raisons qui établissent le théorème démontré dans le n.° 51), il viendra

$$\gamma = \gamma_{,} + \frac{\sigma^2 A}{h_{,}^4}\left\{\frac{\cos(g-i)v}{g-i} - \frac{\cos(g+i)v}{g+i}\right\},$$

où, rigoureusement parlant, la quantité i tient, hors des argumens, la place de la quantité variable $1 + \frac{d\varphi}{dv}$.

Il est évident que pour avoir la valeur correspondante de θ, il suffit de faire $\gamma = \gamma_{,}$ dans celle de $\frac{d\theta}{dv}$, ce qui donne en intégrant

$$\theta = \theta_{,} + \frac{\sigma^2 A}{\gamma_{,} h_{,}^4}\left\{\frac{\sin(g-i)v}{g-i} - \frac{\sin(g+i)v}{g+i}\right\}.$$

Donc, en nommant à l'ordinaire $\delta\gamma$, $\delta\theta$ ces parties périodiques de γ et θ, l'on obtiendra la perturbation qui en résulte sur la latitude s au moyen de l'équation $s = \gamma \sin(v - \theta)$ mise sous la forme

$$s = \delta\gamma \sin gv - \gamma_{,} \delta\theta \cos gv;$$

d'où l'on conclut

$$s = \frac{\sigma^2 A}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{g-i} - \frac{1}{g+i}\right) \sin iv,$$

ou bien

$$s = \frac{2\sigma^2 iA}{h_{,}^4(g^2 - i^2)} \sin iv.$$

La grandeur de cette inégalité en latitude est due à la petitesse du diviseur $g^2 - i^2$ né de l'intégration. Sans cette circonstance, elle serait insensible, en vertu de la petitesse du coefficient $\frac{A}{h_{,}^4}$.

133. Il est aisé d'avoir la perturbation correspondante dans la valeur de u. Pour cela nous réduirons d'abord l'équation $\frac{dh^2}{dv} = \frac{2d\Omega}{u^2 dv}$ à celle-ci

$$\frac{dh^2}{dv} = 4\sigma Aus \cdot \cos iv,$$

ce qui est évident par les formules du n.° 30. Cela posé, si l'on fait ici $u = \frac{\sigma}{h^2}$, $s = \gamma_{,} \sin gv$, l'on aura

$$h^2 \frac{dh^2}{dv} = 2\sigma^2 A\gamma_{,}\left\{\sin(g-i)v + \sin(g+i)v\right\};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$h^4 = h_{,}^4 - 4\sigma^2 A\gamma_{,} \left\{ \frac{\cos(g-i)v}{g-i} + \frac{\cos(g+i)v}{g+i} \right\};$$

et en extrayant la racine carrée

$$h^2 = h_{,}^2 - \frac{2\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^2} \left\{ \frac{\cos(g-i)v}{g-i} + \frac{\cos(g+i)v}{g+i} \right\}.$$

En formant avec cette valeur et la précédente de γ la fonction $h^2(1+\gamma\gamma)$, l'on voit que le terme affecté de l'argument $(g-i)v$ disparaît, et que l'on a

$$h^2(1+\gamma\gamma) = -\frac{4\sigma^2 A\gamma}{h_{,}^2} \cdot \frac{\cos(g+i)v}{g+i}.$$

Donc, pour avoir seulement le terme divisé par $g-i$, l'on peut réduire la valeur elliptique de u à

$$u = \frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h_{,}^2(1+\gamma_{,}^2)} = \frac{\sigma(1+\frac{1}{2}ss)}{h_{,}^2(1+\gamma_{,}^2)},$$

et faire

$$s = \gamma_{,} \sin gv + \frac{2\sigma^2 i A}{h_{,}^4(g^2-i^2)} \sin iv,$$

ce qui donnera

$$u = \frac{\sigma^3 iA\gamma_{,}}{h_{,}^6(1+\gamma_{,}^2)(g^2-i^2)} \cos(g-i)v.$$

L'on peut ici remarquer que l'on a $r = \frac{\sqrt{(1+ss)}}{u}$, et que par conséquent ce terme n'entre pas dans la perturbation du rayon vecteur r.

134. Passons maintenant à la recherche de la valeur de t au moyen de ces deux équations (Voyez n.ºs 63 et 68):

$$t+f = \frac{a_{,}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sigma}} \int dv \left\{ 1 - \frac{2a_{,}}{\sigma} \int d'\Omega \right\}^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{df}{dv} = -\frac{3}{2}\gamma \sin(v-\theta) \frac{h\Omega_{(1)}}{\sigma^2} + \frac{2h^3}{\sigma^3}\Omega_{(2)}.$$

D'après les formules du n.° 30, nous ferons ici

$$\Omega_{(1)} = 2A\sigma \cdot u \sin iv; \qquad \Omega_{(2)} = 8A\sigma \cdot su^2 \sin iv;$$

et comme l'intégrale de la différentielle complète $\frac{d\Omega''}{dv}dv + \frac{d\Omega''}{du}du + \frac{d\Omega''}{ds}ds$ est, par le n.° 29, la fonction même désignée par Ω'', nous poserons l'équation

$$\int d'\Omega = \Omega'' = \sigma D^2 u^3 (\psi - K_{(2)}) \left(\sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right),$$

où il faut faire

$$\sin\lambda = \sin\omega \cdot \sin i\varphi + s \cdot \cos\omega.$$

Nous avons en conséquence

$$\int d'\Omega = 2\sigma A u^3 s \cdot \sin i\varphi.$$

Donc, en posant $u = \frac{\sigma}{h_1^2}$, $s = \gamma_1 \sin g\varphi$, et considérant seulement l'argument $(g-i)\varphi$, il viendra

$$\int d'\Omega = \frac{\sigma^4 A \gamma_1}{h_1^6} \cos(g-i)\varphi$$

et

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{13}{2} \cdot \frac{A\gamma_1}{h_1} \cos(g-i)\varphi;$$

d'où l'on tire $$f = \frac{13}{2} \cdot \frac{A\gamma_1}{h_1(g-i)} \sin(g-i)\varphi.$$

Ainsi, en réduisant l'expression précédente de $t+f$ à

$$t + f = \frac{\alpha_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sigma}} \int d\varphi \left(1 + \frac{3\alpha_1}{\sigma} \int d'\Omega\right),$$

l'on aura

$$t + f = \frac{3A\gamma_1 (\alpha_1\sigma)^{\frac{5}{2}}}{h_1^6 (g-i)} \sin(g-i)\varphi.$$

En faisant, comme dans le n.° 108, $\alpha_1 = \frac{h_1^2}{\sigma}$, et substituant pour f sa valeur précédente, il viendra

$$t = \left(3 - \frac{13}{2}\right) \frac{A\gamma_1}{h_1(g-i)} \sin(g-i)\varphi = -\frac{7}{2} \cdot \frac{A\gamma_1}{h_1(g-i)} \sin(g-i)\varphi.$$

Observons maintenant que, en posant $g = 1 + b + b'$, où b représente la partie de g qui dépend de l'action du Soleil, et b' la partie, beaucoup plus petite, qui dépend de la figure de la Terre, l'on a $g - i = 1 + b + b' - i$, ou bien $g - i = b + b' - \frac{d\varpi}{d\varphi}$, en se rappelant qu'ici (Voy. n.° 115) $i = 1 + \frac{d\varpi}{d\varphi}$. Or la fraction $b' - \frac{d\varpi}{d\varphi}$ étant considérablement plus petite que la fraction b, il en résulte

que cette inégalité serait beaucoup plus grande dans le cas purement hypothétique où l'on ferait abstraction de l'action du Soleil, puisqu'alors b étant nul, l'on aurait $\frac{1}{g-i} = \frac{1}{b' - \frac{d\varphi}{dv}}$. L'on peut donc considérer l'expression précédente de t comme celle qui, relativement à cet argument, donne l'*effet direct* dû à la figure de la Terre.

Mais en ayant égard à l'action du Soleil et considérant que cette perturbation est multipliée par $\frac{A}{g-i}$, et par conséquent par le rapport $\frac{A}{\mathrm{m}^2}$ des coefficiens qui multiplient ces deux forces perturbatrices, l'on conçoit qu'il devient indispensable d'avoir égard aussi à l'*effet indirect*; c'est-à-dire aux termes produits par le développement de la fonction qui représente l'action du Soleil, lorsque l'on y substitue la partie variable de γ, θ, h^2 que l'on vient de trouver pour l'effet direct. Il est aisé de sentir que cette seconde partie doit être du même ordre que la première, puisqu'en intégrant les fonctions $\frac{df}{dv}dv$, $dv\int d'\Omega$, elles acquièrent le diviseur $g-i$, qui détruit le facteur m^2 de la force perturbatrice du Soleil.

135. Réduisons l'expression de $\frac{df}{dv}$ trouvée dans le n.° 68 à ces termes

$$\frac{df}{dv} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{h\Omega_{(1)}}{\sigma^2}\gamma\,\sin(v-\theta) + \frac{h^3\Omega_{(2)}}{\sigma^3}\left\{2 + \frac{9}{2}\gamma^2 - \frac{\gamma^2}{2}\cos(2v-2\theta)\right\},$$

et les valeurs de $\Omega_{(1)}$, $\Omega_{(2)}$ données dans le n.° 27 à

$$\Omega_{(1)} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M'u'^3}{u^4}s; \qquad \Omega_{(2)} = -\frac{M'u'^3}{2u^3};$$

nous aurons

$$\frac{df}{dv} = \frac{M'h}{\sigma^2 a'^3 u^4}\left(\frac{9}{8}\gamma^2 - \frac{9}{8}\gamma^2\cos(2v-2\theta)\right) - \frac{M'h^3}{\sigma^3 a'^3 u^3}\left(1 + \frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{1}{4}\gamma^2\cos(2v-2\theta)\right);$$

où il suffit de faire dans le premier terme $u = \frac{\sigma}{h^2}$, et dans le second

$$\frac{1}{u^3} = \frac{h^6(1+\gamma^2)^3}{\sigma^3}(1+ss)^{-\frac{3}{2}} = \frac{h^6(1+\gamma^2)^3}{\sigma^3}\left(1 - \frac{3}{2}ss\right)$$
$$= \frac{h^6(1+3\gamma^2)}{\sigma^3}\left(1 - \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{3}{4}\gamma^2\cos(2v-2\theta)\right).$$

Il suit de là que l'on a

$$\frac{df}{dv} = -\frac{M'h^3}{\sigma^6 a'^3}\left(1 + \frac{27}{8}\gamma^2 + \frac{13}{8}\gamma^2 cos(2v - 2\theta)\right).$$

En substituant dans cette expression à la place de γ et θ les valeurs trouvées dans le n.° 132, l'on voit aussitôt que, en posant

$$\gamma^2 cos(2v - 2\theta) = 2\gamma_{,}\delta\gamma\, cos 2gv + 2\gamma_{,}^2\delta\theta\, sin\, 2gv,$$

il ne peut en résulter aucun terme qui soit à la fois dépendant de l'argument $(g - i)v$, et divisé par $g - i$. Donc il est permis de supprimer la fonction $\gamma^2 cos(2v - 2\theta)$ et de poser

$$\frac{df}{dv} = -\frac{M'h^9}{\sigma^6 a'^3}\left(1 + \frac{27}{8}\gamma^2\right).$$

Mais nous avons, d'après les formules des n.os 132 et 133,

$$\gamma^2 = \frac{2\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4(g-i)} cos(g - i)v; \qquad h^9 = -\frac{9\sigma^2 h_{,}^5 A\gamma_{,}}{g-i} cos(g - i)v;$$

ainsi il est clair que l'on a

$$\frac{df}{dv} = \frac{9}{4}\cdot\frac{M'h_{,}^5 A\gamma_{,}}{\sigma^4 a'^3}\cdot\frac{cos(g-i)v}{g-i};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$f = \frac{9}{4}\cdot\frac{M'h_{,}^5 A\gamma_{,}}{\sigma^4 a'^3 (g-i)^2} sin(g - i)v.$$

136. Cherchons maintenant les termes donnés par la fonction $\int d'\Omega$. Pour procéder avec plus d'ordre, réduisons d'abord la valeur de $d'\Omega$ donnée au commencement du n.° 108 à son premier terme, et posons l'équation

$$\int d'\Omega = -\frac{M'u'^3}{2u^2}\left(ss - \frac{1}{2}\right).$$

En faisant $u = \frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h^2(1+\gamma\gamma)}$, $s = \gamma\, sin(v - \theta)$, cette expression donne

$$\int d'\Omega = -\frac{M'u'^3}{2}\cdot\frac{h^4(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\gamma^2 - \frac{3}{4}\gamma^2 cos(2v - 2\theta)\right).$$

Mais ici l'on peut, comme dans le numéro précédent, supprimer le terme $\gamma^2 cos(2v - 2\theta)$. En outre l'on a vu dans le n.° 133 que la fonction $h^2(1 + \gamma\gamma)$ ne donne aucun terme dans le cas actuel.

Donc il est permis de réduire cette valeur de $\int d'\Omega$ à

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{8}\cdot\frac{M'h_{\prime}^{4}}{\sigma^{2}a'^{3}}\gamma^{2}.$$

Mais la valeur de γ trouvée dans le n.° 132 donne

$$\gamma^{2} = \frac{2\sigma^{2}A\gamma_{\prime}}{h_{\prime}^{4}(g-i)}\cos(g-i)v;$$

partant l'on a

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{4}\cdot\frac{M'A\gamma_{\prime}}{a'^{3}(g-i)}\cos(g-i)v.$$

137. En prenant seulement le troisième terme qui entre dans la valeur de $d'\Omega$ rapportée dans le n.° 108, nous avons

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{2}M'\int\frac{u'^{3}}{u^{2}}\sin(2v-2v')\,dv'.$$

Donc, en faisant $dv' = m dv$; $2v-2v' = 2Ev$; $u' = \frac{1}{a'}$, et $u = \frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h_{\prime}^{2}(1+\gamma_{\prime}^{2})}$, il viendra

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M'}{a'^{3}}\cdot\frac{h_{\prime}^{4}(1+\gamma_{\prime}\gamma_{\prime})^{2}}{\sigma^{2}}\int m dv\,(1-ss)\sin 2Ev;$$

ce qui démontre la nécessité de chercher le terme affecté de l'argument $(2E-i)v$ qui entre dans la valeur de s. Pour cela remarquons avant tout que les valeurs de $\gamma\frac{d\theta}{dv}$, $\frac{d\gamma}{dv}$ posées dans les n.os 75 et 81 donnent, en conservant seulement l'argument $2v'-2\theta$,

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{4}\mathrm{m}^{2}\cos(2v'-2\theta); \qquad \frac{d\gamma}{dv} = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^{2}\gamma\sin(2v'-2\theta).$$

Donc, en faisant $2v'-2\theta = -(2E-2g)v-2\delta\theta$, $\gamma = \gamma_{\prime}+\delta\gamma$, et développant, nous aurons

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{2}\mathrm{m}^{2}\delta\theta\sin(2E-2g)v,$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{4}\mathrm{m}^{2}\delta\gamma\sin(2E-2g)v + \frac{3}{2}\mathrm{m}^{2}\gamma_{\prime}\delta\theta\cos(2E-2g)v.$$

Maintenant, si l'on fait

$$\delta\gamma = \frac{\sigma^{2}A}{h_{\prime}^{4}(g-i)}\cos(g-i)v; \qquad \gamma_{\prime}\delta\theta = \frac{\sigma^{2}A}{h_{\prime}^{4}(g-i)}\sin(g-i)v,$$

il viendra

$$\gamma_{,}\frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^2 A\,\mathrm{m}^2}{h_{,}^4(g-i)}\left\{\cos(2E-g-i)v - \cos(2E-3g+i)v\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^2 A\,\mathrm{m}^2}{h_{,}^4(g-i)}\left\{\frac{3}{2}\sin(2E-g-i)v - \frac{1}{2}\sin(2E-3g+i)v\right\};$$

d'où l'on tire en intégrant et prenant $2E-g-i = -2m$, $2E-3g+i = -2m$;

$$\delta\gamma = \frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^2 A}{h_{,}^4(g-i)}\left\{\frac{9}{16}\cos(2E-g-i)v - \frac{3}{16}\cos(2E-3g+i)v\right\};$$

$$\gamma_{,}\delta\theta = \frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^2 A}{h_{,}^4(g-i)}\left\{\sin(2E-g-i)v - \sin(2E-3g+i)v\right\}.$$

138. Cela posé, pour avoir en s l'inégalité ayant pour argument $(2E-i)v$, il faudra considérer l'équation

$$s = (\gamma_{,} + \delta\gamma)\sin(gv - \delta\theta),$$

laquelle en développant le sinus devient

$$s = (\gamma_{,} + \delta\gamma)\left\{\sin gv - \delta\theta\cos gv - \frac{1}{2}(\delta\theta)^2\sin gv\right\},$$

ou bien

$$s = \delta\gamma\sin gv - \gamma_{,}\delta\theta\cos gv - \frac{1}{2}\gamma_{,}(\delta\theta)^2\sin gv - \delta\gamma\,\delta\theta\cos gv.$$

Or, en retenant seulement l'argument $(2E-i)v$, les expressions précédentes de $\delta\gamma$, $\gamma_{,}\delta\theta$ donnent

$$\delta\gamma\sin gv - \gamma_{,}\delta\theta\cos gv = \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{16}\right)\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^2 A}{h_{,}^4(g-i)}\sin(2E-i)v;$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_{,}(\delta\theta)^2\sin gv = -\frac{3}{32}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^2 A}{h_{,}^4(g-i)}\sin(2E-i)v,$$

$$\delta\gamma\,\delta\theta\cos gv = 0;$$

partant nous avons

$$s = \frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^2 A}{h_{,}^4(g-i)}\sin(2E-i)v.$$

C'est, comme l'on voit, une espèce d'*évection en latitude* due à la figure de la Terre.

Maintenant, si l'on ajoute à cette valeur de s le terme $\frac{2\sigma^2 iA}{h_{,}^4(g^2-i^2)}\sin iv$ trouvé dans le n.° 132, et les deux termes

$$\gamma_{,}\sin gv+\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_{,}\sin(2E-g)v$$

trouvés dans le n.° 81, l'on formera une valeur de s, qui étant élevée au carré donnera

$$s^2=-\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4(g-i)}\left\{\cos(2E+g-i)v+\frac{2i}{g+i}\cos(2E-g+i)v\right\}.$$

Comme ici l'on peut faire $\frac{2i}{g+i}=\frac{2}{2+\frac{3}{4}\mathrm{m}^2+\text{etc.}}=1$, il est clair que, en formant le produit $s^2\sin 2Ev$, l'on a

$$s^2\sin 2Ev=0\,\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4(g-i)}\sin(g-i)v.$$

Ainsi, en ayant seulement égard au *premier* terme, il est prouvé par-là que l'on a

$$\int d'\Omega=-\frac{3}{2}\cdot\frac{M'}{a'^3}\cdot\frac{h_{,}^4(1+\gamma_{,}\gamma_{,})^2}{\sigma^2}\int m\,dv(1-ss)\sin 2Ev=0.$$

Mais il ne faut pas perdre de vue que ce calcul n'entraîne nullement la conséquence, que l'on doit avoir aussi zéro pour le coefficient numérique qui affecte le *second* terme de la même intégrale, relativement au même argument. Nous pourrions faire voir le contraire en poursuivant l'approximation jusqu'au point qu'il est nécessaire pour avoir effectivement ce second terme; mais cela rendrait trop prolixe l'exposition de ces applications, uniquement dirigées à développer l'esprit de cette méthode et à rendre plus sensible la vérité de la réflexion déjà faite au sujet de l'argument analogue $(2g-2c)v$, à la fin du n.° 106.

139. Enfin considérons le *second* terme de la valeur de $d'\Omega$ rapportée au commencement du n.° 108, c'est-à-dire l'équation

$$\int d'\Omega=\frac{3}{4}\cdot\frac{M'u'^3}{u^2}\cos(2v-2v').$$

En y faisant $2v-2v'=2Ev$; $u'=\frac{1}{a'}$; $u=\frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h^2(1+\gamma^2)}$, l'on a

$$\int d'\Omega=\frac{3}{4}\cdot\frac{M'}{a'^3}\cdot\frac{h^4(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2}(1-ss)\cos 2Ev.$$

L'expression de s^2 trouvée dans le numéro précédent donne

$$s^2 \cos 2E\nu = -\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^2 A\gamma_{\prime}}{h_{\prime}^4(g-i)}\cos(g-i)\nu,$$

et il est aisé de voir qu'il ne peut en résulter aucun terme semblable dans le produit $h^4(1+\gamma\gamma)^2\cos 2E$, puisque dans h^2 et dans $\delta\gamma$ l'argument multiplié par $\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{A}{g-i}$ est $(2E-g-i)\nu$ au lieu de $2E\nu\pm(g-i)\nu$. Donc nous avons

$$\int d'\Omega = \frac{9}{32}\cdot\frac{M'\mathrm{m}^2}{a'^3 m}\cdot\frac{A\gamma_{\prime}}{g-i}\cos(g-i)\nu,$$

c'est-à-dire un terme qui n'appartient pas à cette approximation, puisqu'il est d'un ordre plus grand d'une unité que celui trouvé dans le n.° 136. Il suffit en conséquence d'avoir égard au seul terme trouvé dans ce dernier numéro, et de prendre

$$\int d\nu\int d'\Omega = -\frac{3}{4}\cdot\frac{M'A\gamma_{\prime}}{a'^3(g-i)^2}\sin(g-i)\nu.$$

En substituant cette valeur et celle de f trouvée à la fin du n.° 135 dans l'équation

$$t+f = \frac{3\alpha_{\prime}^{\frac{5}{2}}}{\sigma\sqrt{\sigma}}\int d\nu\int d'\Omega,$$

l'on aura

$$t = -\frac{9}{4}\cdot\frac{M'A\gamma_{\prime}}{a'^3}\left\{\frac{h_{\prime}^5}{\sigma^4}+\frac{\alpha_{\prime}^{\frac{5}{2}}}{\sigma\sqrt{\sigma}}\right\}\frac{\sin(g-i)\nu}{(g-i)^2};$$

ou bien, en faisant ici, comme dans le n.° 134, $\alpha_{\prime} = \frac{h_{\prime}^2}{\sigma}$;

$$t = -\frac{9}{2}\cdot\frac{M'A h_{\prime}^5\gamma_{\prime}}{a'^3\sigma^4}\cdot\frac{\sin(g-i)\nu}{(g-i)^2}.$$

Si l'on se rappelle actuellement que dans le n.° 75 l'on a fait $\mathrm{m}^2 = \frac{M'h_{\prime}^6}{\sigma^4 a'^3}$, l'on écrira

$$t = -\frac{9}{2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 A\gamma_{\prime}}{h_{\prime}}\cdot\frac{\sin(g-i)\nu}{(g-i)^2}.$$

Telle est la véritable expression analytique de l'*effet indirect*. En réunissant ce résultat avec celui trouvé dans le n.° 134, la solution

complète du problème proposé au commencement de ce paragraphe sera renfermée dans cette formule remarquable

$$t = -\frac{A\gamma_{,}}{h_{,}(g-i)}\left(\frac{7}{2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{m^2}{g-i}\right)\sin(g-i)v.$$

En y faisant $g-i = g-1 = \frac{3}{4}m^2$, les deux parties se confondent en une seule, et l'on obtient

$$t = -\frac{19}{2}\cdot\frac{A\gamma_{,}}{h_{,}(g-i)}\sin(g-i)v,$$

ce qui s'accorde avec le résultat rapporté à la page 255 du troisième volume de la Mécanique céleste. Mais l'analyse que l'on vient d'exposer a l'avantage de faire voir clairement que le rapport entre l'effet direct et indirect est égal à celui de $\frac{7}{2}$ à $\frac{9}{2}\cdot\frac{m^2}{g-i}$, ou bien (en posant $g-i=\frac{3}{4}m^2$) à celui des nombres 7 et 12.

140. Remarquons en outre qu'en réunissant les deux parties de $\int d'\Omega$ trouvées dans les n.os 134 et 136, l'on a

$$\int d'\Omega = \left\{\frac{\sigma^4}{h_{,}^6}-\frac{3}{4}\cdot\frac{M'}{a'^3(g-i)}\right\}A\gamma_{,}\cos(g-i)v,$$

ou bien (en observant que $m^2 = \frac{M'h_{,}^6}{\sigma^4 a'^3}$)

$$\int d'\Omega = \left(1-\frac{3}{4}\cdot\frac{m^2}{g-i}\right)\frac{\sigma^4 A\gamma_{,}}{h_{,}^6}\cos(g-i)v.$$

Donc, en réduisant la valeur de $g-i$ *à son premier terme*, c'est-à-dire, en posant $g-i=\frac{3}{4}m^2$, l'on a

$$\int d'\Omega = 0\,\frac{\sigma^4 A\gamma_{,}}{h_{,}^6}\cos(g-i)v.$$

Mais en prenant pour $g-i$ *les deux premiers termes*, c'est-à-dire, en faisant d'après le n.° 80

$$g-i = \frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{32}\cdot\frac{m^4}{m},$$

la même expression de $\int d'\Omega$ donnerait

$$\int d'\Omega = \left\{1-\frac{1}{1-\frac{3}{8}\cdot\frac{m^2}{m}}\right\}\frac{\sigma^4 A\gamma_{,}}{h_{,}^6}\cos(g-i)v;$$

et par conséquent

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^4 A\gamma_{\prime}}{h_{\prime}^{6}}\cos(g-i)v,$$

lorsque l'on prend $\dfrac{1}{1-\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}} = 1+\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}$.

Nous venons de voir (Voyez n.° 139) que cette intégrale renferme comme une de ses parties la suivante

$$\int d'\Omega = \frac{9}{32}\cdot\frac{M'\mathrm{m}^2}{a'^3 m}\cdot\frac{A\gamma_{\prime}}{g-i}\cos(g-i)v;$$

laquelle, en posant $g-i = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2$, $\frac{M'}{a'^3} = \frac{\mathrm{m}^2\sigma^4}{h_{\prime}^{6}}$, devient

$$\int d'\Omega = \frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^4 A\gamma_{\prime}}{h_{\prime}^{6}}\cos(g-i)v.$$

Donc, en réunissant cette partie avec la précédente, l'on a

$$\int d'\Omega = 0\,\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^4 A\gamma_{\prime}}{h_{\prime}^{6}}\cos(g-i)v.$$

Il suit de là que pour avoir le terme *de cet ordre* qui entre dans l'expression *complète* de $\int d'\Omega$, il reste à considérer la fonction posée au commencement du n.° 137, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M'}{a'^3}\int\frac{dv'\sin(2v-2v')}{u^2},$$

laquelle, en y substituant pour $\frac{M'}{a'^3}$ la valeur rapportée plus haut, devient

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2\sigma^4}{h_{\prime}^{6}}\int\frac{dv'\sin(2v-2v')}{u^2}.$$

141. Nous avons déjà dit dans le n.° 138 que rien n'établit la nullité du coefficient numérique du terme dont il est question; mais afin d'établir le contraire par un procédé expéditif, nous placerons ici par anticipation les résultats suivans dont on peut voir la démonstration dans le chapitre où ces perturbations sont reprises et traitées avec beaucoup plus d'étendue par la méthode générale que nous avons suivie pour trouver les coefficiens de toutes les inégalités lunaires.

Suivant cette méthode, l'on a

$$\frac{h_{,}^2}{\sigma}u = 1 + m^2\cos 2Ev + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4 m^2}\cos(g-i)v$$
$$-\frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{4m}+\frac{7}{12}\right)\cos(2E+g-i)v - \frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{4m}+\frac{47}{96}\right)\cos(2E-g+i)v;$$

$$\delta nt = \frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{4m}+\frac{7}{6}\right)\sin(2E+g-i)v + \frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{4m}+\frac{103}{96}\right)\sin(2E-g+i)v;$$

où δnt désigne la perturbation du moyen mouvement nt de la Lune.

Donc, en posant $v' = mv + m\delta nt$, il viendra

$$dv'\sin(2v-2v') = mdv\left(\sin 2Ev - 2m\delta nt\cdot\cos 2Ev + \frac{d\cdot\delta nt}{dv}\sin 2Ev\right);$$

en posant $u = 1 + \delta u$, l'on a $\frac{1}{u^2} = 1 - 2\delta u + 3(\delta u)^2$, d'où l'on conclut

$$\frac{\sigma^2}{h_{,}^4 u^2} = 1 + \frac{\sigma^2 A}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{2m}+\frac{7}{6}+2\right)\gamma_{,}\cos(2E+g-i)v + \frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{2m}+\frac{47}{48}+2\right)\cos(2E-g+i)v;$$

ou bien

$$\frac{\sigma^2}{h_{,}^4 u^2} = 1 + \frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{2m}+\frac{19}{6}\right)\cos(2E+g-i)v + \frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{2m}+\frac{143}{48}\right)\cos(2E-g+i)v.$$

L'expression de δnt donne

$$-2m\delta nt\cos 2Ev = -\frac{\sigma^2}{h_{,}^4}\cdot\frac{A\gamma_{,}}{4}\sin(g-i)v + \frac{\sigma^2}{h_{,}^4}\cdot\frac{A\gamma_{,}}{4}\sin(g-i)v = 0;$$

$$\frac{d\cdot\delta nt}{dv} = \frac{A\sigma^2\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{2m}+\frac{11}{6}\right)\cos(2E+g-i)v + \frac{A\sigma^2\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{1}{2m}+\frac{79}{48}\right)\cos(2E-g+i)v;$$

$$\frac{d\cdot\delta nt}{dv}\sin 2Ev = \frac{A\sigma^2\gamma_{,}}{h_{,}^4}\left(\frac{79}{96}-\frac{11}{12}\right)\sin(g-i)v = -\frac{3}{32}\cdot\frac{\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^4}\sin(g-i)v.$$

Cela posé, si l'on fait $\mathrm{m}^2 = m^2$, il est clair que l'on a

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2\sigma^4}{h_{,}^6}\int\frac{dv'\sin(2v-2v')}{u^2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{m^3\sigma^4 A\gamma_{,}}{h_{,}^6}\int dv\left(-\frac{1}{4m}-\frac{19}{12}+\frac{1}{4m}+\frac{143}{96}-\frac{3}{32}\right)\sin(g-i)v;$$

ou bien

$$\int d'\Omega = \frac{9}{32}\cdot\frac{m^3\sigma^4 A\gamma_{,}}{h_{,}^6}\int dv\sin(g-i)v = -\frac{9}{32}\cdot\frac{m^3\sigma^4 A\gamma_{,}}{h_{,}^6(g-i)}\cos(g-i)v.$$

Donc, en faisant $g - i = \frac{3}{4}m^2$, nous aurons

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{8}\cdot\frac{m\sigma^2 A\gamma_{,}}{h_{,}^6}\cos(g-i)v.$$

D'après cela, l'on doit regarder comme clairement prouvé que l'on ne peut pas supposer $\int d'\Omega = 0$, lorsque l'on a pour but de trouver le terme qui, relativement à cet argument, suit le premier dans la valeur de t à laquelle nous sommes parvenus dans le n.° 122. En conséquence nous ne pouvons pas passer sous silence, que l'analyse relative à cette inégalité, exposée par M. de Laplace dans la Connaissance des tems pour l'année 1824 (page 301 et suivantes) ne pouvait pas lui fournir le second terme qu'il avait intention d'obtenir, parce que son calcul suppose que l'on a l'équation $\int d'\Omega = 0$, à l'égard du second terme, ce qui ne se vérifie pas. Mais il y a plus. Cette même analyse, et celle qui a paru plusieurs années auparavant dans la Mécanique céleste, sont imparfaites dans leurs parties constituantes même à l'égard du premier terme.

142. En effet nous avons démontré dans le n.° 122 que le véritable rapport entre l'effet direct et indirect est celui des nombres 7 et 12. Dans la Mécanique céleste (tome III, page 253-255) ce même rapport se trouve exprimé par celui des nombres $-3+\frac{1}{2}$ et -7, ou bien par celui de 5 à 14. Car il est clair que l'on doit comprendre dans l'effet direct la partie qui a $\frac{1}{2}$ pour coefficient numérique, puisqu'elle résulte de la perturbation directe de la latitude s (Voyez la page 255). Donc l'analyse de la Mécanique céleste donnerait une solution fautive pour le cas mathématique dans lequel l'on voudrait faire abstraction de l'action du Soleil, puisque suivant cette analyse, l'on a

$$t = \left(-3+\frac{1}{2}\right)\frac{A\gamma_{\prime}}{h_{\prime}(g-i)}\sin(g-i)v\,;$$

tandis que nous avons trouvé (n.° 134)

$$t = -\frac{7}{2}\cdot\frac{A\gamma_{\prime}}{h_{\prime}(g-i)}\sin(g-i)v.$$

Actuellement, pour rapprocher davantage notre analyse de celle exposée dans la Connaissance des tems citée plus haut, remarquons que, pour trouver le premier terme dans la valeur de t, l'on aurait pu établir d'abord l'équation $\int d'\Omega = 0$, et ensuite considérer seulement les parties données par la fonction f. En opérant ainsi, l'on obtient

$$t = -f = -\left(\frac{13}{2} + \frac{9}{4} \cdot \frac{\text{m}^2}{g-i}\right) \frac{A\gamma_1}{h_1(g-i)} \sin(g-i)v$$

(Voy. n.os 134 et 135), ce qui donne le même coefficient numérique $\frac{19}{2}$ en faisant, dans le premier facteur, $g - i \doteq \frac{3}{4}\,\text{m}^2$.

En présentant ainsi cette expression de t, l'on pourrait être induit en erreur et croire l'effet direct plus grand que l'effet indirect dans le rapport de 13 à 6; mais l'on évite cette méprise en se rappelant le mode de son existence.

Cela posé, remarquons qu'en employant les lettres de M. de Laplace (Voyez page 302 de la Connaissance des tems pour l'année 1824), son analyse revient à dire que l'on a

$$\frac{d \cdot \delta v}{dt} = -6X + 4\,\delta r^2 Q'.$$

Et comme l'équation qu'il désigne par $\delta\Omega = 0$ revient à $X + \delta \cdot r^2 Q' = 0$ (ce qui s'accorde avec notre équation $\int d'\Omega = 0$), il faut en conclure que l'*effet indirect* est ici exprimé par $4\,\delta \cdot r^2 Q' = -4X$. Donc, en ajoutant à $\frac{d \cdot \delta v}{dt}$ la quantité $\frac{1}{2}X$, pour avoir cette inégalité projetée sur le plan fixe de l'écliptique, l'on aura, conformément à cette analyse,

$$-6X + \tfrac{1}{2}X \quad \text{par l'effet direct,}$$

$$-4X \quad \text{par l'effet indirect;}$$

c'est-à-dire que ces deux effets sont entr'eux comme les nombres 11 et 8. Le premier de ces effets *surpassant* le second, il faut nécessairement comparer cette analyse avec celle où l'on tiendrait compte seulement des perturbations de l'époque, ou, ce qui revient au même, de la partie variable de la constante arbitraire f. Or nous venons de faire voir qu'en voulant envisager la question sous ce point de vue, l'on doit avoir $\frac{13}{6}$ au lieu de $\frac{11}{8}$ pour expression de ce rapport. Il est par-là établi qu'il y a un vice, soit dans l'analyse exposée dans la Mécanique céleste, soit dans l'analyse exposée dans la Connaissance des tems au sujet de cette inégalité. L'une et l'autre conduisent cependant au véritable coefficient numérique $\frac{19}{2}$ qui entre

dans la valeur de t en fonction de v, en vertu d'une exacte compensation entre les erreurs existantes dans les parties qui concourent à la formation de ce nombre remarquable. De pareilles réflexions n'offrent aucun intérêt, ou, pour parler avec plus de justesse, elles restent inaperçues par les astronomes qui comparent seulement le résultat de la théorie avec l'observation; mais on ne saurait en méconnaître l'importance réelle dans une théorie approfondie de la Lune.

Par la même raison l'on verra avec satisfaction que pour établir incontestablement le coefficient $\frac{12}{2}$, nous avons exposé dans le n.° 138 l'analyse propre à rendre évidente la nullité d'un terme qui fait partie de l'intégrale $\int d'\Omega$. Il est vrai que tous ces détails rendent notre démonstration prolixe; mais il nous paraît impossible de les éviter sans tomber dans une obscurité fatigante. C'est surtout dans un sujet aussi compliqué qu'il importe de viser à ce degré de rigueur, que l'on voit souvent conservé avec beaucoup moins de nécessité dans la démonstration des vérités élémentaires de la science.

Recherche de l'expression analytique du premier terme du coefficient de l'inégalité à longue période, ayant pour argument $(3i-2g-c)v$, *due à la différence des deux hémisphères terrestres.*

143. Reprenons les équations

$$\gamma\frac{d\theta}{dv} = \left(\Omega_{(1)} - \gamma\cos gv\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv}\right)\frac{\sin gv}{h^2},$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = \left(\Omega_{(1)} - \gamma\cos gv\cdot\frac{d\Omega}{u^2 dv}\right)\frac{\cos gv}{h^2}$$

que l'on déduit de celles posées dans le n.° 68, en raisonnant comme dans le n.° 131. En faisant pour plus de simplicité $B = K_{(3)}D^3\sin^3\omega$, les formules posées dans le n.° 30 donnent pour l'objet actuel

$$\Omega_{(1)} = \frac{3}{4}\sigma B\cdot u^2 s\sin 3iv\,; \qquad \frac{d\Omega}{u^2 dv} = -\frac{3}{4}\sigma B\cdot u^2\cos 3iv.$$

Maintenant, si l'on fait $s = \gamma \sin g\nu$, l'on aura

$$\frac{d\theta}{d\nu} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma B u^2}{h^2} \left(\sin 3i\nu - \sin(3i - 2g)\nu \right),$$

$$\frac{d\gamma}{d\nu} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma B \gamma \cdot u^2}{h^2} \left(\cos 3i\nu + \cos(3i - 2g)\nu \right).$$

En réduisant la valeur elliptique de u^2 à

$$u^2 = \frac{\sigma^2}{h^4(1+\gamma^2)^2} \left(1 + 2e \cos c\nu \right),$$

et considérant seulement les trois argumens $3i\nu$, $(3i - 2g)\nu$, $(3i - 2g - c)\nu$, il viendra

$$\frac{d\theta}{d\nu} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^3 B}{h^6(1+\gamma^2)^2} \left\{ \sin 3i\nu - \sin(3i - 2g)\nu - e \sin(3i - 2g - c)\nu \right\};$$

$$\frac{d\gamma}{d\nu} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^3 B\gamma}{h^6(1+\gamma^2)^2} \left\{ \cos 3i\nu + \cos(3i - 2g)\nu + e \sin(3i - 2g - c)\nu \right\}.$$

Donc en intégrant ces expressions et posant $\frac{1}{3i} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3i - 2g} = 1$, $(1+\gamma^2)^2 = 1$, $h = h_{,}$, nous aurons

$$\delta\theta = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^3 B}{h_{,}^6} \left\{ -\frac{1}{3} \cos 3i\nu + \cos(3i - 2g)\nu + \frac{e_{,} \cos(3i - 2g - c)\nu}{3i - 2g - c} \right\};$$

$$\delta\gamma = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^3 B \gamma_{,}}{h_{,}^6} \left\{ \frac{1}{3} \sin 3i\nu + \sin(3i - 2g)\nu + \frac{e_{,} \sin(3i - 2g - c)\nu}{3i - 2g - c} \right\}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $s = \gamma \sin(\nu - \theta)$, après l'avoir réduite à la forme $s = \delta\gamma \sin g\nu - \gamma_{,} \delta\theta \cos g\nu$, l'on trouvera

$$s = \frac{\sigma^3 B}{h_{,}^6} \left\{ -\frac{3}{8} \cdot \frac{e_{,}\gamma_{,} \cos(3i - g - c)\nu}{3i - 2g - c} - \frac{1}{4} \gamma_{,} \cos(3i - g)\nu \right\},$$

où il importe de remarquer que le premier terme de cette expression a pour diviseur la petite fraction $3i - 2g - c$.

144. Considérons maintenant l'équation

$$\frac{d \cdot h^2}{d\nu} = \frac{2\, d\Omega}{u^2 d\nu} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma B u^2 \cos 3i\nu}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}.$$

En y faisant

$$u^2 = \frac{\sigma^2}{h^4(1+\gamma^2)^2} \left(1 + ss + 2e \cos c\nu \cdot \sqrt{1+ss} \right),$$

nous aurons

$$\frac{d.h^2}{dv} = \frac{\sigma^3 B}{h^4(1+\gamma^2)^2}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos 3iv}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3e\cdot\cos cv\cdot\cos 3iv}{(1+ss)^3}\right).$$

Comme nous conservons seulement les argumens $(3i-2g)v$, $(3i-2g-c)v$, il suffit de prendre $(1+ss)^{-\frac{5}{2}} = 1-\frac{5}{2}ss = \frac{5}{4}\gamma^2\cos 2gv$; $(1+ss)^{-3} = 1-3\cdot ss = \frac{3}{2}\gamma^2\cos 2gv$, ce qui donne

$$h^4\frac{d.h^2}{dv} = \frac{\sigma^3 B}{(1+\gamma^2)^2}\left\{-\frac{9}{8}e\gamma^2\cos(3i-2g-c)v - \frac{15}{16}\gamma^2\cos(3i-2g)v\right\}.$$

En posant $(1+\gamma^2)^2 = 1$, et intégrant l'on obtient

$$h^6 = h_{,}^6 + \sigma^3 B\left\{-\frac{27}{8}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c} - \frac{45}{16}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v\right\},$$

d'où l'on conclut

$$h^2 = h_{,}^2 + \frac{\sigma^3 B}{h_{,}^4}\left\{-\frac{9}{8}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c} - \frac{15}{16}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v\right\}.$$

L'expression de $\delta\gamma$ trouvée dans le numéro précédent donne

$$\delta\gamma^2 = 2\gamma_{,}\delta\gamma = \frac{\sigma^3 B}{h_{,}^6}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c} + \frac{3}{4}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v\right\};$$

partant la variation de la fonction $h^2(1+\gamma^2)$ sera

$$h^2(1+\gamma^2) = \frac{\sigma^3 B}{h_{,}^4}\left\{-\frac{3}{8}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c} - \frac{3}{16}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v\right\}.$$

145. A l'aide de ces résultats il est facile d'obtenir le terme affecté de l'argument $(3i-2g-c)v$ et divisé par $3i-2g-c$, qui entre dans la valeur de u. Pour cela remarquons que la fonction $e\cos(v-\varpi)$ ne peut donner des termes de cette espèce et que par conséquent il suffit de prendre $u = \frac{\sigma}{h^2(1+\gamma^2)}\sqrt{1+ss}$.

En prenant $\sqrt{1+ss} = 1+\frac{1}{4}\gamma^2$ et en substituant pour γ^2 et $h^2(1+\gamma^2)$ les valeurs précédentes, l'on obtient

$$u = \frac{9}{16}\cdot\frac{\sigma^4 B}{h_{,}^8}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c},$$

où le coefficient numérique $\frac{9}{15} = \frac{3}{8}+\frac{3}{16}$.

146. Cela posé, cherchons les termes affectés du même argument qui entrent dans les valeurs de e et de ϖ.

Réduisons les expressions de $\frac{de}{dv}$, $e\frac{d\varpi}{dv}$ rapportées dans le n.° 68 à celles-ci :

$$\frac{de}{dv} = -\frac{1+\gamma\gamma}{\sigma} \sin cv \cdot \Omega_{(2)} + \left\{ \frac{3}{2}\gamma \cos(g-c)v + \frac{1}{2}\gamma\cos(g+c)v \right\} \frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$$

$$+ \left\{ 2\cos cv - \frac{5}{4}\gamma^2 \cos(2g-c)v - \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2g+c)v \right\} \frac{1}{h^2} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv},$$

$$e\frac{d\varpi}{dv} = \frac{1+\gamma\gamma}{\sigma} \cos cv \cdot \Omega_{(2)} + \left\{ -\frac{3}{2}\gamma \sin(g-c)v + \frac{1}{2}\gamma \sin(g+c)v \right\} \frac{\Omega_{(1)}}{h^2}$$

$$+ \left\{ 2\sin cv + \frac{5}{4}\gamma^2 \sin(2g-c)v - \frac{1}{4}\gamma^2 \sin(2g+c)v \right\} \frac{1}{h^2} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv};$$

et faisons d'après les formules du n.° 30

$$\Omega_{(1)} = \frac{3}{4}\sigma B \cdot u^2 s \sin 3iv;$$

$$\Omega_{(2)} = \sigma^3 B \cdot \frac{(-1+\frac{3}{4}ss)\, u^3 \sin 3iv}{(1+ss)^{\frac{9}{2}}};$$

$$\frac{d\Omega}{u^2 dv} = -\frac{3}{4}\sigma B \cdot \frac{u^2 \cos 3iv}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}.$$

Comme il suffit ici de prendre $u = \frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h^2(1+\gamma^2)}$, nous poserons

$$\Omega_{(2)} = \frac{\sigma^4 B}{h^6(1+\gamma\gamma)^3} \cdot \frac{(-1+\frac{3}{4}ss)\sin 3iv}{(1+ss)^3};$$

$$\frac{d\Omega}{u^2 dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma^3 B}{h^4(1+\gamma^2)^2} \cdot \frac{\cos 3iv}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}.$$

Maintenant, si l'on fait $(1+ss)^{-3} = 1 - 3ss$; $(1+ss)^{-\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5}{2} \cdot ss$, il viendra

$$\Omega_{(2)} = \frac{\sigma^4 B}{h^6(1+\gamma^2)^3}\left(-1 + \frac{15}{4} \cdot ss\right) \sin 3iv,$$

$$\frac{d\Omega}{u^2 dv} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma^3 B}{h^4(1+\gamma^2)^2}\left(1 + \frac{5}{2} \cdot ss\right) \cos 3iv.$$

Mais $s = \gamma \sin gv$, $s^2 = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 \cos 2gv$; partant nous avons

$$\Omega_{(1)} = \frac{3}{8}\cdot\frac{\sigma^3 B\gamma}{h^4(1+\gamma\gamma)^2}\left\{\cos(3i-g)v - \cos(3i+g)v\right\};$$

$$\Omega_{(2)} = \frac{\sigma^4 B}{h^6(1+\gamma\gamma)^3}\left\{\left(-1+\frac{15}{8}\gamma^2\right)\sin 3iv - \frac{15}{16}\gamma^2\sin(3i-2g)v - \frac{15}{16}\gamma^2\sin(3i+2g)v\right\};$$

$$\frac{d\Omega}{u^2dv} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^3 B}{h^4(1+\gamma\gamma)^2}\left\{\left(1-\frac{5}{4}\gamma^2\right)\cos 3iv + \frac{5}{8}\gamma^2\cos(3i-2g)v + \frac{5}{8}\gamma^2\cos(3i+2g)v\right\}.$$

En substituant ces valeurs dans celles de $\frac{de}{dv}$, $e\frac{d\varpi}{dv}$, l'on trouvera

$$\frac{de}{dv} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B\gamma^2}{h^6(1+\gamma\gamma)^2}\cos(3i-2g-c)v,$$

$$e\frac{d\varpi}{dv} = -\frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B\gamma^2}{h^6(1+\gamma\gamma)^2}\sin(3i-2g-c)v,$$

où l'on a $\frac{3}{16} = \frac{15}{32} + \frac{3}{32} - \frac{15}{32} + \frac{3}{32}$; $-\frac{3}{16} = -\frac{15}{32} - \frac{3}{32} + \frac{15}{32} - \frac{3}{32}$.

En intégrant ces expressions, et posant $(1+\gamma)^2 = 1$, l'on obtient

$$\delta e = \frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B\gamma_i^2}{h_i^6}\cdot\frac{\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c},$$

$$e_i\delta\varpi = \frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B\gamma_i^2}{h_i^6}\cdot\frac{\cos(3i-2g-c)v}{3i-2g-c}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$e\cos(v-\varpi) = \delta e\cos cv + e_i\delta\varpi\sin cv,$$

il en résulte

$$e\cos(v-\varpi) = \frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B\gamma_i^2}{h_i^6}\cdot\frac{\sin(3i-2g)v}{3i-2g-c}.$$

En réunissant le terme de la valeur de u donné par la fonction $\frac{\sigma}{h_i^2}e\cos(v-\varpi)$ avec celui trouvé dans le numéro précédent, l'on a

$$u = \frac{\sigma^4 B}{h_i^8(3i-2g-c)}\left\{\frac{9}{16}e_i\gamma_i^2\sin(3i-2g-c)v + \frac{3}{16}\gamma_i^2\sin(3i-2g)v\right\}.$$

147. L'expression de Ω'' trouvée dans le n.° 29 donne

$$\int d'\Omega = \Omega = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sigma B u^4\sin 3iv}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}.$$

En y faisant

$$u^4 = \frac{\sigma^4}{h^8(1+\gamma\gamma)^4}\left(\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right)^4 = \frac{\sigma^4}{h^8(1+\gamma\gamma)^4}\left((1+ss)^2+4(1+ss)^{\frac{3}{2}}e\cos cv\right),$$

et remarquant que nous retenons seulement l'argument $(3i-2g-c)v$, il suffira de prendre

$$\int d'\Omega = -\frac{\sigma^5 Be\cos cv\cdot\sin 3iv}{h^8(1+\gamma\gamma)^4(1+ss)^2}.$$

Maintenant, si l'on fait dans cette expression $(1+ss)^{-2} = 1-2\cdot ss = \gamma^2\cos 2gv$, il viendra

$$\int d'\Omega = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sigma^5 B e_i\gamma_i^2}{h_i^8(1+\gamma_i^2)^4}\sin(3i-2g-c)v;$$

et par conséquent, en posant $(1+\gamma_i^2)^2 = 1$,

$$\int A'dv = \frac{3a_i^{\frac{5}{2}}}{\sigma^{\frac{3}{2}}}\int dv\int d'\Omega = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^{\frac{7}{2}}Ba_i^{\frac{5}{2}}e_i\gamma_i^2\cos(3i-2g-c)v}{h_i^8(3i-2g-c)}.$$

Mais $\alpha_i = \frac{h_i^2}{\sigma}$, ainsi nous avons

$$\int A'dv = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma B}{h_i^3}\cdot\frac{e_i\gamma_i^2\cos(3i-2g-c)v}{(3i-2g-c)}.$$

148. Réduisons la valeur de $\frac{df}{dv}$ rapportée dans le n.° 68 à ces termes:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dv} = &-\left(\frac{3}{2}\gamma\sin gv+\frac{11}{4}e\gamma\sin(g+c)v\right)\frac{h\Omega_{(1)}}{\sigma^2}\\ &+\left(2-\frac{3}{2}e\cos cv-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2gv\right)\frac{h^3\Omega_{(1)}}{\sigma^3}\\ &+\left(-5e\sin cv+\frac{1}{2}\gamma^2\sin 2gv\right)\frac{h}{\sigma^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}.\end{aligned}$$

En prenant

$$\Omega_{(1)} = \frac{3}{4}\sigma Bu^2 s\sin 3iv = \frac{3}{4}\frac{\sigma^3 B\gamma}{h^4}\sin gv\sin 3iv(1+2e\cos cv)$$

$$= \frac{\sigma^3 B\gamma}{h^4}\left\{\frac{3}{8}\cos(3i-g)v+\frac{3}{8}e\cos(3i-g-c)v\right\};$$

$$\Omega_{(2)} = \frac{\sigma^4 B}{h^6}\left(-1+\frac{3}{4}ss\right)\left(1-\frac{9}{2}ss\right)\sin 3iv\left\{(1+ss)^{\frac{3}{2}}+3e\cos cv(1+ss)\right\}$$

$$= \frac{\sigma^4 B}{h^6}\left(-1+\frac{21}{4}ss\right)\sin 3iv\left\{1+\frac{3}{2}ss+3(1+ss)e\cos cv\right\}$$

$$= \frac{\sigma^4 B}{h^6}\sin 3iv\left\{-1+\frac{15}{4}ss+\left(-3+\frac{51}{4}ss\right)e\cos cv\right\}$$

$$= \frac{\sigma^4 B}{h^6}\sin 3iv\left\{-1+\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{15}{8}\gamma^2\cos 2gv+\left(-3+\frac{51}{8}\gamma^2\right)e\cos cv-\frac{51}{16}e\gamma^2\cos(2g+c)\right\}$$

$$= \frac{\sigma^4 B}{h^6}\left\{-\frac{15}{16}\gamma^2\sin(3i-2g)v-\frac{3}{2}e\sin(3i-c)v-\frac{51}{32}e\gamma^2\sin(3i-2g-c)v\right\};$$

$$\frac{d\Omega}{u^2dv} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^3 B}{h^4}\cos 3iv\left(1-\frac{7}{2}ss\right)\left\{1+ss+2e\cos cv\right\}$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^3 B}{h^4}\cos 3iv\left(1-\frac{5}{2}ss+2e\cos cv\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^3 B}{h^4}\cos 3iv\left(1-\frac{5}{4}\gamma^2+\frac{5}{4}\gamma^2\cos 2gv+2e\cos cv\right)$$

$$= -\frac{\sigma^3 B}{h^4}\left\{-\frac{15}{32}\gamma^2\cos(3i-2g)v-\frac{3}{4}e\cos(3i-c)v\right\},$$

l'on obtiendra

$$-\left(\frac{3}{2}\gamma\sin gv+\frac{11}{4}e\gamma\sin(g+c)v\right)\frac{h\Omega_{(1)}}{\sigma^2} = \left(\frac{9}{32}+\frac{33}{64}\right)\frac{\sigma B}{h^3}e\gamma^2\sin(3i-2g-c)v;$$

$$\left(2-\frac{3}{2}e\cos cv-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2gv\right)\frac{h^3\Omega_{(2)}}{\sigma^3} = \left(-\frac{51}{16}+\frac{45}{64}+\frac{3}{8}\right)\frac{\sigma B}{h^3}e\gamma^2\sin(3i-2g-c)v;$$

$$\left(-5e\sin cv+\frac{1}{2}\gamma^2\sin 2gv\right)\frac{h}{\sigma^2}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv} = \left(-\frac{75}{64}+\frac{3}{16}\right)\frac{\sigma B}{h^3}e\gamma^2\sin(3i-2g-c)v.$$

Ainsi il est clair que l'on a

$$\frac{df}{dv} = \left(\frac{9}{32}+\frac{33}{64}-\frac{51}{16}+\frac{45}{64}+\frac{3}{8}-\frac{75}{64}+\frac{3}{16}\right)\frac{\sigma B}{h^3}e\gamma^2\sin(3i-2g-c)v,$$

ou bien

$$\frac{df}{dv} = -\frac{147}{64}\cdot\frac{\sigma B}{h^3}e\gamma^2\sin(3i-2g-c)v.$$

Donc, en intégrant, nous aurons

$$f = \frac{147}{64}\cdot\frac{\sigma B}{h_1^3}\cdot\frac{e_1\gamma_1^2\cos(3i-2g-c)v}{3i-2g-c}.$$

149. En réduisant la valeur de $t+f$ donnée dans le n.° 63 à

$$t + f = \int A' dv - \frac{2h^3(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2} e \sin(v - \varpi),$$

l'on aura, en y substituant pour f et $\int A' dv$ les valeurs que l'on vient de calculer,

$$t = -\frac{99}{64} \cdot \frac{\sigma B}{h_i^3} \cdot \frac{e_i \gamma_i^2 \cos(3i - 2g - c)}{3i - 2g - c} - \frac{2h^3(1+\gamma\gamma)^2}{\sigma^2} e \sin(v - \varpi),$$

où $-\frac{99}{64} = \frac{3}{4} - \frac{147}{64}$.

Le second terme de cette expression de t renferme la fonction

$$-\frac{2h_i^3}{\sigma^2}\left(\delta e \sin cv - e_i \delta\varpi \cos cv\right) - \frac{2e_i \sin cv}{\sigma^2} \delta . h^3(1+\gamma\gamma)^2.$$

En y substituant pour δe, $e_i \delta \varpi$ les valeurs trouvées dans le n.° 146, nous aurons

$$-\frac{2h_i^3}{\sigma^2}\left(\delta e \sin cv - e_i \delta\varpi \cos cv\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma B}{h_i^3} \cdot \frac{\gamma_i^2 \cos(3i - 2g)v}{3i - 2g - c}.$$

Les valeurs de h^2 et γ^2 produisent dans la fonction $-\frac{2e_i \sin cv}{\sigma^2} \delta . h^3(1+\gamma\gamma)^2$ un terme affecté de l'argument $(3i - 2g - c)v$; mais on doit le négliger dans cette approximation, à cause qu'il ne se trouve pas divisé par $3i - 2g - c$.

Il suit de là que nous avons

$$t = -\frac{99}{64} \cdot \frac{\sigma B e_i \gamma_i^2 \cos(3i - 2g - c)v}{h_i^3(3i - 2g - c)} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma B \gamma_i^2 \cos(3i - 2g)v}{h_i^3(3i - 2g - c)}.$$

Tel est le résultat de l'effet direct produit par la différence des deux hémisphères terrestres. Maintenant nous allons calculer la partie correspondante, produite par la réaction, c'est-à-dire par la fonction qui représente la force perturbatrice du Soleil.

150. Pour cela développons d'abord les termes donnés par cette partie de l'intégrale $\int d'\Omega$; savoir

$$\int d'\Omega = \frac{M'}{4a'^3 u^2}\left(1 - 2ss\right)$$

(Voyez n.° 108). En y faisant

$$u = \frac{\sigma}{h^2(1+\gamma\gamma)}\left(\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)\right),$$

nous aurons

$$\int d'\Omega = \frac{M'}{4a'^3\sigma^2}h^4(1+\gamma\gamma)^2(1-2ss)\left\{(1+ss)^{-1} - 2\,(1+ss)^{-\frac{3}{2}}e\cos(v-\varpi) + \frac{3}{2}e^2\right\},$$

ou bien

$$\int d'\Omega = \frac{M'}{4a'^3\sigma^2}h^4(1+\gamma\gamma)^2\left\{1 + \frac{3}{2}e^2 - 3\,ss - 2\left(1-\frac{7}{2}ss\right)e\cos(v-\varpi)\right\}.$$

Donc, en négligeant le terme multiplié par $es^2\cos(v-\varpi)$, qui ne peut rien donner ici, il viendra

$$\int d'\Omega = \frac{M'}{4a'^3\sigma^2}h^4(1+\gamma\gamma)^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right) - \frac{M'}{2a'^3\sigma^2}h^4(1+\gamma\gamma)^2 e\cos(v-\varpi) - \frac{3}{4}\cdot\frac{M'}{a'^3\sigma^2}h^4(1+\gamma\gamma)^2 s^2.$$

Cela posé, si l'on écrit pour plus de simplicité

$$\int d'\Omega = \frac{M'}{4a'^3\sigma^2}A - \frac{M'}{2a'^3\sigma^2}G - \frac{3}{4}\cdot\frac{M'}{a'^3\sigma^2}C,$$

l'on trouvera, à l'aide des formules précédentes,

$$\delta A = \delta h^4 + 2h_{,}^4\delta\gamma^2 + \frac{3}{2}h_{,}^4\delta e^2 = \left(-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+\frac{9}{16}\right)\frac{\sigma^3 B e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{h_{,}^2(3i-2g-c)}$$

$$\delta G = h_{,}^4(\delta e\cos cv + e_{,}\delta\varpi\sin cv) = \frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v}{h_{,}^2(3i-2g-c)};$$

$$\delta C = \frac{1}{2}h_{,}^4\delta\gamma^2 = \frac{3}{8}\cdot\frac{\sigma^3 B e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{h_{,}^2(3i-2g-c)}.$$

Donc, en réunissant ces parties, l'on aura

$$\int d'\Omega = -\frac{21}{64}\cdot\frac{M'\sigma B}{h_{,}^2 a'^3}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c} - \frac{3}{32}\cdot\frac{M'\sigma B}{h_{,}^2 a'^3}\cdot\frac{\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v}{3i-2g-c},$$

où l'on a $-\frac{21}{64} = -\frac{3}{64} - \frac{9}{32}$.

Maintenant, si l'on remarque que $\frac{M'\sigma}{h_{,}^2 a'^3} = \frac{\sigma^5 \mathrm{m}^2}{h_{,}^8}$, l'on en conclura que cette expression peut être mise sous cette forme

$$\int d'\Omega = -\frac{21}{64}\cdot\frac{\sigma^5 B\mathrm{m}^2}{h_{,}^8}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c}$$

$$-\frac{3}{32}\cdot\frac{\sigma^5 B\mathrm{m}^2}{h_{,}^8}\cdot\frac{\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v}{3i-2g-c}.$$

151. En considérant le terme affecté du signe intégral qui se trouve dans l'expression de $-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d'\Omega$ donnée dans le n.° 108, l'on en déduit

$$\int d'\Omega = -\frac{3}{2}\cdot\frac{mM'}{\sigma^2 a'^3}\int dv\, h^4(1+\gamma\gamma)^2 \sin 2Ev \left\{\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)\right\}^{-2}.$$

Pour l'objet dont il est ici question il faut calculer les termes affectés des argumens $2E+3i-2g-c$, $2E-3i+2g+c$ qui entrent dans le facteur $\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-2}$. Or il est facile de voir que ces termes, dans l'ordre que nous considérons, ne peuvent résulter que du développement de la fonction s^2. Donc en réduisant la fonction sous le signe intégral à $h^4_{,} s^2 \sin 2Ev$, il est nécessaire de chercher le terme affecté de l'argument $(2E-3i+g+c)v$ qui entre dans l'expression de s.

152. Pour cela reprenons les équations

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma\sin(2v'-2\theta),$$

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\cos(2v'-2\theta)$$

trouvées dans les n.os 75 et 81. Ces équations donnent

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{2}\mathrm{m}^2\gamma_{,}\delta\theta\cos(2E-2g)v + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\delta\gamma\sin(2E-2g)v,$$

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\delta\theta\sin(2E-2g)v.$$

Donc en y faisant (Voyez n.° 143)

$$\delta\gamma = \frac{3}{8}\cdot\frac{\sigma^3 B}{h_{,}^6}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c},$$

$$\delta\theta = \frac{3}{8}\cdot\frac{\sigma^3 B}{h_{,}^6}\cdot\frac{e_{,}\cos(3i-2g-c)v}{3i-2g-c},$$

l'on aura

$$\frac{d\gamma}{dv} = \left(\frac{9}{32}+\frac{9}{64}\right)\frac{\sigma^3 B}{h_{,}^6}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 e_{,}\gamma_{,}\cos(2E-3i+c)v}{3i-2g-c},$$

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{9}{32}\cdot\frac{\sigma^3 B}{h_{,}^6}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 e_{,}\sin(2E-3i+c)v}{3i-2g-c}.$$

En intégrant ces expressions, et observant qu'il suffit ici de faire $\frac{1}{2E - 3i + c} = -\frac{1}{2m}$, l'on obtient

$$\delta\gamma = -\frac{27}{128}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^3 B e_1 \gamma_1 \sin(2E - 3i + c)}{h_1^6(3i - 2g - c)},$$

$$\delta\theta = -\frac{9}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^3 B e_1 \cos(2E - 3i + c)\,v}{h_1^6(3i - 2g - c)}.$$

Or nous avons $s = (\gamma_1 + \delta\gamma)\sin(gv - \delta\theta)$, et en développant

$$s = (\delta\gamma \sin gv - \gamma_1 \delta\theta \cos gv) - \tfrac{1}{2}\gamma_1 (\delta\theta)^2 \sin gv - \delta\gamma\,\delta\theta \cos gv.$$

Donc, en substituant pour $\delta\gamma$ et $\delta\theta$ les valeurs précédentes, il viendra

$$\delta\gamma \sin gv - \gamma_1 \delta\theta \cos gv = \left(\frac{27}{256} + \frac{9}{128}\right)\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^3 B e_1 \gamma_1}{h_1^6}\cdot\frac{\cos(2E - 3i + g + c)\,v}{3i - 2g - c}.$$

En ajoutant à ces mêmes valeurs de $\delta\gamma$ et $\delta\theta$ le terme affecté de l'argument $(2E - 2g)v$, dû à l'action du Soleil (Voyez n.os 80 et 81), et posant les équations

$$\delta\gamma = \frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\gamma_1 \cos(2E - 2g)\,v + \frac{3}{8}\cdot\frac{\sigma^3 B e_1 \gamma_1}{h_1^6(3i - 2g - c)}\sin(3i - 2g + c)\,v,$$

$$\delta\theta = -\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\quad \sin(2E - 2g)\,v + \frac{3}{8}\cdot\frac{\sigma^3 B e_1 \gamma_1}{h_1^6(3i - 2g - c)}\cos(3i - 2g - c)\,v,$$

l'on en tirera

$$-\tfrac{1}{2}\gamma_1 (\delta\theta)^2 = \frac{9}{128}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^3 B e_1 \gamma_1}{h_1^6(3i - 2g - c)}\sin(2E - 3i + c),$$

$$\delta\gamma\,\delta\theta = \left(\frac{9}{128} - \frac{9}{128}\right)\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^3 B e_1 \gamma_1}{h_1^6(3i - 2g - c)}\cos(2E - 3i + c) = 0;$$

partant il est clair que l'on a

$$s = \frac{9}{64}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{m}\cdot\frac{\sigma^3 B e_1 \gamma_1}{h_1^6(3i - 2g - c)}\cos(2E - 3i + g + c)\,v,$$

où le coefficient numérique $\frac{9}{64} = \frac{27}{256} + \frac{9}{128} - \frac{9}{256}$.

Cette inégalité en latitude est analogue à celles dont les argumens sont $(2E - g)v$, $(2E - i)v$.

153. Actuellement si l'on forme cette valeur de s, savoir

$$s = \gamma_{,} \sin gv + \frac{3}{8} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \gamma_{,} \sin(2E - g)v$$

$$- \frac{\sigma^3 B e_{,} \gamma_{,}}{h_{,}^6(3i - 2g - c)} \left\{ \frac{3}{8} \cos(3i - g - c) - \frac{9}{64} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \cos(2E - 3i + g + c)v \right\}$$

(Voyez n.ºs 142 et 81), l'on en conclut

$$s^2 = -\frac{9}{64} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{m} \cdot \frac{\sigma^3 B e_{,} \gamma_{,}^2}{h_{,}^6(3i - 2g - c)} \left\{ \sin(2E + 3i - 2g - c)v - \sin(2E - 3i + 2g + c)v \right\}.$$

Donc, en multipliant cette fonction par $\sin 2Ev$, nous aurons

$$s^2 \sin 2Ev = 0 \, \frac{\mathrm{m}^2}{m} \cdot \frac{\sigma^3 B e_{,} \gamma_{,}^2}{h_{,}^6(3i - 2g - c)} \cos(3i - 2g - c),$$

ce qui est analogue au résultat trouvé dans le n.° 138, à l'égard de l'argument $(g - i)v$.

Il est inutile ici de considérer la fonction $\frac{3}{4} \cdot \frac{M'}{a'^3} \cdot \frac{\cos(2v - 2v')}{u^2}$ qui constitue le second terme de l'intégrale $\int d'\Omega$ (Voyez n.° 108), parce que le terme qu'elle donne n'appartient pas à cette première approximation.

Concluons de là que l'on a

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{m M' h_{,}^4}{\sigma^2 a'^3} \int dv \, s^2 \sin 2Ev = 0,$$

et que par conséquent la valeur complète de l'intégrale $\int d'\Omega$ donnée par la réaction est fournie par le résultat trouvé dans le n.° 150; de sorte que l'on a

$$\int A' dv = \frac{3 a_{,}^{\frac{5}{2}}}{\sigma \sqrt{\sigma}} \int dv \int d'\Omega = \frac{3 h_{,}^5}{\sigma^4} \int dv \int d'\Omega$$

$$= \frac{63}{64} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 \sigma B e_{,} \gamma_{,}^2}{h_{,}^3(3i - 2g - c)^2} \cos(3i - 2g - c)v + \frac{9}{32} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 \sigma B \gamma_{,}^2 \cos(3i - 2g)v}{h_{,}^3(3i - 2g - c)}.$$

154. Considérons maintenant les termes donnés par l'expression suivante de $\frac{df}{dv}$,

$$\frac{df}{dv} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M'u'^3}{u^4}\cdot\frac{h}{\sigma^2}\,s\left(-\frac{3}{2}\gamma\sin gv - \frac{11}{4}e\gamma\sin(g+c)\,v\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{M'u'^3}{u^3}\cdot\frac{h^3}{\sigma^3}\left(2+6e^2+\frac{9}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}e\cos(v-\varpi) - \frac{1}{2}\gamma^2\cos 2gv\right)$$

(Voyez n.os 68 et 27).
En y faisant $s=\gamma\sin gv$, l'on comprendra sans peine que pour l'objet actuel il suffit de prendre

$$\frac{df}{dv} = \frac{9}{8}\cdot\frac{M'u'^3}{u^4}\cdot\frac{h\gamma^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{M'u'^3}{u^3}\cdot\frac{h^3}{\sigma^3}\left(2+6e^2+\frac{9}{2}\gamma^2-\frac{3}{2}e\cos(v-\varpi)\right).$$

Dans le premier terme de cette expression l'on peut faire $u=\frac{\sigma}{h^2}$, et dans le second l'on posera

$$\frac{1}{u^3} = \frac{h^6(1+\gamma\gamma)^3}{\sigma^3}\left\{\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right\}^{-3} = \frac{h^6(1+\gamma\gamma)^3}{\sigma^3}\left(1-\frac{3}{2}s^2+3e^2-3e\cos(v-\varpi)\right).$$

Alors l'on aura

$$\frac{df}{dv} = \frac{9}{8}\cdot\frac{M'u'^3h^9\gamma^2}{\sigma^9}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{M'u'^3h^9(1+\gamma^2)^3}{\sigma^6}\left(2+6e^2+\frac{9}{2}\gamma^2-\frac{3}{2}e\cos(v-\varpi)\right)\left(1-\frac{3}{4}\gamma^2+3e^2-3e\cos(v-\varpi)\right),$$

ou bien

$$\frac{df}{dv} = \frac{9}{8}\cdot\frac{M'u'^3h^9\gamma^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{M'u'^3h^9}{\sigma^6}\left(1+3\gamma^2\right)\left(2+3\gamma^2+\frac{57}{4}e^2-\frac{15}{2}e\cos(v-\varpi)\right).$$

Maintenant, si l'on fait $u'=\frac{1}{a'}$, $\frac{M'\sigma}{h_i^2a'^3}=\frac{m^2\sigma^5}{h_i^8}$, nous aurons

$$\frac{df}{dv} = \frac{m^2h^9}{h_i^6\sigma^2}\left(-1-\frac{57}{8}e^2-\frac{27}{8}\gamma^2+\frac{15}{4}e\cos(v-\varpi)\right).$$

Les valeurs précédentes de h^2, $\delta\gamma$, δe, $e\,\delta\varpi$ donnent

$$\delta\cdot h^9 = -\frac{81}{16}\cdot\frac{\sigma^3Bh_i^3e_i\gamma_i^2}{3i-2g-c}\sin(3i-2g-c)\,v,$$

$$\frac{27}{4}h_i^9\gamma_i\delta\gamma = \frac{81}{32}\cdot\frac{\sigma^3Bh_i^3e_i\gamma_i^2}{3i-2g-c}\sin(3i-2g-c)\,v,$$

$$\frac{57}{4}h_i^9e\,\delta e = \frac{171}{64}\cdot\frac{\sigma^3Bh_i^3e_i\gamma_i^2}{3i-2g-c}\sin(3i-2g-c)\,v,$$

$$\frac{15}{4}h_i^9\,e\cos(v-\varpi) = \frac{45}{64}\cdot\frac{\sigma^3Bh_i^3\gamma_i^2}{3i-2g-c}\sin(3i-2g)\,v.$$

Donc, en substituant ces valeurs, il viendra

$$\frac{df}{dv} = \left(\frac{81}{16} - \frac{81}{32} - \frac{171}{64}\right) \frac{\sigma B \mathrm{m}^2 e_{,} \gamma_{,}^2}{h_{,}^3 (3i - 2g - c)} \sin(3i - 2g - c)\, v$$

$$+ \frac{45}{64} \cdot \frac{\sigma B \mathrm{m}^2 \gamma_{,}^2}{h_{,}^3 (3i - 2g - c)} \sin(3i - 2g)\, v.$$

En intégrant cette expression et posant $\frac{1}{3i - 2g} = 1$, l'on a

$$f = \frac{333}{64} \cdot \frac{\sigma B}{h_{,}^3} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 e_{,} \gamma_{,}^2 \cos(3i - 2g - c)\, v}{(3i - 2g - c)^2} - \frac{45}{64} \cdot \frac{\sigma B}{h_{,}^3} \cdot \frac{\mathrm{m}^2 \gamma_{,}^2 \cos(3i - 2g)\, v}{3i - 2g - c}.$$

Cette valeur de f et celle de $\int A' dv$ trouvée dans le n.° 153 étant substituées dans l'équation $t + f = \int A' dv$, il en résulte

$$t = -\frac{135}{32} \cdot \frac{\sigma B \mathrm{m}^2}{h_{,}^3} \cdot \frac{e_{,} \gamma_{,}^2 \cos(3i - 2g - c)\, v}{(3i - 2g - c)^2}$$

$$+ \frac{63}{64} \cdot \frac{\sigma B \mathrm{m}^2}{h_{,}^3} \cdot \frac{\gamma_{,}^2 \cos(3i - 2g)\, v}{3i - 2g - c},$$

où l'on a $-\frac{135}{32} = \frac{63}{64} - \frac{333}{64}$, $\frac{63}{64} = \frac{9}{32} + \frac{45}{64}$.

Telle est la valeur de t donnée par la réaction. En la comparant avec celle trouvée dans le n.° 149, l'on voit que l'effet direct donne, à l'égard de l'argument $(3i - 2g)v$, un coefficient d'un ordre inférieur de deux unités. Il faut en conséquence supprimer le terme affecté de cet argument qui entre dans la valeur de t produite par la réaction. Alors en réunissant cette dernière valeur de t avec celle donnée à la fin du n.° 149, l'on a

$$t = \left\{ -\frac{99}{64} \cdot \frac{1}{3i - 2g - c} - \frac{135}{32} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{3(i - 2g - c)^2} \right\} \frac{\sigma B}{h_{,}^3} e_{,} \gamma_{,}^2 \cos(3i - 2g - c)\, v$$

$$+ \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma B \gamma_{,}^2}{h_{,}^3} \cdot \frac{\cos(3i - 2g)\, v}{3i - 2g - c}.$$

En multipliant cette valeur de t par $n = \frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha_{,} \sqrt{\alpha_{,}}}$, et remarquant que $h_{,}^3 = (\alpha_{,} \sigma)^{\frac{3}{2}}$, l'on aura en substituant pour B sa valeur (Voyez n.° 143) et posant pour plus de simplicité

$$H = -\frac{99}{64}\cdot\frac{1}{3i-2g-c} - \frac{135}{32}\cdot\frac{m^2}{(3i-2g-c)^2},$$

$$H' = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3i-2g-c};$$

$$nt = \left\{He_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(3i-2g-c)v + H'\gamma_{,}^{2}\cos(3i-2g)v\right\}K_{(3)}\frac{D^3\sin^3\omega}{a_{,}^{3}}.$$

En réduisant en nombres le coefficient $He_{,}\gamma_{,}^{2}K_{(3)}\frac{D^3}{a_{,}^{3}}\sin^3\omega$, on le trouve au-dessous d'un centième de seconde. Mais il importe de ne pas perdre de vue que l'analyse qui nous a conduit à ce premier terme ne suffit pas pour décider si cette inégalité est réellement sensible ou non. Les termes suivans pourraient dévoiler une série divergente, propre à faire voir que l'on s'éloigne beaucoup de la vérité en voulant juger de sa valeur absolue d'après la connaissance du premier terme seulement. En conséquence nous renvoyons l'examen ultérieur de cette question au chapitre où ces inégalités sont reprises et développées par une autre méthode.

Réflexions sur les méthodes employées par M. de Laplace pour calculer le coefficient de l'argument dépendant de la différence des deux hémisphères terrestres.

155. Observons d'abord qu'en réunissant la valeur de $\int d'\Omega$ trouvée dans le n.° 147 avec celle obtenue dans le n.° 152, l'on a, en vertu de l'action et de la réaction,

$$\int d'\Omega = \left\{-\frac{1}{4} - \frac{21}{64}\cdot\frac{m^2}{3i-2g-c}\right\}\frac{\sigma^5 B e_{,}\gamma_{,}^{2}}{h_{,}^{8}}\cos(3i-2g-c)v.$$

Or en faisant ici $g = 1 + \frac{3}{4}m^2$, $c = 1 - \frac{3}{4}m^2$ et $i = 1$, il en résulte

$$\int d'\Omega = \frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^5 B e_{,}\gamma_{,}^{2}}{h_{,}^{8}}\sin(3i-2g-c)v.$$

On voit par-là que le coefficient numérique qui affecte ce premier terme ne se réduit pas à zero, comme cela est arrivé dans le n.° 140

à l'égard du premier terme du coefficient qui, dans la même intégrale, affecte l'argument $(g-i)v$. Il est vrai que dans ce cas l'on s'écarte beaucoup de la valeur véritable du coefficient $-\frac{21}{64}\cdot\frac{m^2}{3i-2g-c}$ en prenant seulement le premier terme de son développement; mais il est évident que même en prenant pour g et c leur valeur totale (ce qui revient à faire $3i-2g-c=0,00040998$), l'on n'aurait pas zéro pour la somme des deux termes $-\frac{1}{4}-\frac{21}{64}\cdot\frac{m^2}{3i-2g-c}$. Donc il n'est pas permis de supposer l'équation $\int d'\Omega=0$, à l'égard de l'argument $(3i-2g-c)v$. Ce cas particulier confirme ce que nous avons déjà avancé dans le n.° 125, contre la vérité de la proposition générale émise par M. de Laplace au sujet des argumens à longue période. Cette remarque suffit pour démontrer que le calcul exposé dans la Connaissance des Tems pour l'année 1824 (pag. 304 et 307) ne peut pas donner ni le *premier* ni le *second* terme que M. de Laplace s'était proposé de trouver, puisque dans son calcul il suppose l'équation $\int d'\Omega=0$.

156. L'expression du premier terme du coefficient de ce même argument publiée dans la Connaissance des Tems pour l'année 1823 (page 237) mérite un examen plus détaillé.

Remarquons avant tout qu'il manque un terme dans le calcul de la fonction $\frac{2d\cdot(r\delta r)-dr\cdot\delta r}{r^2dv'}$. En effet, si l'on élimine r^2dv' au moyen de l'équation $\frac{r^2dv'}{\sigma\sqrt{a}}=\frac{dv}{hu^2}$, comme M. de Laplace le prescrit dans la page 236, et si l'on observe qu'ici l'on peut supposer $\frac{\sigma\sqrt{a}}{h}=1$, l'on aura, en nommant X la fonction précédente,

$$X=u^2\left\{\frac{d\cdot\delta\cdot r^2}{dv}-\frac{dr}{dv}\delta r\right\}.$$

Il sera démontré ci-après (n.° 161) que l'équation $r=\frac{\sqrt{(1+ss)}}{u}$ donne

$$r+\delta r=\frac{h_{,}^2}{\sigma}\left(1-e_{,}\cos cv\right)-\frac{\sigma^2B}{h_{,}^4}\left\{\frac{3}{16}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c}+\frac{3}{16}\cdot\frac{\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v}{3i-2g-c}\right\}.$$

Donc en prenant $\frac{dr}{dv}=\frac{h_{,}^2c}{\sigma}e_{,}\sin cv$, il est évident que le produit de ce terme par δr donne

$$\frac{dr}{dv}\delta r = -\frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma B c}{h_{,}^{2}}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^{2}\sin cv \times \sin(3i-2g)v}{3i-2g-c}$$

$$= -\frac{3}{32}\cdot\frac{\sigma B c}{h_{,}^{2}}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(3i-2g-c)v}{3i-2g-c}.$$

En faisant le carré de la valeur précédente de $r+\delta r$, et conservant seulement les termes multipliés par B, l'on obtient

$$\delta . r^{2} = -\frac{\sigma B}{h_{,}^{2}}\left\{\frac{3}{16}\cdot\frac{e_{,}\gamma_{,}^{2}\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c}+\frac{3}{8}\cdot\frac{\gamma_{,}^{2}\sin(3i-2g)v}{3i-2g-c}\right\}.$$

Donc, en différentiant cette expression, le diviseur $3i-2g-c$ qui affecte l'argument $(3i-2g-c)v$ disparaîtra, et il suffira de prendre

$$\frac{d.\delta.r^{2}}{dv} = -\frac{3}{8}\left(3i-2g\right)\frac{\sigma B}{h_{,}^{2}}\cdot\frac{\gamma_{,}^{2}\cos(3i-2g)v}{3i-2g-c}.$$

Il suit de là que si l'on fait $u^{2} = \frac{\sigma^{2}}{h_{,}^{4}}\left(1+2e_{,}\cos cv\right)$, l'on a

$$X = \frac{\sigma^{3}B(1+2e_{,}\cos cv)}{h_{,}^{6}(3i-2g-c)}\left\{\frac{3}{32}c\,e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(3i-2g-c)v-\frac{3}{8}(3i-2g)\gamma_{,}^{2}\cos(3i-2g)v\right\};$$

d'où l'on conclut, en retenant seulement l'argument $(3i-2g-c)v$,

$$X = \frac{\sigma^{3}B\left\{\frac{3}{32}c-\frac{3}{8}(3i-2g)\right\}}{h_{,}^{6}(3i-2g-c)}e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(3i-2g-c)v.$$

En faisant $B=-4H$, cette expression devient

$$X = -\frac{\sigma^{3}H\left\{\frac{3}{8}c-\frac{3}{2}(3i-2g)\right\}}{h_{,}^{6}(3i-2g-c)}e_{,}\gamma_{,}^{2}\cos(3i-2g-c)v.$$

Ainsi il est évident que M. de Laplace a omis le terme plus considérable, c'est-à-dire celui multiplié par $\frac{3}{2}(3i-2g)$, puisque sa valeur de X donnée dans la page 237 revient à

$$X = -\frac{3}{8}\cdot\frac{\sigma^{3}He_{,}\gamma_{,}^{2}}{h_{,}^{6}(3i-2g-c)}\cos(3i-2g-c)v.$$

Dans le cas actuel l'on peut supposer $dv = dv'$, comme l'a fait M. de Laplace. Pour le démontrer observons que dv' désignant l'élément de la longitude par rapport à l'orbite décrite dans l'espace, l'on a l'équation (Voyez n.° 24)

$$r^2 dv' = r^2 dv \sqrt{\left(\frac{1}{1+ss} + \frac{1}{(1+ss)^2} \cdot \frac{ds^2}{dv^2}\right)}.$$

Donc, en se rappelant que $r^2 = \frac{1+ss}{u^2}$, il viendra

$$\frac{dt^2}{r^2 dv'} = \frac{dv^2}{h^2 u^4 r^2 dv'} = \frac{dv}{h^2 u^2 \sqrt{\left(1 + ss + \frac{ds^2}{dv^2}\right)}}.$$

Alors la fonction $\frac{5dt^2 Q}{r^2 dv'}$ posée dans la page 236 du volume cité devient égale à $\frac{5Hu^2 dv \sin 3fv}{h^2(1+ss)^{\frac{7}{2}}\sqrt{\left(1+ss+\frac{ds^2}{dv^2}\right)}}$; et il en résulte que la substitution des valeurs elliptiques de u, s, $\frac{ds}{dv}$ donne le terme

$$\frac{5dt^2 Q}{r^2 dv'} = \frac{5H(7-g^2)e\gamma^2 dv}{8h^6(1+\gamma\gamma)^2} \sin(3f-2g-c)v,$$

ce qui s'accorde avec le résultat trouvé par M. de Laplace, lorsque l'on fait $7-g^2 = 7-1 = 6$, et $h^6(1+\gamma\gamma)^2 = a^3$.

157. En faisant la correction indiquée plus haut, et réunissant tous les termes auxquels M. de Laplace a eu égard, son expression de δv devient

$$\delta v = N \cos(3i-2g-c)v,$$

où, pour plus de simplicité, l'on a fait

$$N = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma^3 He_1\gamma_1^2}{h_1^6(3i-2g-c)} \left\{5 + \frac{1}{2}c - 2(3i-2g) + \frac{g(3i-g-c)-1}{3i-2g-c} - \frac{9 \cdot m^2}{3i-2g-c}\right\}.$$

Pour rendre ce coefficient plus conforme à celui de M. de Laplace, il suffit d'observer que l'on a

$$\frac{g(3i-g-c)-1}{3i-2g-c} = \frac{g(3i-2g-c)+g^2-1}{3i-2g-c} = g + \frac{g^2-1}{3i-2g-c},$$

ou bien (en faisant $g = 1$, $g^2 - 1 = \frac{3}{2}m^2$)

$$\frac{g(3i-g-c)-1}{3i-2g-c} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2}{3i-2g-c};$$

mais nous préférons conserver la forme primitive.

Actuellement, si l'on remarque que l'on obtient le terme correspondant qui entre dans la valeur de nt, en changeant le signe du coefficient N, l'on a

$$nt = M\cos(3i - 2g - c)v,$$

en posant $B = -4H$, et

$$M = -\frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B e_{,}\gamma_{,}^2}{h_{,}^6(3i-2g-c)}\left\{5 + \frac{1}{2}c - 2(3i-2g) + \frac{g(3i-g-c)-1}{3i-2g-c} - \frac{9m^2}{3i-2g-c}\right\}.$$

En partageant le coefficient M en deux parties correspondantes à l'effet direct et indirect, l'on comprendra sans difficulté que suivant l'analyse de M. de Laplace, l'on a par l'effet direct

$$-\frac{3}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B e_{,}\gamma_{,}^2}{h_{,}^6(3i-2g-c)}\left\{5 + \frac{1}{2}c - 2(3i-2g) + \frac{g(3i-g-c)-1}{3i-2g-c}\right\}$$

et par l'effet indirect $+\frac{27}{16}\cdot\frac{\sigma^3 B e_{,}\gamma_{,}^2\cdot m^2}{h_{,}^6(3i-3g-c)^2}$.

158. M. de Laplace obtient cette seconde partie en calculant les termes donnés par la fonction

$$\frac{dv}{h^2u^2}\left\{3\int\delta.dR + 2\delta.r\left(\frac{dR}{dr}\right) - \left(\frac{dR}{dr}\right)\delta r\right\} = P,$$

lorsque l'on y fait $R = -\frac{M'u'^3}{4u^2}(1 - 2\cdot ss) = -\frac{M'u'^3}{4}r^2(1 - 3\cdot ss)$, et que l'on développe les termes qui en résultent multipliés par B. Pour cela il observe que l'on a $\int\delta\cdot dR = \delta R$, $2\delta\cdot r\left(\frac{dR}{dr}\right) = 4\delta R$; et par conséquent

$$P = \frac{dv}{h^2u^2}\left\{7\delta R + \frac{M'u'^3}{4}(1 - 3\cdot ss)\,2r\delta r\right\}.$$

Or il évident que la fonction nommée δR par M. de Laplace est précisément égale à la valeur de l'intégrale $-\int d'\Omega$ trouvée précédemment dans le n.° 150; partant l'on a

$$7\delta R = \frac{147}{64}\cdot\frac{\sigma^5 B\cdot m^2\cdot e_{,}\gamma_{,}^2 \sin(3i-2g-c)v}{h_{,}^8(3i-2g-c)} + \frac{21}{32}\cdot\frac{\sigma^5 B m^2\gamma_{,}^2\sin(3i-2g)v}{h_{,}^8(3i-2g-c)}.$$

Avec une légère réflexion l'on comprend que le produit $ss\cdot 2r\delta r$ ne

peut rien donner ici. Donc, en posant $\frac{M'u'^3}{u} = \frac{M'}{a_i^3} = \frac{m^2\sigma^4}{h_i^6}$, et comme dans le n.° 156,

$$\delta.r^2 = -\frac{\sigma B}{h_i^2}\left\{\frac{3}{16}\cdot\frac{e_i\gamma_i^2 \sin(3i-2g-c)\,v}{3i-2g-c} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\gamma_i^2 \sin(3i-2g)\,v}{2i-2g-c}\right\},$$

il viendra

$$P = \frac{\sigma^5 B\, m^2}{h_i^8}\cdot\frac{dv}{h^2u^2}\left\{\left(\frac{147}{64}-\frac{3}{64}\right)\frac{e_i\gamma_i^2 \sin(3i-2g-c)\,v}{3i-2g-c} + \left(\frac{21}{32}-\frac{3}{32}\right)\frac{\gamma_i^2 \sin(3i-2g)v}{3i-2g-c}\right\}.$$

Si l'on remarque maintenant qu'il suffit de prendre

$$\frac{1}{h^2u^2} = \frac{h_i^2}{\sigma^2}\left(1 - 2e_i \cos cv\right),$$

l'on en conclura que, en conservant seulement l'argument $(3i-2g-c)v$, l'on a

$$P = \frac{\sigma^3 B\cdot m^2\cdot dv}{h_i^6(3i-2g-c)}\left(\frac{147}{64}-\frac{3}{64}-\frac{21}{32}+\frac{3}{32}\right)e_i\gamma_i^2 \sin(3i-2g-c)\,v$$

$$= \frac{27}{16}\cdot\frac{\sigma^2 B\cdot m^2\cdot dv}{h_i^6(3i-2g-c)}\,e_i\gamma_i^2 \sin(3i-2g-c)\,v;$$

c'est-à-dire le terme donné par M. de Laplace.

Or, en comparant chacune de ces deux parties avec notre expression de nt trouvée à la fin du n.° 154, l'on est forcé d'en conclure qu'elles sont l'une et l'autre fautives, puisque nous avons démontré que l'effet direct donne

$$-\frac{99}{64} \text{ au lieu de } -\frac{3}{16}\left\{5 + \tfrac{1}{2}c - 2(3i-2g) + \frac{g(3i-g-c)-1}{3i-2g-c}\right\},$$

et l'effet indirect

$$-\frac{135}{32} \text{ au lieu de } +\frac{27}{16}.$$

159. La différence entre ces deux derniers coefficiens ne disparait pas, même en rectifiant le calcul de la fonction P; ce qui est nécessaire, comme nous allons le faire voir. D'après la remarque faite dans le n.° 156, il est clair que dans l'expression de la fonction P l'on doit poser $\frac{dv}{h^2u^2\sqrt{\left(1+s^2+\frac{ds^2}{dv^2}\right)}}$ au lieu du facteur $\frac{dv}{h^2u^2}$, et de plus

remplacer h^2 par $\left(h^2 + 2\int \frac{de}{dv} \cdot \frac{dv}{u^2}\right)$. Alors l'on aura substitué au lieu de dt sa valeur complète, telle qu'elle est donnée par l'équation

$$dt = \frac{dv}{u^2 \sqrt{\left(h^2 + 2\int \frac{dQ}{dv} \cdot \frac{dv}{u^2}\right)}}.$$

En outre il est essentiel d'observer que pour avoir la totalité des termes fournis par la fonction P, il est nécessaire d'y changer $7\delta R$ en $7(R + \delta R)$, ce qui introduit dans cette fonction le terme constant

$$-\frac{7}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{u^2} = -\frac{7}{4} \cdot \frac{M'h_i^4}{a'^3 \sigma^2} = -\frac{7}{4} \cdot \frac{\text{m}^2 \cdot \sigma^2}{h_i^2}.$$

Donc il reste à développer une autre partie de la valeur de P, c'est-à-dire celle que l'on obtient en prenant

$$P = -\frac{7}{4} \cdot \frac{\text{m}^2 \sigma^2}{h_i^2} \cdot \frac{dv}{h^2 u^2 \sqrt{\left(1 + s^2 + \frac{ds^2}{dv^2}\right)}},$$

et considérant h^2 comme quantité variable.

Or nous avons (Voyez n.° 144)

$$h^2 = h_i^2 \left\{ 1 - \frac{9}{8} \cdot \frac{\sigma^3 B e_i \gamma_i^2 \sin(3i - 2g - c)\, v}{h_i^6 (3i - 2g - c)} \right\};$$

et d'après la valeur du u trouvée dans le n.° 146,

$$u = \frac{\sigma}{h_i^2}\left(1 + e_i \cos cv\right) + \frac{\sigma^4 B}{h_i^8 (3i - 2g - c)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{16} e_i \gamma_i^2 \sin(3i - 2g - c)\, v \\ + \frac{3}{16} \gamma_i^2 \sin(3i - 2g)\, v \end{array} \right\};$$

d'où l'on conclut

$$u^2 = \frac{\sigma^2}{h_i^4} \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{16}\right) \frac{\sigma^3 B e_i \gamma_i^2 \sin(3i - 2g - c)\, v}{h_i^6 (3i - 2g - c)} \right\};$$

partant l'on a

$$h^2 u^2 = \frac{\sigma^2}{h_i^2} \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \frac{9}{8}\right) \frac{\sigma^3 B e_i \gamma_i^2 \sin(3i - 2g - c)\, v}{h_i^6 (3i - 2g - c)} \right\}.$$

La valeur de s trouvée dans le n.° 143 donne

$$s = \gamma_{,} \sin g v - \frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^3 B e_{,} \gamma_{,} \cos(3i - g - c) v}{h_{,}^6 (3i - 2g - c)},$$

et par conséquent

$$\frac{ds}{dv} = \gamma_{,} g \cos g v + \frac{3}{8} \left(3i - g - c\right) \frac{\sigma^3 B e_{,} \gamma_{,} \sin(3i - g - c) v}{h_{,}^6 (3i - 2g - c)}.$$

Donc, en formant la fonction $s^2 + \frac{ds^2}{dv^2}$, il viendra

$$s^2 + \frac{ds^2}{dv^2} = \frac{\sigma^3 B e_{,} \gamma_{,}^2 \left\{\frac{3}{8} + \frac{3}{8} g (3i - g - c)\right\}}{h_{,}^6 (3i - 2g - c)} \sin(3i - 2g - c) v,$$

et

$$\sqrt{\left(1 + s^2 + \frac{ds^2}{dv^2}\right)} = 1 + \frac{1}{2}\left(s^2 + \frac{ds^2}{dv^2}\right) = 1 + \frac{3}{16}\left(1 + g(3i - g - c)\right) \frac{\sigma^3 B e_{,} \gamma_{,}^2 \sin(3i - 2g - c) v}{3i - 2g - c}.$$

Donc, en multipliant cette valeur par la précédente de $h^2 u^2$, nous aurons

$$h^2 u^2 \sqrt{\left(1 + s^2 + \frac{ds^2}{dv^2}\right)} = \frac{\sigma^2}{h_{,}^2} \left\{ 1 + \frac{\left\{\frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \frac{9}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} g (3i - g - c)\right\}}{h_{,}^6 (3i - 2g - c)} \sigma^3 B e_{,} \gamma_{,}^2 \sin(3i - 2g - c) v \right\},$$

d'où l'on conclut

$$P = -\frac{21}{32} \cdot \frac{dv \left\{1 - \frac{1}{2} g (3i - g - c)\right\} \sigma^3 B}{h_{,}^6 (3i - 2g - c)} e_{,} \gamma_{,}^2 \sin(3i - 2g - c) v.$$

Tel est le terme qui a été omis par M. de Laplace dans le calcul de la fonction P. En le rétablissant l'on aurait

$$\frac{27}{16} - \frac{21}{32}\left(1 - \frac{1}{2} g (3i - g - c)\right),$$

au lieu de $\frac{27}{16}$, et par conséquent un coefficient numérique qui diffère beaucoup du nombre $-\frac{135}{32}$ que nous avons trouvé dans le n.° 154.

160. L'on ne saurait donc trouver la source de la discordance déclarée plus haut, que dans l'emploi de l'équation désignée par (T) dans la Mécanique céleste (tome premier, page 256), laquelle est appliquée à cette recherche par M. de Laplace sans avoir égard à l'influence de tous les termes qu'elle peut donner.

Ce cas particulier, et l'autre relatif à l'argument $(2g - 2c) v$ sont propres à mettre en évidence les dangers auquel l'on s'expose lorsque l'on veut appliquer l'équation (T) dans la théorie de la Lune. Pour en dériver des résultats mathématiquement exacts *dans les termes d'une*

forme et d'un ordre déterminé, il faudrait considérer la totalité des fonctions qui entrent dans cette équation sous sa forme finie. Mais alors les termes en grand nombre de l'ordre du carré et des produits des forces perturbatrices qu'il est indispensable de développer, rendent à l'équation (T) toute la complication, qui demeure en quelque sorte cachée, lorsque l'on borne son application au calcul des termes qui dépendent de la première puissance de la force perturbatrice seulement; ou bien à *certains cas singuliers* dans lesquels par une heureuse combinaison il s'opère une destruction complète entre les termes du même ordre produits par d'autres fonctions qui ne sont pas explicitement renfermées dans l'équation employée par M. de Laplace. Les détails exposés dans la première partie de ce paragraphe au sujet du coefficient $\frac{12}{2}$ de l'argument $(g-i)v$ nous font penser que cette application de l'équation (T) offre un exemple de ces cas singuliers.

161. L'analyse précédente donne aisément les deux termes principaux affectés des argumens $(3i-2g)v$, $(3i-2g-c)v$ qui entrent dans l'expression du rayon vecteur r. Pour cela remarquons que l'on a

$$r = \frac{\sqrt{(1+ss)}}{u} = \frac{h^2(1+\gamma\gamma)}{\sigma}\left\{1+\frac{e\cos(v-\varpi)}{\sqrt{(1+ss)}}\right\}^{-1},$$

ou bien, en développant,

$$r = \frac{h^2(1+\gamma\gamma)}{\sigma}\left(1+\frac{e^2}{2}-e\cos(v-\varpi)\right).$$

Maintenant, si l'on substitue pour $\delta.h^2(1+\gamma\gamma)$. $\delta.e^2$, $\delta.e\cos(v-\varpi)$ les valeurs trouvées dans les n.ºs 144 et 146, l'on obtiendra, en conservant seulement les termes divisés par $(3i-2g-c)$,

$$r = -\frac{\sigma^2 B}{h_{\prime}^4}\left\{\frac{3}{16}\cdot\frac{e_{\prime}\gamma_{\prime}^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c}+\frac{3}{16}\cdot\frac{\gamma_{\prime}^2\sin(3i-2g)v}{3i-2g-c}\right\}.$$

Il ne serait pas aussi facile de conclure cette valeur de r de l'équation (Voyez n.° 21)

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2.r^2}{dt^2}-\frac{\sigma}{r}-r\frac{d\Omega}{dr}-2\int d'\Omega.$$

Il est vrai que M. de Laplace a employé ce dernier procédé dans le troisième volume de la Mécanique céleste (page 253) pour chercher le premier terme de r affecté de l'argument $(g-i)v$; mais la facilité que l'on rencontre dans ce cas particulier tient à l'isolement de cet argument; tandis que l'on ne peut avoir le coefficient de l'argument $(3i-2g-c)v$ sans considérer en même tems l'argument $(3i-2g)v$. Au reste il n'est pas inutile, pour la théorie, de faire observer que même pour l'argument $(g-i)v$ le calcul n'est aussi facile qu'on le voit dans la page citée plus haut, qu'en vertu de l'omission d'un terme dont il est nécessaire de tenir compte.

En effet, suivant le calcul exposé par l'auteur dans cette page, la perturbation δr du rayon vecteur devrait être déterminée par cette équation

$$(1)\,..\; 0 = \frac{d^2 \cdot r\delta r}{dt^2} + \frac{r\delta r}{r^3} + (2-3)\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\phi\right)\frac{D^2}{r^3}\sin\lambda\cos\lambda\cdot\gamma\cos(gv-fv-\theta).$$

Or il est évident que par-là l'on tient compte seulement de l'effet direct. Mais avec une légère attention l'on reconnaît la nécessité de considérer en outre les termes *du même ordre* donnés par la fonction $-\frac{m'u'^3r^2}{4}(1-3s^2)$ rapportée au fond de la même page. En égalant, pour un moment, cette fonction à R, l'on en déduit

$$\delta R = \frac{3}{2}m'u'^3r^2s\delta s - \frac{1}{2}m'u'^3r\delta r; \quad \delta\cdot r\left(\frac{dR}{dr}\right) = 3m'u'^3r^2s\delta s - m'u'^3r\delta r,$$

et par conséquent

$$2\int\delta\cdot dR + \delta\cdot r\left(\frac{dR}{dr}\right) = 6m'u'^3r^2s\delta s - 2m'u'^3r\delta r.$$

Donc, en faisant ici $m'u'^3r^2 = m^2$, $s = \gamma\sin(gv-\theta)$, et

$$\delta s = -\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}\cdot\frac{D^2}{a^2}\sin\lambda\cos\lambda\cdot\gamma\sin fv,$$

nous aurons

$$2\int\delta\cdot dR + \delta\cdot r\left(\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{3m^2}{g-1}\cdot\frac{D^2}{a^3}\sin\lambda\cos\lambda\cdot\gamma\cos(gv-fv-\theta) - 2m^2\frac{r\delta r}{r^3},$$

ou bien, en prenant $g-1 = \frac{3}{4}m^2$,

$$2\int \delta\cdot dR + \delta\cdot r\left(\frac{dR}{dr}\right) = -\,4\,\frac{D^2}{a^3}\sin\lambda\cos\lambda\cdot\gamma\cos(gv - fv - \theta) - 2m^2\,\frac{r\delta r}{r^3}.$$

Il suit de là que au lieu de l'équation (1) l'on doit prendre celle-ci

$$(2)..0 = \frac{d^2\cdot r\delta r}{dt^2} + (1-2m^2)\frac{r\delta r}{r^3} + (2-3-4)\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)\frac{D^2}{a^3}\gamma\cdot\sin\lambda\cos\lambda\cos(gv-fv-\theta),$$

d'où l'on tire, en intégrant et faisant $\frac{1}{1-2m^2} = 1$,

$$r\delta r = 5\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)D^2\gamma\sin\lambda\cos\lambda\cos(gv - fv - \theta).$$

M. de Laplace a senti dernièrement la nécessité de cette correction, car nous voyons qu'il a publié cette même valeur de $r\delta r$ dans la Connaissance des Tems pour l'année 1824 (page 303); et sans doute son intention était de rectifier ce passage de la Mécanique céleste.

162. Avant de terminer ce paragraphe il ne sera pas inutile d'ajouter les remarques suivantes. Nous avons trouvé (Voyez pages 160, 163)

$$s = -\frac{\sigma^3 B}{h_i^6}\left\{\frac{3}{8}\cdot\frac{e_i\gamma_i\cos(3i-g-c)v}{3i-2g-c} + \frac{1}{4}\gamma_i\cos(3i-g)v\right\},$$

$$u = \frac{\sigma^4 B}{h_i^8}\left\{\frac{9}{16}\cdot\frac{e_i\gamma_i^2\sin(3i-2g-c)v}{3i-2g-c} + \frac{3}{16}\cdot\frac{\gamma_i^2\sin(3i-2g)v}{3i-2g-c}\right\}.$$

Ces expressions s'accordent avec celles données à la page 235 de la Connaissance des Tems pour l'année 1823: mais en examinant de près le procédé indiqué par M. de Laplace pour faire trouver ce résultat, l'on reconnoîtra qu'il ne subsiste qu'en vertu d'une égalité qui n'est pas parfaite. En effet les équations (L) rappelées dans ce passage donnent, en se conformant *strictement* au calcul exposé ici par l'auteur,

$$(1)\ \ldots\ 0 = \frac{d^2u}{dv^2} + u + \frac{9He\gamma^2}{2h^8}\cdot\frac{\sin(3f-2g-c)v}{3f-2g-c} + \frac{3s\,\delta s}{h^2};$$

$$(2)\ \ldots\ 0 = \frac{d^2s}{dv^2} + s + \frac{3He\gamma}{h^6}\cos(3f-g-c)v + \frac{3H\gamma}{h^6}\cos(3f-g)v.$$

Or, en intégrant l'équation (2), telle qu'elle est, l'on aurait

$$\delta s = \frac{3He\gamma\cos(3f-g-c)v}{h^6\{(3f-g-c)^2-1\}} + \frac{3H\gamma\cos(3f-g)v}{h^6\{(3f-g)^2-1\}}.$$

M. de Laplace écrit, au lieu de cela,

$$\delta s = \frac{3He\gamma\, cos\,(3f - g - c)\,v}{2h^6(3f - 2g - c)},$$

ce qui revient à changer $(3f-g-c)^2-1$ en $2(3f-2g-c)$; ou bien, à dire que, relativement à cet argument, l'on a l'équation

$$o = \frac{d^2s}{dv^2} + g^2 s + \frac{3He\gamma}{h^6} cos(3f-g-c)\,v.$$

Probablement M. de Laplace appliquait à ce cas un raisonnement analogue à celui que l'on lit dans la page 221 du même volume: mais il importe de remarquer que ce rapprochement cesse d'avoir lieu en général, pour les argumens semblables à gv, au-delà des quantités d'un ordre supérieur à m^3. De sorte que le véritable coefficient de s diffère de g^2 pour les termes multipliés par m^4, m^5, etc.

D'après le même principe, M. de Laplace intègre l'équation (1) comme si l'on avait

$$o = \frac{d^2u}{dv^2} + c^2 u + \frac{9He\gamma^2\, sin\,(3f - 2g - c)}{2h^8\,(3f - 2g - c)} + \frac{3s\,\delta s}{h^2};$$

mais dans le fait le véritable coefficient de u diffère de c^2 au-delà des termes multipliés par m^3. Et relativement aux termes du quatrième ordre tels que m^4, $m^2\gamma^2$, m^2e^2, il pourrait y avoir une différence dans les coefficiens numériques, capable de rendre ces quantités comparables à celles de l'ordre précédent.

Notre méthode fait trouver ces valeurs de s et de u sans donner lieu à des difficultés de cette espèce, mais les fonctions des élémens que l'on obtient ainsi n'en sont pas plus exactes; et il faut absolument calculer les termes dépendans des puissances supérieures des forces perturbatrices, si l'on veut obtenir la valeur absolue des coefficiens qui affectent ces inégalités.

163. Ces dernières réflexions ont un rapport immédiat avec les nouvelles recherches relatives à l'argument $(3f - 2g - c)v$, que M. de Laplace vient de publier dans le livre XVI de sa Mécanique céleste, dont nous avons eu connaissance peu de jours après l'impression de cette feuille. Mais, afin d'expliquer plus clairement en quoi consiste l'addition faite par M. de Laplace à son analyse antérieure, nous sommes forcés d'entrer dans quelques détails sur ce dernier écrit.

L'auteur déclare à la page 388 qu'il assimile l'argument $(3f-g-c)v$ à l'argument gv; et il prémet que le coefficient qui l'affecte dans l'équation différentielle en s du second ordre, ne peut pas être précisément égal à la quantité $g^2 - 1$; il en est (dit-il) extrêmement peu différent. Après cela, M. de Laplace, pour évaluer cette différence (qu'il suppose très-petite), il se borne à exclure de la valeur de $g^2 - 1$ le terme du quatrième ordre $-\frac{9}{4}m^2\gamma^2$, qui s'y trouve introduit par le développement de la fonction $-3m^2h^6s^3$: de sorte que il prend $g^2 - 1 + \frac{9}{4}m^2\gamma^2$ pour le coefficient du nouvel argument, à l'égard du terme analogue à celui qui est multiplié par $\gamma \sin(gv - \theta)$ dans l'équation (L'') que l'on voit dans la page 222 du troisième volume de la Mécanique céleste.

Cette modification de la quantité $g^2 - 1$ est effectivement nécessaire; et nous en avions déjà clairement indiqué le principe dans un Mémoire publié dans le quatrième volume de la *Correspond. Astron.* du Baron de Zach (Voyez page 27*). Mais dans ce même Mémoire nous avons en outre fait remarquer qu'en assimilant ainsi à $gv - \theta$ des argumens semblables, il fallait modifier convenablement le coefficient $B_1^{(0)}$, si l'on voulait rendre la correction exacte, du moins pour la totalité des termes du quatrième ordre. Donc en réduisant à

$$0 = \{1 - (2 - 2m - g)^2\} B_1^{(0)} - \frac{3}{4}m^2 \{2 + g - g^2 - 2B_1^{(0)} - 4A_2^{(0)}\}$$

l'équation posée au commencement de la page 225 du troisième volume de la Mécanique céleste, nous aurons

$$(3) \ldots B_1^{(0)} = \frac{\frac{3}{4}m^2(2 + g - g^2) - 3m^2A_2^{(0)}}{-3 + 4g - g^2 + m(8 - 4g) - \frac{5}{2}m^2},$$

et il faudra remplacer g par $3f - g - c$. D'après cela, si l'on observe

que l'on a $A_2^{(0)} = m^2 + \text{etc.}$, et

$$3f - g - c = 1 + \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}\right)m^2 + \left(\tfrac{9}{32} + \tfrac{225}{32}\right)m^3 + \text{etc.} = 1 + \tfrac{117}{16}m^3 + \text{etc.},$$

l'on trouvera, en négligeant les quantités du quatrième ordre,

$$B_1^{(0)} = \frac{3m(1 - 2m^2)}{8(1 - \frac{5}{8}m + \frac{117}{32}m^2)},$$

ou bien, en développant,

$$(4) \ldots\ldots B_1^{(0)} = \tfrac{3}{8}m + \tfrac{15}{64}m^2 - \tfrac{1011}{512}m^3.$$

La même équation (3), si l'on y fait $g = 1 + \frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{32}m^3$, donne

$$B_1^{(0)} = \frac{3m(1 - \frac{19}{8}m^2)}{8(1 - \frac{1}{4}m - \frac{57}{64}m^2)},$$

ou bien, en développant,

$$(5) \ldots\ldots B_1^{(0)} = \tfrac{3}{8}m + \tfrac{3}{32}m^2 - \tfrac{273}{512}m^3.$$

Donc, dans la fonction de m,

$$-\frac{\frac{3}{4}m^2(3 - 2m - g)(g + m)}{1 - m} \cdot B_1^{(0)},$$

qui fait partie de l'expression de $g^2 - 1$, il faudrait changer g en $1 + \frac{117}{16}m^3 + \text{etc.}$, et poser

$$B_1^{(0)} = \tfrac{3}{8}m + \tfrac{15}{64}m^2 + \text{etc.}$$

pour la rendre applicable à l'argument $(3f - g - c)v$. Or, en considérant seulement les quantités qui ne passent pas le quatrième ordre, il est clair qu'on peut opérer ce changement en ajoutant à la valeur de $g^2 - 1$ le terme $\frac{3}{2}m^2 \times \frac{9}{64}m^2 = \frac{27}{128}m^4$. Ainsi, en réunissant ce terme à celui qui est donné par la fonction $-3m^2h^6s^3$, il en résulte quil faut, dans le cas dont il est ici question, remplacer $g^2 - 1$ par

$$g^2 - 1 + \tfrac{9}{4}m^2\gamma^2 + \tfrac{27}{128}\cdot m^4.$$

Telle est la première correction qu'il convient de faire au procédé par lequel M. de Laplace obtient dans la page 389 du livre XVI l'expression de la perturbation en latitude ayant pour argument $(3f - g - c)v$.

164. Considérons maintenant le terme de l'équation différentielle en u, ayant pour argument $(3f-2g)v$. M. de Laplace déclare dans la page 386 du livre XVI qu'il assimile cet argument à l'argument $cv-\varpi$. Et d'après des idées tout-à-fait analogues à celles qui se rapportent à l'équation en s, il reconnaît la nécessité de modifier le coefficient $-(1-c^2)$ du terme $-(1-c^2)\cdot e\cos(cv-\varpi)$, si l'on veut le rendre applicable à l'argument $(3f-2g)v$. La modification opérée par M. de Laplace se réduirait, dans le fond, à exclure de la valeur de $-(1-c^2)$ le terme $-\frac{15}{4}m^2e^2$ qui s'y trouve introduit par le développement de la fonction $\frac{m'u'^3}{2h^2u^3}$. Mais M. de Laplace, au lieu de changer simplement $-(1-c^2)$ en $-(1-c^2)+\frac{15}{4}m^2e^2$ (comme cela résulte de son raisonnement), il change le facteur $\frac{15}{4}m^2$ en $\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}m^2$, et ensuite il remplace $\frac{3}{2}m^2$ par $1-c^2$.

Or, dans le cas actuel, où il est principalement question d'un effet qui dépend des modifications qu'il faut faire subir à *plusieurs* termes de la série qui exprime la fonction des constantes désignée par c, il n'est pas permis de substituer au *seul* premier terme $\frac{3}{2}m^2$ la valeur totale de la série $\frac{3}{2}m^2+\frac{225}{16}m^3+$ etc. sans faire voir que le calcul des termes ultérieurs rend légitime un pareil changement. C'est en cela que consiste la véritable difficulté dans cette recherche, et il nous paraît qu'elle est loin d'être surmontée par des considérations aussi simples. Et la phrase *Il lui serait même égal si* etc. employée par M. de Laplace dans le rapprochement des deux termes dont il s'agit ici nous semble tellement contraire aux véritables progrès dans la théorie des perturbations de la Lune, qu'il conviendrait de s'en abstenir, même dans le cas où les combinaisons des calculs rendrait cette égalité rigoureuse; puisque, par le fait, elle n'est point démontrée par la considération indirecte de l'auteur au-delà du premier terme. Il faut absolument s'engager dans un calcul beaucoup plus épineux, si l'on veut connaître au juste l'expression de la modification qu'il faut faire subir à la quantité $-(1-c^2)$.

165. Pour ne point passer sous silence tout ce qui tend à éclaircir cette analyse, il importe aussi d'observer qu'à la rigueur il faudrait en outre modifier la valeur du coefficient $A_1^{(1)}$ par un motif semblable

à celui qui a rendu nécessaire dans le cas précédent la correction du coefficient $B_1^{(0)}$. En effet, si l'on réduit à

$$0 = \left\{1-(2-2m-c)^2\right\} A_1^{(1)} + 3m^2 \left\{\frac{c}{4} - \frac{(3+4m)}{4} - \frac{2(1+m)}{2-2m-c} - \frac{1}{2} A_1^{(1)}\right\}$$

l'équation qui détermine le coefficient $A_1^{(1)}$ (Voyez page 215 du troisième volume de la Mécanique céleste), l'on en tire (en posant $c = 1$ dans le coefficient de $3m^2$)

$$A_1^{(1)} = \frac{3m^2(\frac{5}{2}+7m)}{-3+4c-c^2+m(8-4c)-\frac{11}{2}m^2}.$$

Or, en changeant dans cette expression c en $3f-2g$, et remarquant que l'on a

$$c = 1 - \tfrac{3}{4}m^2 - \tfrac{225}{32}m^3 - \text{etc.}; \qquad 3f-2g = 1 - \tfrac{3}{2}m^2 + \tfrac{9}{16}m^3 + \text{etc.},$$

il devient évident que la valeur de $A_1^{(1)}$, *développée suivant les puissances de* m, sera différente dans ces deux cas au-delà du premier terme. Mais, si l'on s'abstient d'exécuter ce développement, les deux valeurs de $A_1^{(1)}$ approcheront davantage de l'égalité, en vertu de la circonstance qui rend la valeur arithmétique de c fort approchante de $1-\frac{3}{2}m^2$. Ainsi en prenant dans ces deux cas la même valeur pour $A_1^{(1)}$ l'on commet à la vérité une erreur; mais cette erreur ne saurait se faire sentir qu'au-delà des quantités du quatrième ordre, du moins dans le sens arithmétique.

Il nous paraît inutile de pousser plus loin cet examen, puisque nous voyons que M. de Laplace calcule de nonveau le coefficient affecté de l'argument $(3f-2g-c)v$, qui entre dans l'expression de la longitude de la Lune, en supposant vraie l'équation $\int \delta \cdot dR = 0$, ce qui est directement contraire à tout ce que nous avos démontré à ce sujet dans ce paragraphe.

Par la même raison nous ne discuterons pas l'addition que M. de Laplace a fait à son calcul antérieur du coefficient de l'argument $(g-f)v$ qui dépend de l'aplatissement de la Terre. Nous ferons seulement remarquer que l'auteur admet au moins dans son nouveau calcul (Voyez pages 399 et 400 du livre XVI) l'existence de plusieurs

fonctions capables de produire un coefficient de la forme $\frac{19}{2} + Hm$; tandis que dans son Mémoire publié dans la Connaissance des tems pour l'année 1824 il avait affirmé que l'on a nécessairement $H = 0$ (Voyez page 304 de ce dernier volume). Cependant nous avons déjà publié un résultat contraire dans la page 31* du quatrième volume de la Correspondance du Baron de Zach, où nous avons avancé que l'on a $H = -\frac{9}{8}$. M. de Laplace trouve maintenant $H = +\frac{3}{8}$ (Voyez page 400 du livre XVI); mais il sera prouvé dans cette théorie de la Lune, que ce dernier coefficient de M. Laplace est en réalité d'un signe contraire et trois fois plus petit que le véritable.

§ 6.

Variations séculaires des élémens de l'orbite de la Lune dues aux variations séculaires des élémens de l'orbite du Soleil.

166. Considérons toujours les quantités γ, γ', e, ε' comme du premier ordre, et en poussant les développemens jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement à l'égard de ces quatre élémens des deux orbites, proposons nous de trouver la partie séculaire (c'est-à-dire la partie indépendante des longitudes φ et φ') renfermée dans l'expression générale des six fonctions $\frac{d \cdot h^2}{d\varphi}$, $\frac{d\gamma}{d\varphi}$, $\frac{d\theta}{d\varphi}$, $\frac{d\varpi}{d\varphi}$, $\frac{de}{e \cdot d\varphi}$, $\frac{df}{d\varphi}$. Ce degré d'approximation suffit pour mettre en évidence l'existence de ces perturbations, et pour en calculer le premier terme. Il est vrai que le calcul des termes suivans ne peut pas être négligé, lorsque l'on a pour but de former une théorie capable de satisfaire aux observations très-éloignées de l'origine du tems; mais il ne convient pas de s'engager dans une telle recherche au moyen des formules de la variation des constantes arbitraires. La méthode générale par laquelle nous déterminerons directement les trois coordonnées de la Lune est plus propre à faire connaître les termes qui dépendent des puissances supérieures de la force perturbatrice. Cependant, pour répandre un plus grand jour sur cette méthode, il est utile de la faire précéder par ces recherches, qui ont l'avantage d'assigner la forme de certaines fonctions

des élémens sur lesquelles il importe de diriger particulièrement l'attention. L'on apprend par-là à connaître le caractère inhérent aux fonctions qu'il s'agit de déterminer, et l'on sait d'avance ce que l'on doit faire pour comprendre dans les procédés d'un même calcul le développement des fonctions des élémens de l'orbite du Soleil qui sont susceptibles d'être considérablement modifiées par les intégrations qu'il faut exécuter sur la partie variable et séculaire de ces mêmes élémens. Toutefois ne perdons pas de vue que dans ce paragraphe il est seulement question des termes séculaires qui dépendent des élémens de l'orbite du Soleil, et que l'on fait abstraction de ceux qui dépendent du mouvement du nœud et du périgée lunaire, quoique ces inégalités soient, par leur origine analytique, analogues à celles que l'on nomme séculaires.

167. Cela posé, reprenons l'équation

$$\frac{d\cdot h^2}{dv} = \frac{2d\Omega}{u^2dv}$$

qui détermine la variation de la constante arbitraire h^2. La valeur de la fonction $\frac{d\Omega}{u^2dv}$, relative à l'action du Soleil, a été donnée dans le n.° 27; mais, comme il s'agit ici d'avoir seulement les termes indépendans des angles v et v' qui ne passent pas le second ordre, l'on peut réduire son expression à celle-ci

$$\frac{d\Omega}{u^2dv} = -\frac{3M'u'^3}{u^4}\cdot ss'\sin(v-v').$$

Or nous avons $s = \gamma\sin(v-\theta)$; et d'après le n.° 46 $s' = \gamma'\sin(v'-\theta')$; ainsi il est clair que l'on a

$$\frac{d\cdot h^2}{dv} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M'u'^3}{u^4}\cdot\gamma\gamma'\sin(\theta-\theta').$$

L'expression de $\frac{d\gamma}{dv}$ renferme un terme semblable. En effet nous avons l'équation (Voyez n.° 68)

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{\cos(v-\theta)}{h^2}\left\{\Omega_{(1)} - \gamma\cos(v-\theta)\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}\right\};$$

donc en y faisant (Voyez n.° 27)

$$\Omega_{(1)} = \frac{3M'u'^3}{u^4}\cdot s'\cos(v-v'),$$

et négligeant le terme du troisième ordre donné par la fonction $\frac{d\Omega}{u^2 dv}$, il est évident que l'on a

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2 u^4} \cdot \gamma' sin(\theta - \theta').$$

168. Si l'on remarque maintenant que l'expression de $\frac{de}{dv}$ posée dans le n.° 68 renferme la fonction

$$\left\{\frac{3}{2} e + 2\, cos(v - \varpi)\right\} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 h^2 \cdot dv} + 2e\gamma\, cos(v - \theta) . \frac{\Omega_{(1)}}{h^2},$$

l'on en conclura d'abord que l'on a

$$\frac{de}{e \cdot dv} = \left(-\frac{9}{8} + \frac{3}{2}\right) \frac{M'u'^3}{h^2 u^4} \cdot \gamma\gamma' sin(\theta - \theta') - \frac{3}{2} \cdot \frac{M'u'^3}{eh^2 u^4} \cdot \gamma\gamma' cos(v - \varpi)\, sin(\theta - \theta').$$

Donc en faisant dans le premier terme du second membre de cette équation $\frac{1}{u^4} = \frac{h^8}{\sigma^4}$, et dans le second terme

$$\frac{1}{u^4} = -\frac{4h^8}{\sigma^4} \cdot e\, cos(v - \varpi),$$

il viendra

$$\frac{de}{e \cdot dv} = \left(-\frac{9}{8} + \frac{3}{2} + 3\right) \cdot \frac{M'u'^3 h^6}{\sigma^4} \cdot \gamma\gamma' sin(\theta - \theta'),$$

ou bien

$$\frac{de}{e \cdot dv} = \frac{27}{8} \cdot \frac{M'u'^3 h^6}{\sigma^4} \cdot \gamma\gamma' sin(\theta - \theta').$$

169. Réduisons l'expression de $\frac{df}{dv}$ posée dans le n.° 68 à

$$\frac{df}{dv} = -\frac{3}{2} \cdot \gamma\, sin(v - \theta) . \frac{h\Omega_{(1)}}{\sigma^2} + \left(2 + 6e^2 + \frac{9}{2}\gamma^2\right) \frac{h^3 \Omega_{(2)}}{\sigma^3} - \frac{3}{2}\, e cos(v - \varpi) \frac{h^3 \Omega_{(2)}}{\sigma^3}.$$

D'après les formules du n.° 27 nous prendrons

$$\Omega_{(1)} = \frac{3M'u'^3}{u^4} \cdot s' cos(v - v').$$

Maintenant, si l'on remarque que l'expression de $\Omega_{(2)}$ rapportée dans le n.° 26 renferme la fonction

$$\frac{M'u'^3}{u^3} (1 + s'^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{M'u'^2}{u^2} cos(v - v') \left\{ \begin{array}{l} (1 + s'^2)^{-\frac{3}{2}} - (1 + s^2)^{-\frac{3}{2}} \\ - 3\frac{u'}{u}(1 + s'^2)^{-\frac{5}{2}}(ss' + cos(v - v')) \end{array} \right\}$$

on prendra dans le cas actuel

$$\Omega_{(2)} = \frac{M'u'^3}{u^3}\left\{1 - \frac{3}{2}s'^2 - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{5}{2}s'^2\right) - 3\,ss'\cos(v - v')\right\},$$

ou bien

$$\Omega_{(2)} = -\frac{M'u'^3}{2u^3}\left(1 - \frac{9}{2}s'^2\right) - 3\frac{M'u'^3}{u^3}\,ss'\cos(v - v').$$

Donc, en faisant $1 - \frac{9}{2}s'^2 = 1 - \frac{9}{2}\gamma'^2\sin^2(v' - \theta') = 1 - \frac{9}{4}\gamma'^2$, et substituant ensuite ces valeurs de $\Omega_{(1)}$ et $\Omega_{(2)}$ dans celle de $\frac{df}{dv}$, on aura

$$\frac{df}{dv} = -\frac{M'u'^3h^3}{\sigma^3u^3}\left(1 + 3e^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{9}{4}\gamma'^2\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{M'u'^3h^3}{\sigma^3u^3}\,e\cos(v - \varpi)$$
$$-\frac{M'u'^3h^3}{\sigma^3u^3}\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{8}\cdot\frac{\sigma}{h^2u}\right)\gamma\gamma'\cos(\theta - \theta').$$

Maintenant, si l'on fait dans le second terme de cette valeur

$$\frac{1}{u^3} = -\frac{3h^6}{\sigma^3}\cdot e\cos(v - \varpi),$$

et dans les termes du second ordre $u = \frac{\sigma}{h^2}$, $u' = \frac{1}{a'}$, il viendra

$$\frac{df}{dv} = -\frac{M'u'^3h^3}{\sigma^3u^3} - \frac{M'h^9}{\sigma^6a'^3}\left(\frac{33}{8}e^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{9}{4}\gamma'^2\right) - \frac{21}{8}\cdot\frac{M'h^9}{\sigma^6a'^3}\gamma\gamma'\cos(\theta - \theta').$$

170. Pour développer le premier terme de cette expression, il est indispensable d'avoir la valeur de u' en fonction de la longitude v de la Lune.

Les formules (2) et (3) trouvées dans les n.ºs 46 et 47 donnent en négligeant les quantités qui passent le second ordre

$$u' = \frac{1}{a'}\left\{1 + \varepsilon'^2 + \frac{1}{4}\gamma'^2 + \varepsilon'\cos(v' - \tau') - \frac{1}{4}\gamma'^2\cos(2v' - 2\theta')\right\}$$
$$n'(t + f') = v' - 2\varepsilon'\sin(v' - \tau') + \frac{3}{4}\varepsilon'^2\sin(2v' - 2\tau') + \frac{1}{4}\gamma'^2\sin(2v' - 2\theta').$$

Actuellement, pour avoir v' en fonction de v, il faut éliminer t de la dernière de ces équations au moyen de l'expression de $t + f$ posée au commencement du n.° 63. Cette dernière équation devient $t + f = \int A'dv$, en omettant les termes périodiques qui ne peuvent rien donner dans le cas actuel, ainsi qu'il est aisé de le voir avec une légère réflexion sur la marche même du calcul que nous allons exposer. Il suit de là qu'en substituant pour $\int A'dv$ sa valeur trouvée dans le n.° 64, et négligeant le carré de l'intégrale $\int d'\Omega$, l'on a

$$t + f = v\sqrt{\left(\frac{\alpha_i^3}{\sigma}\right)} + \frac{3\alpha_i}{\sigma}\sqrt{\left(\frac{\alpha_i^3}{\sigma}\right)} \cdot \int dv \int d'\Omega\,,$$

où l'on sait que

$$d'\Omega = \frac{d\Omega}{dv}dv + \frac{d\Omega}{du}du + \frac{d\Omega}{ds}ds.$$

La valeur de $\frac{d \cdot h^2}{dv}$ trouvée dans le n.° 167 nous montre d'abord que dans la fonction $\frac{d\Omega}{dv}dv$ l'on a le terme

$$-\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{u^2}\gamma\gamma' \sin(\theta - \theta')dv.$$

Pour avoir le terme analogue renfermé dans la partie $\frac{d\Omega}{du}du + \frac{d\Omega}{ds}ds$, remarquons que les équations

$$\Omega_{(1)} = \frac{s}{u} \cdot \frac{d\Omega}{du} + \frac{1 + ss}{u^2} \cdot \frac{d\Omega}{ds}, \qquad \Omega_{(2)} = \frac{d\Omega}{du} + \frac{s}{u} \cdot \frac{d\Omega}{ds}$$

posées dans le n.° 61 donnent

$$\frac{d\Omega}{ds} = -us \cdot \Omega_{(2)} + u^2\Omega_{(1)}\,; \qquad \frac{d\Omega}{du} = -us \cdot \Omega_{(1)} + (1 + ss)\Omega_{(2)}.$$

Cela posé il est clair que d'après les formules du n.° 27 l'on a

$$u^2\Omega_{(1)}ds = \frac{3M'u'^3}{u^2} \cdot s' \cos(v - v')\,ds.$$

Il suit de là qu'en faisant dans cette expression

$$s' = \gamma' \sin(v' - \theta'), \qquad ds = \gamma \cos(v - \theta)dv$$

l'on obtient dans la valeur de $\frac{d\Omega}{ds}ds$ le terme

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{u^2} \cdot \gamma\gamma' \sin(\theta - \theta')\,dv.$$

Ce terme détruit donc exactement celui qui se trouve dans la valeur de $\frac{d\Omega}{dv}dv$.

Il est d'ailleurs évident que la fonction

$$-us \cdot \Omega_{(2)}ds = -\frac{1}{2} \cdot u\Omega_{(2)} \cdot \gamma^2 \sin(2v - 2\theta) \cdot dv$$

ne peut donner aucun des termes dont il est ici question. Et si l'on remarque que la valeur elliptique de u donne (Voyez n.° 60)

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sigma}{h^2(1+\gamma\gamma)}\left\{\frac{s\,ds}{dv\cdot\sqrt{(1+ss)}} - e\sin(v-\varpi)\right\},$$

l'on verra aussitôt qu'il est impossible d'avoir des termes semblables dans la valeur de la fonction $\frac{d\Omega}{du}du$. Ainsi il est démontré par-là que dans l'expression de $d'\Omega$ l'on a

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{M'u'^3}{u^2}\cdot\gamma\gamma'\sin(\theta-\theta')\,dv = 0.$$

171. Nous avons vu dans le n.° 108 que la même fonction $d'\Omega$ renferme ces deux termes

$$-\frac{M'u'^3}{u^3}\left(\frac{1}{2}-ss\right)du - \frac{M'u'^3}{u^2}\cdot s\,ds,$$

lesquels, en y supposant u' quantité absolument constante et égale à $\frac{1}{a'}$, donnent

$$-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d'\Omega = \frac{M'\alpha_{,}}{\sigma a'^3}\cdot\frac{(ss-\frac{1}{2})}{u^2}.$$

Donc, en substituant pour s et u leur valeur elliptique, et prenant

$$\left\{\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)\right\}^{-2} = 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2,$$

l'on obtient

$$-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{M'\alpha_{,}}{2\sigma^3 a'^3}\cdot h^4(1+\gamma^2)^2(1-\gamma^2)\left(1-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2\right),$$

ou bien

$$-\frac{2\alpha_{,}}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{M'\alpha_{,}}{2\sigma^3 a'^3}\cdot h^4\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2\right).$$

En substituant cette valeur dans celle de $t+f$ posée plus haut, nous aurons

$$t+f = v\sqrt{\left(\frac{\alpha_{,}^3}{\sigma}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_{,}^3}{\sigma}\right)}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{M'\alpha_{,}}{\sigma^3 a'^3}\int h^4\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2\right)dv.$$

Donc, en nommant P la partie variable et séculaire renfermée dans la fonction $\frac{h^4}{h_{,}^4}\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2\right)$, et faisant pour plus de simplicité $\frac{M'\alpha_{,}h_{,}^4}{\sigma^3 a'^3} = \mathrm{m}^2$, et comme dans le n.° 109

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\left(\frac{a_i^3}{\sigma}\right)} \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{4} \mathrm{m}^2 \left(1 + \frac{1}{2}\gamma_i^2 + \frac{3}{2} e_i^2 \right) \right\},$$

l'on aura

$$t + f = \frac{v}{n} + \sqrt{\left(\frac{a_i^3}{\sigma}\right)} \frac{3}{4} \mathrm{m}^2 \int P dv;$$

ou bien, en multipliant par n, et négligeant le terme multiplié par m^4,

$$n(t + f) = v + \frac{3}{4} \mathrm{m}^2 \int P dv.$$

172. En multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{n'}{n}$, et posant $\frac{n'}{n} = m$, il en résulte

$$n'(t + f) = mv + \frac{3}{4} \mathrm{m}^2 m \int P dv.$$

Nous avons dit plus haut que l'on a l'équation

$$n'(t + f') = v' - 2\varepsilon' \sin(v' - \tau') + \frac{3}{4}\varepsilon'^2 \sin(2v' - 2\tau') + \frac{1}{4}\gamma'^2 \sin(2v' - 2\theta').$$

Donc, en éliminant la variable t entre ces deux équations, et posant pour plus de simplicité

$$\Lambda = n'(f' - f) + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 m \cdot \int P dv,$$

nous aurons

$$v' = mv + \Lambda + 2\varepsilon' \sin(v' - \tau') - \frac{3}{4}\varepsilon'^2 \sin(2v' - 2\tau') - \frac{1}{4}\gamma'^2 \sin(2v' - 2\theta').$$

Maintenant, si l'on tire de cette équation la valeur de v' à l'aide de la série de Lagrange, l'on trouvera, en négligeant les quantités du troisième ordre,

$$\begin{aligned} v' = mv + \Lambda &+ 2\varepsilon' \sin(mv + \Lambda - \tau') \\ &+ \frac{5}{4}\varepsilon'^2 \sin(2mv + 2\Lambda - 2\tau') - \frac{1}{4}\gamma'^2 \sin(2mv + 2\Lambda - 2\theta'). \end{aligned}$$

Il suit de là que

$$\varepsilon' \cos(v' - \tau') = \varepsilon' \cos[mv + \Lambda - \tau' + 2\varepsilon' \sin(mv + \Lambda - \tau')],$$

d'où l'on conclut, en développant le *cosinus*,

$$\varepsilon' cos(v' - \tau') = - \varepsilon'^2 + \varepsilon' cos(mv + \Lambda - \tau') + \varepsilon'^2 cos(2mv + 2\Lambda - 2\tau').$$

Donc, en substituant cette valeur dans celle de u' (Voyez n.° 170), et remarquant qu'il suffit ici de prendre

$$\gamma'^2 cos(2v' - 2\theta') = \gamma'^2 cos(2mv + 2\Lambda - 2\theta'),$$

l'on trouvera

$$u' = \frac{1}{a'}\left\{1 + \frac{1}{4}\gamma'^2 + \varepsilon' cos(mv + \Lambda - \tau') + \varepsilon'^2 cos(2mv + 2\Lambda - 2\tau') - \frac{1}{4}\gamma'^2 cos(2mv + 2\Lambda - 2\theta')\right\}.$$

173. Revenons maintenant à notre objet, c'est-à-dire au développement de la fonction $\frac{M'h^3u'^3}{\sigma^3u^3}$ qui entre dans l'expression de $\frac{df}{dv}$.

En négligeant les quantités périodiques, il est clair que nous avons

$$u'^3 = \frac{1}{a'^3}\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{3}{4}\gamma'^2\right); \quad \left\{\sqrt{1+ss} + e\,cos(v - \varpi)\right\}^{-3} = 1 + 3e^2 - \frac{3}{4}\gamma^2;$$

et par conséquent

$$\frac{M'u'^3h^3}{\sigma^3u^3} = \frac{M'h^9}{\sigma^6a'^3}\cdot\left(1+\gamma^2\right)^3\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{3}{4}\gamma'^2\right)\left(1 + 3e^2 - \frac{3}{4}\gamma^2\right),$$

ou bien

$$\frac{M'u'^3h^3}{\sigma^3u^3} = \frac{M'h^9}{\sigma^6a'^3}\left(1 + 3e^2 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{3}{4}\gamma'^2 + \frac{9}{4}\gamma^2\right).$$

En substituant cette valeur dans celle de $\frac{df}{dv}$, il viendra

$$\frac{df}{dv} = -\frac{M'h^9}{\sigma^6a'^3}\left\{1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 - \frac{3}{2}\gamma'^2 + \frac{57}{8}e^2 + \frac{9}{2}\gamma^2\right\} - \frac{21}{8}\cdot\frac{M'h^9}{\sigma^6a'^3}\gamma\gamma' cos(\theta - \theta').$$

Nous avons vu dans le n.° 171 que l'on a l'équation

$$t + f = \sqrt{\left(\frac{a_{\prime}^3}{\sigma}\right)}\left\{v + \frac{3}{4}\cdot\frac{M'a_{\prime}}{\sigma^3a'^3}\int h^4\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2\right)dv\right\}.$$

Donc, en y substituant pour f la valeur que l'on obtient en intégrant l'expression précédente de $\frac{df}{dv}$, il viendra

$$t+f_{,}=\sqrt{\left(\frac{a_{,}^{3}}{\sigma}\right)}\left\{v+\frac{3}{4}\cdot\frac{M'a_{,}}{\sigma^{3}a'^{3}}\int h^{4}\left(1+\frac{1}{2}\gamma^{2}+\frac{3}{2}e^{2}\right)dv\right\}$$
$$+\frac{M'}{\sigma^{6}a'^{3}}\cdot\int h^{9}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon'^{2}-\frac{3}{2}\gamma'^{2}+\frac{57}{8}e^{2}+\frac{9}{2}\gamma^{2}\right)dv$$
$$+\frac{21}{8}\cdot\frac{M'}{\sigma^{6}a'^{3}}\int h^{9}\cdot\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta')\,dv.$$

Nous reviendrons plus loin sur cette équation; mais avant de la développer ultérieurement il est nécessaire de former les expressions séculaires de $\frac{d\varpi}{dv}$ et $\frac{d\theta}{dv}$:

174. Observons avant tout qu'en posant pour un moment l'équation (Voyez n.° 68)

$$e\frac{d\varpi}{dv}=\frac{(1+\gamma\gamma)}{\sigma}\Omega_{(2)}\cos(v-\varpi)+\frac{\Omega_{(1)}}{h^{2}}\left\{-\frac{3}{2}\gamma\sin(\varpi-\theta)+\frac{1}{2}\gamma\sin(2v-\theta-\varpi)\right\},$$

et prenant ensuite

$$\Omega_{(2)}=-\frac{3M'u'^{3}}{u^{3}}ss'\cos(v-v')+\frac{9}{4}\cdot\frac{M'u'^{3}}{u^{3}}s's',\quad \Omega_{(1)}=\frac{3M'u'^{3}}{u^{4}}s'\cos(v-v')-\frac{3}{2}\cdot\frac{M'u'^{3}s}{u^{4}}$$
$$\frac{1}{u^{3}}=-\frac{3h^{6}}{\sigma^{3}}\cdot e\cos(v-\varpi);\qquad \frac{1}{u^{4}}=-\frac{4h^{8}}{\sigma^{4}}\cdot e\cos(v-\varpi),$$

il en résulte

$$\frac{d\varpi}{dv}=\left(\frac{3}{4}\gamma^{2}-\frac{9}{4}\gamma^{2}-\frac{27}{16}\gamma'^{2}\right)\frac{M'u'^{3}h^{6}}{\sigma^{4}}+\left(\frac{9}{8}+\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\right)\frac{M'u'^{3}h^{6}}{\sigma^{4}}\cdot\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta').$$

Si l'on considère de nouveau le calcul exposé dans le n.° 77, il est facile de voir qu'en y faisant

$$\frac{1}{u^{3}}=\frac{h^{6}(1+\gamma\gamma)^{3}}{\sigma^{3}}\left\{1-3\left(1-\gamma\gamma+\frac{5}{2}e^{2}\right)e\cos(v-\varpi)\right\}$$

l'on obtient

$$\frac{d\varpi}{dv}=\frac{3}{4}\cdot\frac{M'u'^{3}h^{6}}{\sigma^{4}}(1+\gamma\gamma)^{3}\left(1-\gamma\gamma+\frac{5}{2}e^{2}\right)+\frac{15}{4}\cdot\frac{M'u'^{3}h^{6}}{\sigma^{4}}\cos(2v'-2\varpi).$$

Donc, en réunissant ces deux parties de l'expression de $\frac{d\varpi}{dv}$, l'on aura

$$\frac{d\varpi}{dv}=\frac{3}{4}\cdot\frac{M'u'^{3}h^{6}}{\sigma^{4}}\left(1+0\cdot\gamma^{2}-\frac{9}{4}\gamma'^{2}+\frac{5}{2}e^{2}\right)+\frac{21}{8}\cdot\frac{M'u'^{3}h^{6}}{\sigma^{4}}\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta')$$
$$+\frac{15}{4}\cdot\frac{M'u'^{3}h^{6}}{\sigma^{4}}\cos(2v'-2\varpi).$$

Ainsi il est nécessaire de calculer les termes séculaires renfermés dans le produit $u'^3 cos(2v' - 2\varpi)$.

La valeur de u' trouvée dans le n.° 172 donne

$$u'^3 = \frac{1}{a'^3}\left\{1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{3}{4}\gamma'^2 + 3\varepsilon' cos(mv + \Lambda - \tau') + \frac{5}{2}\varepsilon'^2 cos(2mv + 2\Lambda - 2\tau') \right.$$
$$\left. - \frac{3}{4}\gamma'^2 cos(2mv + 2\Lambda - 2\theta')\right\}.$$

A l'aide de l'équation

$$v' = mv + \Lambda + 2\varepsilon' sin(mv + \Lambda - \tau') + \frac{5}{4}\varepsilon'^2 sin(2mv + 2\Lambda - 2\tau')$$
$$- \frac{1}{4}\gamma'^2 sin(2mv + 2\Lambda - 2\theta')$$

trouvée dans le même numéro, l'on obtient

$$cos(2v' - 2\varpi) = (1 - 4\varepsilon'^2)\, cos(2mv + 2\Lambda - 2\varpi) - 2\varepsilon' cos(mv + \Lambda + \tau' - 2\varpi)$$
$$+ \frac{3}{4}\varepsilon'^2 cos(2\varpi - 2\tau') + \frac{1}{4}\gamma'^2 cos(2\varpi - 2\theta').$$

Cela posé, il est clair que l'on a

$$u'^3 cos(2v' - 2\varpi) = \frac{1}{a'^3}\left(\frac{3}{4} - 3 + \frac{5}{4}\right)\varepsilon'^2 cos(2\varpi - 2\tau')$$
$$+ \frac{1}{a'^3}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\right)\gamma'^2 cos(2\varpi - 2\theta');$$

ou bien

$$u'^3 cos(2v' - 2\varpi) = -\frac{1}{a'^3}\left\{\varepsilon'^2 cos(2\varpi - 2\tau') + \frac{1}{8}\gamma'^2 cos(2\varpi - 2\theta')\right\}.$$

Donc, en substituant cette valeur dans celle de $\frac{d\varpi}{dv}$ obtenue plus haut, et faisant dans le premier terme

$$u'^3 = \frac{1}{a'^3}\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{3}{4}\gamma'^2\right),$$

l'on trouvera

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{M'h^6}{\sigma^4 a'^3}\left\{\frac{3}{4}\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 - \frac{3}{2}\gamma'^2 + 0\cdot\gamma^2 + \frac{5}{2}e^2\right) + \frac{21}{8}\gamma\gamma' cos(\theta - \theta')\right\}$$
$$- \frac{M'h^6}{\sigma^4 a'^3}\left\{\frac{15}{4}\varepsilon'^2 cos(2\varpi - 2\tau') + \frac{15}{32}\gamma'^2 cos(2\varpi - 2\theta')\right\}.$$

175. Pour former l'expression analogue de $\gamma \frac{d\theta}{dv}$, remarquons d'abord qu'en faisant dans l'équation

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = \frac{1}{h^2} \left\{ \Omega_{(1)} - \gamma \cos(v-\theta) \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv} \right\} \sin(v-\theta);$$

$$\Omega_{(1)} = \frac{3M'u'^3(1-ss)}{u^4} \cdot s' \cos(v-v')\,; \quad \frac{d\Omega}{u^2 dv} = \frac{3M'u'^3}{u^4} \cdot ss' \sin(v-v')$$

(Voyez n.ºs 68 et 27), l'on obtient

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4} \cdot s' \left\{ \sin(v'-\theta) + \sin(2v-v'-\theta) \right\}$$
$$- \frac{3}{2} \cdot \frac{M'u'^3\gamma^2}{h^2u^4} \cdot s' \left\{ \sin(2v-v'-\theta) + \frac{1}{2} \sin(v'-\theta) \right\};$$

mais $s' = \gamma' \sin(v'-\theta')$, partant nous avons

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3\gamma'}{h^2u^4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right) \cos(\theta-\theta') - \cos(2v-\theta-\theta') - \cos(2v'-\theta-\theta') \right\}.$$

D'après le calcul exposé dans le n.° 75, la valeur de $\gamma \frac{d\theta}{dv}$ doit aussi renfermer la fonction

$$-\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3\gamma}{h^2u^4} \left\{ 1 - \cos(2v-2\theta) - \cos(2v'-2\theta) \right\};$$

ainsi il est clair que l'on a

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3\gamma}{h^2u^4} \left\{ 1 - \cos(2v-2\theta) - \cos(2v'-2\theta) \right\}$$
$$+ \frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3\gamma'}{h^2u^4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right) \cos(\theta-\theta') - \cos(2v-\theta-\theta') - \cos(2v'-\theta-\theta') \right\}.$$

Il faut maintenant développer le second membre de cette équation en conservant les termes séculaires du troisième ordre afin d'avoir, après la division par γ, la valeur de $\frac{d\theta}{dv}$ exacte jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement.

176. Pour obtenir les termes donnés par la fonction

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{M'u'^3}{h^2u^4} \left\{ \gamma \cos(2v-2\theta) - \gamma' \cos(2v-\theta-\theta') \right\},$$

il suffit d'y faire

$$\frac{1}{u^4} = \frac{h^8(1+\gamma\gamma)^4}{\sigma^4}\left(\sqrt{1+ss}+e\cos(v-\varpi)\right)^{-4} = \frac{h^8}{\sigma^4}\left\{\gamma^2\cos(2v-2\theta)+5e^2\cos(2v-2\varpi)\right\},$$

ce qui change l'expression précédente de $\gamma\frac{d\theta}{dv}$ en celle-ci

$$\gamma\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{M'u'^3}{h^2u^4}\cdot\left\{\gamma-\gamma\cos(2v'-2\theta)+\gamma'\cos(2v'-\theta-\theta')-(1-\tfrac{1}{2}\gamma^2)\gamma'\cos(\theta-\theta')\right\}$$
$$+\frac{3}{8}\cdot\frac{M'u'^3h^6}{\sigma^4}\left\{\gamma^3-\gamma'\gamma^2\cos(\theta-\theta')-5\gamma'e^2\cos(2\varpi-\theta-\theta')\right\}.$$

Or, en changeant successivement 2ϖ en 2θ et $\theta+\theta'$ dans la valeur de $u'^3\cos(2v'-2\varpi)$ trouvée dans le n.° 174, il est évident que l'on a

$$u'^3\cos(2v'-2\theta) = -\frac{1}{a'^3}\left\{\varepsilon'^2\cos(2\theta-2\tau')+\frac{\gamma'^2}{8}\cos(2\theta-2\theta')\right\}$$
$$u'^3\cos(2v'-\theta-\theta') = -\frac{1}{a'^3}\left\{\varepsilon'^2\cos(\theta+\theta'-2\tau')+\frac{\gamma'^2}{8}\cos(\theta-\theta')\right\}.$$

Donc, en substituant ces valeurs, nous aurons

$$\gamma\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{M'u'^3}{h^2u^4}\left\{\gamma-\left(1-\frac{1}{2}\gamma^2\right)\gamma'\cos(\theta-\theta')\right\}$$
$$+\frac{M'h^6}{\sigma^4a'^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{8}\gamma^3+\left(\frac{3}{32}\gamma'^3-\frac{3}{8}\gamma'\gamma^2\right)\cos(\theta-\theta')-\frac{15}{8}\gamma'e^2\cos(2\varpi-\theta-\theta')\\ -\frac{3}{32}\gamma\gamma'^2\cos(2\theta-2\theta')-\frac{3}{4}\gamma\varepsilon'^2\cos(2\theta-2\tau')+\frac{3}{4}\gamma'\varepsilon'^2\cos(\theta+\theta'-2\tau')\end{array}\right\}$$

Cela posé, si l'on fait dans le premier terme

$$\frac{1}{u'^3} = \frac{1}{a'^3}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{3}{4}\gamma'^2\right),$$
$$\frac{1}{u^4} = \frac{h^8}{\sigma^4}(1+\gamma\gamma)^4(1+5e^2-\gamma^2) = \frac{h^8}{\sigma^4}(1+3\gamma^2+5e^2),$$

il viendra

$$\gamma\frac{d\theta}{dv} = \frac{M'h^6}{\sigma^4a'^3}\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{4}\gamma\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{3}{4}\gamma'^2+5e^2+\frac{5}{2}\gamma^2\right)\\ +\frac{3}{4}\gamma'\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{7}{8}\gamma'^2+5e^2+2\gamma^2\right)\cos(\theta-\theta')\\ -\ \gamma\left\{\frac{3}{32}\gamma'^2\cos(2\theta-2\theta')+\frac{3}{4}\varepsilon'^2\cos(2\theta-2\tau')\right\}\\ +\ \gamma'\left\{\frac{3}{4}\varepsilon'^2\cos(\theta+\theta'-2\tau')-\frac{15}{8}e^2\cos(2\varpi-\theta-\theta')\right\}.\end{array}\right.$$

En rapprochant de cette équation toutes les autres que nous avons obtenues dans ce paragraphe pour calculer les variations séculaires des élémens de l'orbite de la Lune, nous aurons les résultats suivans :

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{4}\cdot\frac{M'h^6}{\sigma^4 a'^3}\cdot\gamma'\sin(\theta-\theta'),$$

$$\frac{d\cdot h^2}{dv} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M'h^8}{\sigma^4 a'^3}\cdot\gamma\gamma'\sin(\theta-\theta'),$$

$$\frac{de}{e\cdot dv} = \frac{27}{8}\cdot\frac{M'h^6}{\sigma^4 a'^3}\cdot\gamma\gamma'\sin(\theta-\theta'),$$

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{M'h^6}{\sigma^4 a'^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{4}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2-\frac{3}{2}\gamma'^2+\frac{5}{2}e^2\right)+\frac{21}{8}\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta')\\ -\frac{15}{4}\varepsilon'^2\cos(2\varpi-2\tau')-\frac{15}{32}\gamma'^2\cos(2\varpi-2\theta')\end{array}\right\},$$

$$\frac{df}{dv} = -\frac{M'h^9}{\sigma^6 a'^3}\left\{1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2-\frac{3}{2}\gamma'^2+\frac{57}{8}e^2+\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{21}{8}\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta')\right\}.$$

177. Actuellement, si l'on compare les valeurs de $\frac{d\cdot h^2}{dv}$, $\frac{de}{e\cdot dv}$ avec celle de $\frac{d\gamma}{dv}$, il en résulte les équations

$$\frac{d\cdot h^2}{dv} = -2h^2\gamma\frac{d\gamma}{dv}, \qquad \frac{de}{e\cdot dv} = \frac{9}{2}\cdot\gamma\frac{d\gamma}{dv},$$

lesquelles étant intégrées donnent

$$Log\left(\frac{h^2}{h_i^2}\right) = \gamma_i^2-\gamma^2; \qquad Log\left(\frac{e}{e_i}\right) = \frac{9}{4}(\gamma^2-\gamma_i^2).$$

Donc, en passant des logarithmes aux nombres, et retenant seulement les deux premiers termes, il viendra

$$h^2 = h_i^2(1+\gamma_i^2-\gamma^2), \qquad e = e_i - \frac{9}{4}e_i(\gamma_i^2-\gamma^2).$$

La partie séculaire qui entre dans les deux variables h^2, e sera donc connue lorsque nous aurons déterminé celle qui se trouve dans l'expression de γ^2.

Ces expressions de h^2 et de e donnent

$$h^6 = h_i^6(1+3\gamma_i^2-3\gamma^2); \qquad h^9 = h_i^9\left(1+\frac{9}{2}\gamma_i^2-\frac{9}{2}\gamma^2\right); \qquad e^2 = e_i^2.$$

Donc, en substituant ces valeurs, et posant $\frac{M'h_i^6}{\sigma^4 a'^3} = \mathrm{m}^2$, l'on aura

$$\gamma\frac{d\theta}{dv} = \mathrm{m}^2\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{4}\gamma\left(1+3\gamma_i^2+5e_i^2+\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{3}{4}\gamma'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \\ +\frac{3}{4}\gamma'\left(1+3\gamma_i^2+5e_i^2+\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{7}{8}\gamma'^2-\gamma^2\right)\cos(\theta-\theta') \\ -\ \gamma\left\{\frac{3}{32}\gamma'^2\cos(2\theta-2\theta')+\frac{3}{4}\varepsilon'^2\cos(2\theta-2\tau')\right\} \\ +\ \gamma'\left\{\frac{3}{4}\varepsilon'^2\cos(\theta+\theta'-2\tau')-\frac{15}{8}e_i^2\cos(2\varpi-\theta-\theta')\right\} \end{array}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma'\sin(\theta-\theta'),$$

$$\frac{d\varpi}{dv} = \mathrm{m}^2\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2-\frac{3}{2}\gamma'^2+3\gamma_i^2-3\gamma^2+\frac{5}{2}e_i^2\right)+\frac{21}{8}\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta') \\ -\frac{15}{4}\varepsilon'^2\cos(2\varpi-2\tau')-\frac{15}{32}\gamma'^2\cos(2\varpi-2\theta') \end{array}\right\};$$

$$\frac{df}{dv} = -\frac{\mathrm{m}^2h_i^3}{\sigma^2}\left\{1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2-\frac{3}{2}\gamma'^2+\frac{57}{8}e_i^2+\frac{9}{2}\gamma_i^2+\frac{21}{8}\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta')\right\};$$

et la valeur de $t+f_i$ trouvée dans le n.° 173 deviendra

$$n(t+f_i) = v+\mathrm{m}^2\int dv\left(\frac{3}{2}\varepsilon'^2-\frac{3}{2}\gamma'^2-\frac{9}{8}\gamma^2\right)+\frac{21}{8}\mathrm{m}^2\int dv\cdot\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta').$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{n'}{n} = m$, et opérant comme dans le n.° 172, l'on en conclura que dans l'équation

$$v' = mv+\Lambda+2\varepsilon'\sin(mv+\Lambda-\tau')+\text{etc.}$$

l'on doit poser

$$\Lambda = n'(f'-f_i)+m\,\mathrm{m}^2\int dv\left(\frac{3}{2}\varepsilon'^2-\frac{3}{2}\gamma'^2-\frac{9}{8}\gamma^2\right)$$
$$+\frac{21}{8}m\,\mathrm{m}^2\int dv\cdot\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta').$$

La question est donc réduite à intégrer les deux équations qui déterminent les valeurs séculaires des variables γ et θ. Pour cela il est d'abord nécessaire de les transformer ainsi qu'il suit.

178. Nous avons vu dans le n.° 48 que l'on a

$$\gamma'^2 = \Sigma N^2 + 2\Sigma NN' \cos[(i'-i)t + \beta' - \beta],$$

$$\varepsilon'^2 = \Sigma M^2 + 2\Sigma MM' \cos[(\iota'-\iota)t + \varkappa' - \varkappa].$$

Donc, en substituant ces valeurs dans celle de $\gamma\frac{d\theta}{dv}$, et faisant pour plus de simplicité

$$G = \Sigma NN' \cos[(i'-i)t + \beta' - \beta],$$

$$H = \Sigma MM' \cos[(\iota'-\iota)t + \varkappa' - \varkappa],$$

$$B = 1 + 3\gamma_{,}^2 + 5e_{,}^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}\Sigma M^2 + \frac{3}{4}\Sigma N^2,$$

$$B' = B + \frac{1}{8}\Sigma N^2 - \frac{1}{2}\gamma^2,$$

$$U = -\gamma'\left\{\frac{5}{2}e_{,}^2 \cos(2\varpi - \theta') - \varepsilon'^2 \cos(\theta' - 2\tau')\right\},$$

$$U' = -\gamma'\left\{\frac{5}{2}e_{,}^2 \sin(2\varpi - \theta') + \varepsilon'^2 \sin(\theta' - 2\tau')\right\},$$

$$V = -\frac{1}{8}\gamma'^2 \cos 2\theta' - \varepsilon'^2 \cos 2\tau',$$

$$V' = -\frac{1}{8}\gamma'^2 \sin 2\theta' - \varepsilon'^2 \sin 2\tau',$$

$$X = U\cos\theta + U'\sin\theta + \gamma(V\cos 2\theta + V'\sin 2\theta),$$

nous aurons ces deux équations

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma'\sin(\theta - \theta'),$$

$$\gamma\frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left\{X - \gamma\left(B + 3H + \frac{3}{2}G\right) + \gamma'\left(B' + 3H + \frac{7}{4}G\right)\cos(\theta - \theta')\right\}.$$

Cela posé, si l'on fait

$$\gamma\sin\theta = p, \qquad \gamma\cos\theta = q,$$

l'on obtient en différentiant

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d\gamma}{dv}\sin\theta + \frac{d\theta}{dv}\gamma\cos\theta,$$

$$\frac{dq}{dv} = \frac{d\gamma}{dv}\cos\theta - \frac{d\theta}{dv}\gamma\sin\theta.$$

Donc, en substituant les valeurs précédentes de $\frac{d\gamma}{dv}$, $\gamma\frac{d\theta}{dv}$, et faisant pour plus de simplicité

$$K = B + 3H + \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}V,$$

$$Y = \frac{1}{2}U + \left(\frac{B'-1}{2} + \frac{3}{2}H + \frac{7}{8}G\right)\gamma'\cos\theta',$$

$$Y' = \frac{1}{2}U' + \left(\frac{B'-1}{2} + \frac{3}{2}H + \frac{7}{8}G\right)\gamma'\sin\theta',$$

$$P = (Y + \gamma'\cos\theta') + (Y\cos 2\theta + Y'\sin 2\theta) + \frac{\gamma}{2}(V\cos 3\theta + V'\sin 3\theta),$$

$$Q = (Y' + \gamma'\sin\theta') + (Y\sin 2\theta - Y'\cos 2\theta) + \frac{\gamma}{2}(V\sin 3\theta - V'\cos 3\theta),$$

il viendra

$$\frac{dp}{dv} + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 Kq - \frac{3}{8}\mathrm{m}^2 V' p = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 P,$$

$$\frac{dq}{dv} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2(K+V)p + \frac{3}{8}\mathrm{m}^2 V' q = -\frac{3}{4}\mathrm{m}^2 Q.$$

179. Appliquons à ces deux équations la méthode d'intégration donnée par D'Alembert. En multipliant la seconde par un facteur x, et l'ajoutant ensuite à la première, l'on forme cette équation

$$\frac{dp}{dv} + x\frac{dq}{dv} + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left\{K(q-px) - Vpx - \frac{1}{2}V'(p-qx)\right\} = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2(P - Qx).$$

Actuellement, si l'on fait

$$z = p + qx,$$

il en résulte

$$p = z - qx, \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dv} + x\frac{dq}{dv} = \frac{dz}{dv} - q\frac{dx}{dv}.$$

Donc, en substituant ces valeurs, nous aurons

$$\frac{dz}{dv} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left\{(K+V)x + \frac{1}{2}V'\right\}z - q\left\{\frac{dx}{dv} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 V'x - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left(K + (K+V)x^2\right)\right\}$$
$$= \frac{3}{4}\mathrm{m}^2(P - Qx).$$

Il suit de là qu'en déterminant le facteur arbitraire x de manière que l'on ait

$$o = \frac{dx}{dv} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \left\{ K + V'x + (K + V)x^2 \right\},$$

l'on pourra déterminer z en intégrant l'équation

$$\frac{dz}{dv} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \left\{ (K + V)x + \frac{1}{2}V' \right\} z = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2(P - Qx);$$

de sorte que, si l'on fait pour plus de simplicité

$$R = (K + V)x + \frac{1}{2}V',$$

l'on a

$$z = e^{\frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \int R dv} \left\{ C + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \int dv\, (P - Qx) e^{-\frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \int R dv} \right\},$$

où C désigne une constante arbitraire, et e la base des logarithmes hyperboliques.

Remarquons maintenant qu'en posant l'équation

$$K + V'x + (K + V)x^2 = o,$$

l'on en tire

$$x = -\frac{V'}{2(K + V)} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{K + V} - \frac{V'^2}{4(K + V)^2}\right)} \sqrt{-1}.$$

Or, en différentiant cette expression, l'on obtient pour $\frac{dx}{dv}$ une quantité de la forme $A'\frac{dV'}{dv} + A''\frac{dK}{dv} + A'''\frac{dV}{dv}$; de sorte que, au lieu d'avoir l'équation

$$o = \frac{dx}{dv} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \left\{ K + V'x + (K + V)x^2 \right\},$$

l'on aurait

$$o = A'''\frac{dV}{dv} + A''\frac{dK}{dv} + A'''\frac{dV}{dv},$$

ce qui n'est pas vrai à la rigueur. Mais, si l'on fait attention que les fonctions séculaires désignées par V, V', K acquièrent des facteurs très-petits par la différentiation, l'on accordera sans peine que l'on peut regarder comme suffisamment exacte la valeur précédente de x.

180. Cela posé, si l'on fait pour plus de simplicité,

$$a' = \frac{-V'}{2(K + V)}, \qquad b' = \sqrt{\left(\frac{K}{K + V} - a'^2\right)},$$

nous aurons, en distinguant les deux valeurs de x,

$$x' = a' + b'\sqrt{-1}\,, \qquad x'' = a' - b'\sqrt{-1}:$$

En nommant z', z'' les deux valeurs correspondantes de z et faisant pour plus de simplicité

$$\varphi = \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\int(K + V)b'dv,$$

on aura

$$z' = e^{\varphi\sqrt{-1}}\left\{C' + \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\int(P - Qa' - Qb'\sqrt{-1})e^{-\varphi\sqrt{-1}}dv\right\},$$

$$z'' = e^{-\varphi\sqrt{-1}}\left\{C'' + \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\int(P - Qa' + Qb'\sqrt{-1})e^{\varphi\sqrt{-1}}dv\right\}.$$

Donc, en remplaçant l'exponentielle $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ par la fonction équivalente $\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$, et posant pour abréger

$$R' = (P - Qa')\cos\varphi - Qb'\sin\varphi\,,$$

$$R'' = (P - Qa')\sin\varphi + Qb'\cos\varphi\,,$$

il viendra

$$z' = C'(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\cos\varphi\int R'dv + \sin\varphi\int R''dv\right\}$$

$$- \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\sqrt{-1}\left\{\cos\varphi\int R''dv - \sin\varphi\int R'dv\right\};$$

$$z'' = C''(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\cos\varphi\int R'dv + \sin\varphi\int R''dv\right\}$$

$$+ \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\sqrt{-1}\left\{\cos\varphi\int R''dv - \sin\varphi\int R'dv\right\}.$$

Pour tirer de ces deux expressions les valeurs cherchées des fonctions p et q, il suffit d'observer qu'en vertu de l'équation $z = p + qx$ nous avons les deux équations

$$z' = p + q(a' + b'\sqrt{-1})\,, \qquad z'' = p + q(a' - b'\sqrt{-1})\,,$$

lesquelles donnent

$$p = \frac{1}{2}(z' + z'') - \frac{a'(z' - z'')}{2b'\sqrt{-1}}\,; \qquad q = \frac{z' - z''}{2b'\sqrt{-1}}\,;$$

et par conséquent

$$p = \left\{\frac{C' + C''}{2} - \frac{a'(C' - C'')}{2b'\sqrt{-1}}\right\} \cos\varphi + \left\{\frac{(C' - C'')\sqrt{-1}}{2} - \frac{a'(C' + C'')}{2b'}\right\} \sin\varphi$$

$$+ \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\cos\varphi\int R'dv + \sin\varphi\int R''dv\right\} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 a'}{b'}\left\{\cos\varphi\int R''dv - \sin\varphi\int R'dv\right\};$$

$$q = \frac{(C' - C'')}{2b'\sqrt{-1}}\cos\varphi + \frac{(C' + C'')}{2b'}\sin\varphi - \frac{3}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{b'}\left\{\cos\varphi\int R''dv - \sin\varphi\int R'dv\right\}.$$

Actuellement, si l'on change la forme des constantes arbitraires C' et C'', en posant

$$\frac{C' - C''}{2\sqrt{-1}} = \gamma_{,}\cos\theta_{,}\,; \qquad \frac{C' + C''}{2} = \gamma_{,}\sin\theta_{,}\,,$$

il viendra

$$p = \gamma_{,}\sin(\theta_{,} - \varphi) - \frac{a'}{b'}\gamma_{,}\cos(\theta_{,} - \varphi)$$

$$+ \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\cos\varphi\int R'dv + \sin\varphi\int R''dv\right\} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 a'}{b'}\left\{\cos\varphi\int R''dv - \sin\varphi\int R'dv\right\};$$

$$b'q = \gamma_{,}\cos(\theta_{,} - \varphi) - \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\cos\varphi\int R''dv - \sin\varphi\int R'dv\right\}.$$

En substituant pour R', R'' leurs valeurs, l'on donnera à ces expressions de p et q la forme suivante :

$$b'q = \gamma_{,}\cos(\theta_{,} - \varphi) - \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\cos\varphi\int P'dv - \sin\varphi\int Q'dv\right\}$$

$$+ \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\cos\varphi\int a'Q\sin\varphi\,dv - \sin\varphi\int a'Q\cos\varphi\,dv\right\};$$

$$p = \gamma_{,}\sin(\theta_{,} - \varphi) - \frac{a'\gamma_{,}}{b'}\cos(\theta_{,} - \varphi)$$

$$+ \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\sin\varphi\int P'dv + \cos\varphi\int Q'dv\right\}$$

$$- \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\left\{\sin\varphi\int a'Q\sin\varphi\,dv + \cos\varphi\int a'Q\cos\varphi\,dv\right\}$$

$$- \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\frac{a'}{b'}\left\{\cos\varphi\int P'dv - \sin\varphi\int Q'dv\right\}$$

$$+ \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\frac{a'}{b'}\left\{\cos\varphi\int a'Q\sin\varphi\,dv - \sin\varphi\int a'Q\cos\varphi\,dv\right\};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$P' = P \sin\varphi + Q\, b' \cos\varphi\,; \qquad Q' = P \cos\varphi - Q\, b' \sin\varphi.$$

181. Observons maintenant que la quantité $a' = \frac{-V'}{2(K+V)}$ est par elle même très-petite, puisque le numérateur

$$V' = -\tfrac{1}{8}\gamma'^2 \sin 2\theta' - \varepsilon'^2 \sin 2\tau',$$

et qu'en outre la quantité K est très-peu différente de l'unité. L'on peut en conséquence négliger d'abord le carré de a', ce qui réduit l'équation

$$b' = \sqrt{\left(\frac{K}{K+V} - a'^2\right)} \quad \text{à} \quad b' = \sqrt{\left(\frac{K}{K+V}\right)}, \quad \text{et donne}$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \int (K+V) b' dv = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \int dv \sqrt{K(K+V)}.$$

Donc, en substituant pour K sa valeur (Voyez n.° 178) et faisant pour plus de simplicité

$$A = B + 3H + \frac{3}{2}G,$$

nous aurons

$$\varphi = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \int dv \sqrt{(A - \tfrac{1}{2}V)\,(A + \tfrac{1}{2}V)}.$$

Il suit de là qu'en négligeant la quantité du quatrième ordre donnée par le carré de la fonction

$$V = -\tfrac{1}{8}\gamma'^2 \cos 2\theta' - \varepsilon'^2 \cos 2\tau',$$

l'on a $\varphi = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \int A dv$, ou bien

$$\varphi = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 \int (B + 3H + \tfrac{3}{2}G)\, dv;$$

et en substituant pour B sa valeur, nous aurons

$$\varphi = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2 (1 + 3\gamma_{\prime}^2 + 5e_{\prime}^2 + \tfrac{3}{2}\Sigma M^2 + \tfrac{3}{4}\Sigma N^2) v$$
$$- \frac{3}{8}\mathrm{m}^2 \int \gamma^2 dv + \frac{9}{8}\mathrm{m}^2 \int (2H + G)\, dv.$$

Au reste il est clair qu'en imaginant développée ultérieurement l'équation

$$\gamma \frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{4}m^2 \left\{ X - \gamma(B + 3H + \frac{3}{2}G) + \gamma'(B' + 3H + \frac{7}{4}G)\cos(\theta - \theta') \right\},$$

l'on trouverait dans la partie constante du coefficient $\frac{3}{4}m^2(B + 3H + \frac{3}{2}G)$ la quantité qui a été désignée par $g - 1$ dans le n.° 80: ainsi rien n'empêche de poser

$$\phi = (g - 1)v - \frac{3}{8}m^2\int\gamma^2 dv + \frac{9}{8}m^2\int(G + 2H)dv.$$

Alors toute la partie proportionnelle à v qui doit entrer dans l'expression de ϕ sera censée comprise dans le terme $(g - 1)v$, et il faudra avoir seulement égard à la quantité périodique et séculaire qui naît des termes affectés du signe intégral.

182. Cela posé, si l'on suppose $\theta = (1 - g)v = -\frac{3}{4}m^2 v +$ etc. dans les fonctions désignées par P et Q, on comprendra que ces fonctions renfermant l'arc 2θ et l'arc 3θ, il est impossible d'avoir dans les produits

$$P \begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} \phi, \quad Q \begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} \phi$$

des termes périodiques dont l'argument ne soit pas associé avec un multiple de l'arc $\frac{3}{4}m^2 v$. Mais les intégrations qu'il faut exécuter pour avoir les valeurs de p, q ne peuvent donner que des diviseurs de la forme

$$\frac{d\varpi}{dv} + l\frac{dt}{dv} = \frac{d\varpi}{dv} + \frac{l}{n},$$

dans lesquels la quantité $\frac{l}{n}$ est excessivement petite par rapport à $\frac{d\varpi}{dv} = \frac{3}{4}m^2 +$ etc., puisqu'elle est formée par une combinaison linéaire des argumens i ou ι qui entrent dans les fonctions $\gamma'\cos\theta', \gamma'\sin\theta', \varepsilon'\cos\tau', \varepsilon'\sin\tau'$. Donc on peut, sans crainte d'erreur sensible, réduire tous les diviseurs $\frac{d\varpi}{dv} + l\frac{dt}{dv}$ à la quantité $\frac{d\varpi}{dv}$; ce qui démontre que l'intégration dont il est ici question n'est pas de nature à produire une augmentation d'un ordre supérieur à celle qui résulte du diviseur $\frac{3}{4}m^2$.

D'après ces considérations on peut simplifier les valeurs de p et q trouvées dans le numéro précédent en y faisant $b' = 1$ et en supprimant tous les termes multipliés par a', lesquels sont nécessairement beaucoup plus petits que les autres termes qui n'ont pas ce facteur; on obtient par-là

$$p = \gamma_{\prime} sin(\theta_{\prime} - \varphi) + \frac{3}{4} m^2 \left\{ sin\, \varphi \int P' dv + cos\, \varphi \int Q' dv \right\},$$

$$q = \gamma_{\prime} cos(\theta_{\prime} - \varphi) - \frac{3}{4} m^2 \left\{ cos\, \varphi \int P' dv - sin\, \varphi \int Q' dv \right\}.$$

183. Il suffit maintenant de jeter un coup d'œil sur la forme des fonctions P, Q posées dans le n.° 178 pour voir qu'on obtiendra la partie principale de ces expressions de p, q en faisant

$$P = \gamma' cos\, \theta' = \Sigma N cos(it + \beta)\,; \qquad Q = \gamma' sin\, \theta' = \Sigma N sin(it + \beta)\,;$$

et par conséquent

$$\int P' dv = \int dv \Sigma N sin(\varphi + it + \beta) = - \Sigma \frac{N cos(\varphi + it + \beta)}{\frac{d\varphi}{dv} + i \frac{dt}{dv}},$$

$$\int Q' dv = \int dv \Sigma N cos(\varphi + it + \beta) = \Sigma \frac{N sin(\varphi + it + \beta)}{\frac{d\varphi}{dv} + i \frac{dt}{dv}}.$$

Donc, en profitant de la circonstance que la quantité $i \frac{dt}{dv} = \frac{i}{n}$ est très-petite par rapport à $\frac{d\varphi}{dv}$, on en conclura qu'on a

$$\frac{d\varphi}{dv} \int P' dv = - \Sigma N cos(\varphi + it + \beta),$$

$$\frac{d\varphi}{dv} \int Q' dv = \Sigma N sin(\varphi + it + \beta);$$

et en remarquant qu'il suffit ici de prendre $\frac{d\varphi}{dv} = \frac{3}{4} m^2$, nous aurons enfin

$$p = \gamma_{\prime} sin(\theta_{\prime} - \varphi) + \Sigma N sin(it + \beta),$$

$$q = \gamma_{\prime} cos(\theta_{\prime} - \varphi) + \Sigma N cos(it + \beta).$$

Afin de prévenir une objection qu'on pourrait faire en examinant de près l'analyse qui nous a conduit à ces deux dernières formules, il

importe de remarquer que, dans le fond, elles sont indépendantes des termes du troisième ordre qui entrent dans les fonctions désignées par P et Q (Voyez n.° 178); de sorte que l'on aurait obtenu le même résultat en supprimant d'abord la fonction du troisième ordre

$$\frac{3}{4}\mathrm{m}^2X + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left\{B' - 1 + 3H + \frac{7}{4}G\right\}\gamma' cos(\theta - \theta'),$$

qu'on voit dans l'expression de $\gamma\frac{d\theta}{dv}$ rapportée dans le n.° 178. Et il est aisé de voir que, par des considérations analogues, on serait parvenu aux mêmes expressions de p et q, en ayant égard aux termes du troisième ordre qui font partie du second membre de l'équation

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma' sin(\theta - \theta').$$

D'après cela, si l'on objectait que pour former les équations différentielles en p et q, à l'aide des équations

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d\gamma}{dv} sin\,\theta + \gamma\frac{d\theta}{dv} cos\,\theta,$$

$$\frac{dq}{dv} = \frac{d\gamma}{dv} cos\,\theta - \gamma\frac{d\theta}{dv} sin\,\theta,$$

on ne peut, à la rigueur, avoir égard aux termes du troisième ordre qui entrent dans la valeur de $\gamma\frac{d\theta}{dv}$ sans considérer en même tems les termes du même ordre qui se trouvent dans celle de $\frac{d\gamma}{dv}$, on ferait tomber l'objection en faisant observer que l'uniformité du calcul dans la recherche des coefficiens différentiels des élémens nous a déterminé à nous arrêter pour tous au second ordre; mais qu'en tenant compte des termes du troisième ordre qui entrent dans la valeur de $\frac{d\gamma}{dv}$, on aurait rendu les formules primitives plus compliquées, sans rien ajouter à la partie principale des fonctions p et q qu'il s'agissait ici de déterminer.

184. Analysons maintenant les conséquences qui dérivent des deux valeurs précédentes de p et q. Puisque $p = \gamma\,sin\,\theta$, $q = \gamma\,cos\,\theta$, il est d'abord évident que l'on a $p^2 + q^2 = \gamma^2$, et par conséquent

$$\gamma^2 = \gamma_{\prime}^2 + \Sigma N^2 + 2G + 2\gamma_{\prime}\Sigma N\,cos(\theta_{\prime} - \varphi - it - \beta).$$

Donc, en substituant cette valeur de γ^2 dans l'équation

$$\varphi = (g - 1)v - \frac{3}{8}m^2\int\gamma^2 dv + \frac{9}{8}m^2\int(G + 2H)dv$$

trouvée dans le n.° 181, et supprimant la partie proportionnelle à v; $\frac{3}{8}m^2(\gamma_{,}^2 + \Sigma N^2)v$, il viendra

$$\varphi = (g - 1)v + \frac{9}{4}m^2\int Hdv + \frac{3}{8}m^2\int Gdv$$

$$+ \frac{3}{4}m^2\gamma_{,}\Sigma\frac{N\sin(\theta_{,} - \varphi - it - \beta)}{\frac{d\varphi}{dv} + \frac{idt}{dv}};$$

et en faisant, comme précédemment, $\frac{d\varphi}{dv} + i\frac{dt}{dv} = \frac{3}{4}m^2$, nous aurons

$$\varphi = (g - 1)v + \frac{9}{4}m^2\int Hdv + \frac{3}{8}m^2\int Gdv + \gamma_{,}\Sigma N\sin(\theta_{,} - \varphi - it - \beta).$$

Mais d'après le théorème de Lagrange l'on sait que toute équation de la forme

$$\varphi = a + \gamma_{,}\Sigma N\sin(b - \varphi)$$

donne

$$\varphi = a + \gamma_{,}\Sigma N\sin(b - a) + \frac{\gamma_{,}^2}{2}\cdot\frac{d[\Sigma N\sin(b - a)]^2}{da} + \text{ecc.}$$

Donc, en négligeant les très-petits termes multipliés par $\gamma_{,}^2$, $\gamma_{,}^3$ etc., nous aurons

$$\varphi = (g - 1)v + \frac{9}{4}m^2\int Hdv + \frac{3}{8}m^2\int Gdv$$

$$+ \gamma_{,}\Sigma N\sin\left\{\theta_{,} - (g - 1)v - it - \beta - \frac{9}{4}m^2\int Hdv - \frac{3}{8}m^2\int Gdv\right\}.$$

Telle est la valeur de φ qu'il faudra regarder comme substituée dans les équations

$$\gamma\sin\theta = \gamma_{,}\sin(\theta_{,} - \varphi) + \Sigma N\sin(it + \beta),$$

$$\gamma\cos\theta = \gamma_{,}\cos(\theta_{,} - \varphi) + \Sigma N\cos(it + \beta),$$

$$\gamma^2 = \gamma_{,}^2 + \Sigma N^2 + 2G + 2\gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \varphi - it - \beta).$$

185. Reprenons l'équation

$$n(t + f_{,}) = v + m^2\int dv\left(\frac{3}{2}\varepsilon'^2 - \frac{3}{2}\gamma'^2 - \frac{9}{8}\gamma^2\right) + \frac{21}{8}m^2\int dv\,\gamma\gamma'\cos(\theta - \theta')$$

trouvée dans le n.° 177, et remarquons que l'on a

$$\Sigma N \sin(it + \beta) = \gamma' \sin\theta', \qquad \Sigma N \cos(it + \beta) = \gamma' \cos\theta',$$

et par conséquent

$$\gamma^2 = \gamma_{,}^2 + \gamma'^2 + 2\gamma_{,}\Sigma N \cos(\theta_{,} - \varphi - it - \beta),$$

$$\gamma\gamma' \cos(\theta - \theta') = \gamma'^2 + \gamma_{,}\Sigma N \cos(\theta_{,} - \varphi - it - \beta).$$

Donc, en substituant ces valeurs dans celle de $n(t + f_{,})$, et supprimant les termes proportionnels à v multipliés par la quantité constante $\mathrm{m}^2\gamma_{,}^2$, il viendra

$$n(t + f_{,}) = v + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2\int \varepsilon'^2 dv + \left(-\frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{21}{8}\right)\mathrm{m}^2\int \gamma'^2 dv$$

$$+ \left(3 - \frac{7}{2}\right)\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma_{,}\Sigma \frac{N \sin(\theta_{,} - \varphi - it - \beta)}{\frac{d\varphi}{dv} + \frac{idt}{dv}};$$

ou bien

$$n(t + f_{,}) = v + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2\int \varepsilon'^2 dv + 0\,\mathrm{m}^2\int \gamma'^2 dv - \frac{1}{2}\gamma_{,}\Sigma N \sin(\theta_{,} - \varphi - it - \beta);$$

et en faisant, comme dans le n.° 178, $\varepsilon'^2 = \Sigma M^2 + 2H$, nous aurons

$$n(t + f_{,}) = v + 3\mathrm{m}^2\int H dv - \frac{1}{2}\gamma_{,}\Sigma N \sin(\theta_{,} - \varphi - it - \beta).$$

Il est démontré par là que la totalité des termes qui sembleroient devoir produire une équation séculaire de la forme $A\,\mathrm{m}^2\int \gamma'^2 dv$, et par conséquent dépendante de la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique *se détruit exactement.*

Ainsi la longitude moyenne de la Lune exprimée par sa longitude vraie, *mesurée sur une écliptique fixe*, renferme deux équations séculaires seulement. La première dépend de l'intégrale de la variation séculaire du carré de l'excentricité du Soleil; la seconde (absolument insensible en vertu de la petitesse des coefficiens représentés par $\gamma_{,}N$) est composée de termes ayant une période excessivement plus courte, car la période des arcs

$$\theta_{,} - \varphi - it - \beta = \theta_{,} - (1 - g)v - it - \beta - \text{etc.}$$

diffère fort peu de celle du nœud de l'orbite de la Lune.

186. Au reste il n'est pas difficile de démontrer que l'équation séculaire $-\frac{1}{2}\gamma_{,}\Sigma N \sin(\theta_{,} - \varphi - it - \beta)$ *disparaît* dans l'expression de la longitude de la Lune mesurée sur l'écliptique vraie.

Nommons $v_{,}$ la longitude de la Lune sur l'écliptique vraie, comptée depuis un point équinoxial fixe ; et soit $i_{,}$ l'angle dont la tangente est γ', c'est-à-dire l'angle formé par l'écliptique vraie avec l'écliptique fixe. Il est clair que $v_{,} - \theta'$ et $v - \theta'$ expriment les distances au nœud formé par l'intersection de ces deux plans. Donc, en désignant par S la tangente de la latitude de la Lune par rapport à l'écliptique vraie, l'on aura, d'après les formules connues pour déterminer les ascensions droites et les déclinaisons par les longitudes et les latitudes,

$$\operatorname{tang}(v_{,} - \theta_{,}) = \frac{s \sin i_{,} + \cos i_{,} \sin(v - \theta')}{\cos(v - \theta')},$$

$$\frac{S}{\sqrt{(1 + SS)}} = \frac{s \cos i_{,} - \sin i_{,} \sin(v - \theta')}{\sqrt{(1 + ss)}}.$$

La première de ces deux équations donne

$$\operatorname{tang}(v_{,} - \theta') - \operatorname{tang}(v - \theta') = \frac{s \sin i_{,}}{\cos(v - \theta')} - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i_{,} \operatorname{tang}(v - \theta'),$$

ou bien

$$\sin(v_{,} - v) = s \sin i_{,} \cos(v_{,} - \theta') - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i_{,} \sin(v - \theta') \operatorname{tang}(v_{,} - \theta').$$

La petitesse des facteurs qui entrent dans le second membre de cette équation permet d'y faire $v_{,} = v$; et alors on a

$$\sin(v_{,} - v) = s \sin i_{,} \cos(v - \theta') - \sin^2 \tfrac{1}{2} i_{,} \sin(2v - 2\theta') ;$$

d'où l'on conclut, en négligeant le cube de $\sin i_{,}$,

$$v_{,} = v + s \sin i_{,} \cos(v - \theta') - \sin^2 \tfrac{1}{2} i_{,} \sin(2v - 2\theta') ;$$

et en faisant $\sin i_{,} = \operatorname{tang} i_{,} = \gamma'$; $\sin^2 \frac{1}{2} i_{,} = \frac{1}{4}\gamma'^2$, non aurons

$$v_{,} = v + s\gamma' \cos(v - \theta') - \tfrac{1}{4}\gamma'^2 \sin(2v - 2\theta').$$

Mais

$$\gamma' \cos(v - \theta') = \cos v \, \Sigma N \cos(it + \beta) + \sin v \, \Sigma N \sin(it + \beta),$$

ou bien

$$\gamma' \cos(v - \theta') = \Sigma N \cos(v - it - \beta) ;$$

partant on a

$$v_{,} = v + s\Sigma N cos(v - it - \beta) - \tfrac{1}{4}\gamma'^{2} sin(2v - 2\theta').$$

Cela posé, si l'on observe qu'en substituant dans l'équation

$$s = sin\, v \cdot \gamma\, cos\, \theta - cos\, v \cdot \gamma\, sin\, \theta$$

les valeurs de $\gamma\, sin\, \theta$, $\gamma\, cos\, \theta$ trouvées dans le n.° 184, on obtient

$$s = \gamma_{,} sin(v - \theta_{,} + \phi) + \Sigma N sin(v - it - \beta),$$

on en conclura qu'en négligeant les termes de l'ordre de γ'^{2} l'on a

$$v_{,} = v - \tfrac{1}{2}\gamma_{,}\Sigma N sin(\theta_{,} - \phi - it - \beta)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\gamma_{,}\Sigma N sin(2v - \theta_{,} + \phi - it - \beta).$$

Donc, en négligeant la partie périodique et insensible représentée par $\frac{1}{2}\gamma_{,}\Sigma N sin(2v - \theta_{,} + \phi - it - \beta)$, et rapprochant cette équation de celle qui détermine la valeur séculaire de $n(t + f_{,})$, il viendra

$$n(t + f_{,}) = v_{,} + 3m^2 \int H dv + \tfrac{15}{2} m^2 \int G\, dv,$$

ce qui est conforme à la proposition énoncée au commencement de ce n.°

187. En continuant de considérer le mouvement de la Lune par rapport à l'écliptique vraie l'on en tire une autre conséquence digne de remarque. Voici en quoi elle consiste.

Nommons I l'angle qui mesure à chaque instant l'inclinaison du plan de l'orbite de la Lune avec l'écliptique vraie. En imaginant le triangle sphérique formé par ces deux plans et le plan fixe, et posant pour un moment $\gamma = tang\, \alpha$, l'on a l'équation

$$cos\, I = cos\, \alpha\, cos\, i_{,} + sin\, \alpha\, sin\, i_{,} cos(\theta - \theta'),$$

laquelle, en se rappelant que $tang\, i_{,} = \gamma'$, donne

$$cos\, I = \frac{1 + \gamma\gamma' cos(\theta - \theta')}{\sqrt{[(1 + \gamma^2)(1 + \gamma'^2)]}}.$$

Donc, en y substituant pour $\gamma\gamma' cos(\theta - \theta')$ la valeur trouvée dans le n.° 186, nous aurons

$$\cos I = \frac{1 + \gamma'^2 + \gamma_{,}\Sigma N \cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta)}{\sqrt{[(1+\gamma^2)(1+\gamma'^2)]}}:$$

développant le radical et négligeant les quantités d'un ordre supérieur au quatrième, nous aurons

$$\cos I = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \tfrac{1}{2}\gamma'^2 + \gamma_{,}\left(1 - \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\gamma'^2\right)\Sigma N \cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta)$$
$$+ \frac{3}{8}\gamma^4 - \frac{1}{8}\gamma'^4 - \frac{1}{4}\gamma^2\gamma'^2.$$

Mais nous avons vu dans le n.° 184 qu'on a

$$\gamma^2 = \gamma_{,}^2 + \gamma'^2 + 2\gamma_{,}\Sigma N \cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta);$$

donc, en substituant cette valeur, il viendra

$$\cos I = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma_{,}^2 - \tfrac{1}{2}\gamma_{,}(\gamma^2 + \gamma'^2)\Sigma N \cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta)$$
$$+ \frac{3}{8}\gamma^4 - \frac{1}{8}\gamma'^4 - \frac{1}{4}\gamma^2\gamma'^2,$$

et en négligeant les quantités qui passent le second ordre

$$\cos I = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma_{,}^2 + \tfrac{1}{2}\gamma_{,}^2\left\{\Sigma N \cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta)\right\}^2;$$

d'où l'on conclut

$$\text{tang}^2 I = \gamma_{,}^2 - \gamma_{,}^2\left\{\Sigma N \cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta)\right\}^2.$$

En comparant cette expression de $\text{tang}^2 I$ avec la précédente de $\text{tang}^2\alpha = \gamma^2$, on voit que le terme séculaire γ'^2 n'entre pas dans la valeur de $\text{tang}^2 I$, et que même la partie variable

$$-\gamma_{,}^2\left\{\Sigma N \cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta)\right\}^2$$

est beaucoup plus petite que la partie correspondante

$$2\gamma_{,}\Sigma N \cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta),$$

renfermée dans γ^2. De sorte que l'on peut considérer l'angle I comme une quantité sensiblement constante, et établir l'équation $\text{tang}^2 I = \gamma_{,}^2$; ou bien en conclure qu'en vertu des valeurs de γ^2 et $\gamma\gamma' \cos(\theta - \theta')$ trouvées dans le n.° 185, on a l'équation

$$\text{tang}^2 I = (\gamma \cos\theta - \gamma' \cos\theta')^2 + (\gamma \sin\theta - \gamma' \sin\theta')^2.$$

Tel est le véritable fondement sur lequel repose cette vérité confirmée par l'observation, savoir, que l'inclinaison moyenne de l'orbite vraie de la Lune à l'égard de l'écliptique vraie demeure invariable. Ce théoréme est analogue à celui qui a lieu lorsqu'on considère l'action réciproque de deux planètes seulement; mais il importe d'observer que c'est en vertu d'une cause bien différente. Car l'action réciproque du Soleil et de la Lune n'entre pour rien ici, où l'invariabilité d'inclinaison dont il est question dépend entièrement de l'action que les planètes exercent sur la Terre, et de la réaction qui en résulte sur l'orbite de la Lune.

188. C'est en vertu de la même proposition que la latitude *vraie* de la Lune est indépendante du mouvement séculaire du plan de l'écliptique. En effet l'équation

$$\frac{S}{\sqrt{(1+SS)}} = \frac{s\cos i_{,} - \sin i_{,} \sin(v-\theta')}{\sqrt{(1+ss)}}$$

(Voyez n.° 183) donne, en négligeant les termes multipliés par γ'^2,

$$\frac{S}{\sqrt{(1+SS)}} = \frac{s - \Sigma N \sin(v - it - \beta)}{\sqrt{(1+ss)}};$$

mais nous avons vu dans le même numéro que l'on a

$$S = \gamma_{,} \sin(v - \theta_{,} + \varphi) + \Sigma N \sin(v - it - \beta);$$

partant

$$\frac{S}{\sqrt{(1+SS)}} = \frac{\gamma_{,} \sin(v - \theta_{,} + \varphi)}{\sqrt{(1+ss)}};$$

d'où l'on tire

$$S = \gamma_{,} \sin(v - \theta_{,} + \varphi) - \tfrac{1}{2}\gamma_{,}^2 \Sigma N \sin(v - it - \beta).$$

Le second terme de cette expression est insensible.

189. Reprenons actuellement l'expression de $\frac{d\varpi}{dv}$ trouvée dans le n.° 177. En y substituant au lieu de γ^2 et $\gamma\gamma'\cos(\theta-\theta')$ leurs valeurs données dans le n.° 185, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{d\varpi}{dv} = \;& \tfrac{3}{4}\mathrm{m}^2\left(1 + \tfrac{3}{2}\varepsilon'^2 + \left(-\tfrac{3}{2} - 3 + \tfrac{7}{2}\right)\gamma'^2 + (3-3)\gamma_{,}^2 + \tfrac{5}{2}e_{,}^2\right) \\ & + \left(\tfrac{21}{8} - \tfrac{9}{2}\right)\mathrm{m}^2\gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \varphi - it - \beta) \\ & - \tfrac{15}{4}\mathrm{m}^2\varepsilon'^2\cos(2\varpi - 2\tau') - \tfrac{15}{32}\mathrm{m}^2\gamma'^2\cos(2\varpi - 2\theta');\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{3}{4}m^2\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 - \gamma'^2 + \frac{5}{2}e_i^2\right) - \frac{15}{8}m^2\gamma_i \Sigma N\cos(\theta_i - \phi - it - \beta)$$
$$- \frac{15}{4}m^2\varepsilon'^2\cos(2\varpi - 2\tau') - \frac{15}{32}m^2\gamma'^2\cos(2\varpi - 2\theta').$$

Or, en imaginant cette équation développée ultérieurement, il est évident que la partie constante serait égale à celle désignée par $1 - c$ dans le n.° 80; donc en intégrant et remplaçant par $(1-c)v$ le terme proportionnel à v, l'on aura

$$\varpi = \varpi_i + (1-c)v + \frac{9}{8}m^2\int\varepsilon'^2 dv - \frac{3}{4}m^2\int\gamma'^2 dv + \frac{5}{2}\gamma_i\Sigma N\sin(\theta_i - \phi - it - \beta)$$
$$- \frac{15}{4}m^2\int\varepsilon'^2\cos(2\varpi - 2\tau')dv - \frac{15}{32}m^2\int\gamma'^2\cos(2\varpi - 2\theta')dv.$$

Cela posé, si l'on applique aux deux intégrales

$$-\frac{15}{4}m^2\int\varepsilon'^2\cos(2\varpi - 2\tau')dv, \qquad -\frac{15}{32}m^2\int\gamma'^2\cos(2\varpi - 2\theta')dv$$

un raisonnement analogue à celui qui a été exposé dans le n.° 182, l'on en conclura que tous les argumens donnés par les fonctions $\varepsilon'^2\cos(2\varpi - 2\tau')$, $\gamma'^2\cos(2\varpi - 2\theta')$ se trouvent associés avec l'arc $2(1-c)v = \frac{3}{2}m^2 v +$ etc., et qu'en conséquence il n'en peut résulter aucun terme sensible, même après l'évanouissement du facteur m^2 qui multiplie ces deux intégrales. D'après cela nous pouvons réduire l'expression précédente de ϖ à celle-ci

$$\varpi = \varpi_i + (1-c)v + \frac{9}{8}m^2\int\varepsilon'^2 dv - \frac{3}{4}m^2\int\gamma'^2 dv + \frac{5}{2}\gamma_i\Sigma N\sin(\theta_i - \phi - it - \beta).$$

Pour rapprocher de ce résultat celui qui se rapporte à la variable e, il suffit de substituer dans l'équation

$$e = e_i - \frac{9}{4}e_i(\gamma_i^2 - \gamma^2)$$

(Voyez n.° 177) la valeur de γ^2 trouvée dans le n.° 185; alors l'on obtient

$$e = e_i\left\{1 + \frac{9}{4}\gamma'^2 + \frac{9}{2}\gamma_i\Sigma N\cos(\theta_i - \phi - it - \beta)\right\}.$$

190. On voit par cette dernière formule que la constante arbitraire désignée par e renferme des termes séculaires, qui sont fonction des variations séculaires du plan de l'écliptique. La même propriété subsiste

aussi à l'égard de la constante correspondante ε, qui représente l'excentricité de l'orbite de la Lune mesurée sur son propre plan. Car, en réduisant à $\varepsilon = e\left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right)$ la valeur de ε donnée dans le n.° 127 et éliminant e au moyen de l'équation $e = e_{\prime}\left(1 - \frac{9}{4}\gamma_{\prime}^2 + \frac{9}{4}\gamma^2\right)$, on en tire $\varepsilon = e_{\prime}\left(1 - \frac{9}{4}\gamma_{\prime}^2 + \frac{7}{4}\gamma^2\right)$: donc, en remplaçant γ^2 par sa valeur trouvée dans le n.° 185, on aura

$$\varepsilon = e_{\prime}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\gamma_{\prime}^2 + \tfrac{7}{4}\gamma'^2 + \tfrac{7}{2}\gamma_{\prime}\Sigma N \cos(\theta_{\prime} - \varphi - it - \beta)\right\}.$$

Il est vrai que ces termes variables et séculaires qui entrent dans l'expression de e et ε, étant délivrés du signe intégral et de plus multipliés par la fraction $e_{\prime}$, sont physiquement insensibles dans les observations propres à déterminer l'excentricité de l'orbite de la Lune. Mais, sous le rapport de la théorie, il est très-important de remarquer qu'il faudrait recourir à des termes d'un ordre supérieur à ceux que nous avons considérés dans ce paragraphe pour voir naître dans l'expression analytique et séculaire de e des termes dépendans de l'excentricité du Soleil. Ainsi il résulte de notre analyse qu'il est impossible qu'il y ait dans la partie variable et séculaire de e ou de ε un terme *du quatrième ordre de la forme* $A\,\mathrm{m}^2\varepsilon'^2$.

191. Le grand axe α de l'orbite de la Lune jouit d'une propriété analogue. En effet les variations séculaires de cet élément doivent être déterminées d'après l'équation $\frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\sigma}{\alpha_{\prime}} - 2\int d'\Omega$ (Voyez n.° 64). Mais nous avons trouvé (n.os 171 et 177)

$$-\frac{2\alpha_{\prime}}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{M'\alpha_{\prime}h^4}{2\sigma^3\alpha'^3}\left(1 + \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \tfrac{3}{2}e^2\right); \quad h^2 = h_{\prime}^2(1 + \gamma_{\prime}^2 - \gamma^2);$$

partant il est clair qu'on a

$$-\frac{2\alpha_{\prime}}{\sigma}\int d'\Omega = -\frac{M'\alpha_{\prime}h^4}{2\sigma^3\alpha'^3}\left(1 + 2\gamma_{\prime}^2 - \tfrac{3}{2}\gamma^2 + \tfrac{3}{2}e^2\right);$$

et par conséquent

$$\frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\sigma}{\alpha_{\prime}} - \frac{\sigma\mathrm{m}^2}{2\alpha_{\prime}}\left(1 + 2\gamma_{\prime}^2 - \tfrac{3}{2}\gamma^2 + \tfrac{3}{2}e^2\right).$$

Il suit de là qu'en négligeant les termes multipliés par m^4, on a

$$\frac{a}{a_{\prime}} = 1 + \frac{m^2}{2}\left(1 + 2\gamma_{\prime}^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2\right).$$

Maintenant, si l'on néglige les quantités d'un orde supérieur au second qui multiplient m^2, on peut réduire e^2 à sa partie constante $e_{\prime}^2$. Alors, en substituant au lieu de γ^2 sa valeur trouvée dans le n.° 185, on aura

$$\frac{a}{a_{\prime}} = 1 + \frac{m^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\gamma_{\prime}^2 + \frac{3}{2}e_{\prime}^2\right) - \frac{3}{4}m^2\gamma'^2$$
$$- \frac{3}{2}m^2\gamma_{\prime}\Sigma N\cos(\theta_{\prime} - \varphi - it - \beta);$$

c'est-à-dire une expression où la partie séculaire est insensible, *mais indépendante d'un terme du quatrième ordre de la forme* $Am^2\varepsilon'^2$.

192. Cette dernière conséquence paraîtra au premier coup d'œil contraire au résultat trouvé par M. de Laplace dans la page 212 du troisième volume de la Mécanique céleste; où il est dit qu'en posant

$$u = \frac{1}{a}\left[1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + e(1 + e^2)\cos(cv - \varpi) + \text{etc.}\right]$$

on doit prendre pour la quantité représentée par a une expression telle qui renferme le terme séculaire du quatrième ordre $\frac{3}{4}\cdot\frac{m^2e'^2}{a_{\prime}}$; e' étant l'excentricité de l'orbite du Soleil.

Mais, pour la clarté des idées, il est essentiel de remarquer que la condition qui sert à déterminer dans la page citée la partie variable et séculaire de a, est fort différente de celle qui caractérise le demi-grand axe de l'orbite de la Lune, au moyen de l'équation

$$\frac{\sigma}{a} = \frac{\sigma}{a_{\prime}} - 2\int d'\Omega.$$

On sentira plus fortement la nécessité de cette distinction en réfléchissant que le terme principal $\frac{3}{2}m^2\int\varepsilon'^2dv$ de l'équation séculaire, qui, d'après notre analyse, résulte de la variation séculaire de l'*époque*, a dans la Mécanique céleste une origine telle qui, sans une connaissance intime du sujet, porte à attribuer son existence à une variation séculaire inhérente *au moyen mouvement.* En effet il est dit à la page 216 du volume cité que le terme $\frac{3}{2}m^2\int\varepsilon'^2dv$ naît de l'intégration du terme $\frac{a^2dv}{\sqrt{a_{\prime}}}$, en vertu de la fonction séculaire $-\frac{3}{4}\cdot\frac{m^2e'^2}{a_{\prime}}$.

renfermée dans la valeur de $\frac{1}{a}$. Or cela est sans doute exact, lorsqu'on a uniquement pour but d'intégrer les équations différentielles du second ordre et d'arriver à l'expression du tems en fonction de la longitude vraie de la Lune. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'une telle conception entraîne le mélange des variations séculaires appartenantes à différens élémens, et qu'on ne peut ensuite les séparer sans une analyse précise, qui n'ait en elle même rien de contraire aux formules propres à la détermination de la partie variable de chacun des élémens du mouvement elliptique.

Pour mieux prouver la justesse de ces réflexions, nous allons faire voir que le terme dépendant du carré de l'excentricité du Soleil, analogue à celui que M. de Laplace obtient dans sa valeur de a, dérive du développement de la fonction $e\cos(v-\varpi)$, en vertu de la combinaison des termes à courte période renfermés dans la partie variable de l'excentricité et du périgée de la Lune. Cela achèvera de démontrer que, analytiquement parlant, il y a, même dans la seule partie séculaire, une différence absolue entre la fonction qui représente le demi-grand axe de l'orbite de la Lune, et la fonction représentée par a dans la Mécanique céleste, et nommé plus expressement *demi-grand axe de l'orbite* dans la page 152 du second volume des Mémoires de l'Institut de France.

193. Réduisons les expressions de $\frac{de}{dv}$, $\frac{ed\varpi}{dv}$ données dans le n.° 68 à celles-ci

$$\frac{de}{dv}=-\frac{(1+\gamma^2)}{\sigma}\Omega_{(2)}\sin(v-\varpi)+\left\{\frac{3}{2}\gamma\cos(\varpi-\theta)+\frac{1}{2}\gamma\cos(2v-\theta-\varpi)\right\}\frac{\Omega_{(1)}}{h^2},$$

$$\frac{ed\varpi}{dv}=\frac{(1+\gamma^2)}{\sigma}\Omega_{(2)}\cos(v-\varpi)+\left\{-\frac{3}{2}\gamma\sin(\varpi-\theta)+\frac{1}{2}\gamma\sin(2v-\theta-\varpi)\right\}\frac{\Omega_{(1)}}{h^2}.$$

En faisant

$$\frac{\Omega_{(1)}}{h^2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{M'u'^3}{h^2u^4}s=-\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\gamma\sin(v-\theta),$$

on a d'abord

$$\frac{de}{dv}=-\frac{(1+\gamma^2)}{\sigma}\Omega_{(2)}\sin(v-\varpi)-\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma^2\sin(v-\varpi),$$

$$\frac{ed\varpi}{dv}=\frac{(1+\gamma^2)}{\sigma}\Omega_{(2)}\cos(v-\varpi)+\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma^2\cos(v-\varpi).$$

Maintenant, si l'on fait (Voyez n.° 169)

$$\Omega_{(2)} = -\frac{M'u'^3}{2u^3}\left\{1 - \frac{9}{2}s'^2 + 6 \cdot ss'\cos(v - v')\right\},$$

$$s'^2 = \frac{1}{2}\gamma'^2; \quad ss' = \frac{1}{2}\gamma\gamma'\cos(v - v' - \theta + \theta'),$$

il viendra

$$\Omega_{(2)} = -\frac{M'u'^3}{2u^3}\left\{1 - \frac{9}{4}\gamma'^2 + \frac{3}{2}\gamma\gamma'\cos(\theta - \theta')\right\}.$$

Mais, d'après les résultats trouvés dans les n.ºs 173 et 185, nous avons

$$\frac{M'u'^3}{u^3} = \frac{M'h^6}{\sigma^3\alpha'^3}\left(1 + 3e^2 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{3}{4}\gamma'^2 + \frac{9}{4}\gamma^2\right),$$

$$\gamma\gamma'\cos(\theta - \theta') = \gamma'^2 + \gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta);$$

partant

$$\Omega_{(2)} = -\frac{M'h^6}{2\sigma^3\alpha'^3}\left\{1 + 3e^2 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right)\gamma'^2\right\}$$
$$- \frac{3}{4}\cdot\frac{M'h^6}{\sigma^3\alpha'^3}\gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta).$$

Cela posé, si l'on substitue au lieu de h^6 sa valeur $h^6 = h_{,}^6(1 + 3\gamma_{,}^2 - 3\gamma^2)$, il viendra

$$\frac{(1+\gamma^2)}{\sigma}\Omega_{(2)} = -\frac{1}{2}\mathrm{m}^2\left(1 + 3e^2 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{1}{4}\gamma^2\right) - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2\gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta).$$

Il suit de là qu'on a

$$\frac{de}{dv} = \frac{1}{2}\mathrm{m}^2\left[1 + 3e^2 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 - \frac{5}{4}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta)\right]\sin(v - \varpi),$$

$$\frac{e\,d\varpi}{dv} = -\frac{1}{2}\mathrm{m}^2\left[1 + 3e^2 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 - \frac{5}{4}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta)\right]\cos(v - \varpi).$$

En éliminant γ^2 au moyen de l'équation

$$\gamma^2 = \gamma_{,}^2 + \gamma'^2 + 2\gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta),$$

et posant pour plus de simplicité

$$B = 1 + 3e^2 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 - \frac{5}{4}\gamma_{,}^2 - \frac{5}{4}\gamma'^2,$$

on obtient

$$\frac{de}{dv} = \frac{1}{2}\mathrm{m}^2 B\sin(v - \varpi) - \mathrm{m}^2\gamma_{,}\Sigma N\sin(v - \varpi - \phi - it + \theta_{,} - \beta)$$
$$- \mathrm{m}^2\gamma_{,}\Sigma N\sin(v - \varpi + \phi + it - \theta_{,} + \beta),$$

$$\frac{e\,d\varpi}{dv} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{m}^2 B\cos(v-\varpi) + \mathrm{m}^2\gamma_{,}\Sigma N\cos(v-\varpi-\varphi-it+\theta_{,}-\beta)$$
$$+ m^2\gamma_{,}\Sigma N\cos(v-\varpi+\varphi+it-\theta_{,}+\beta).$$

Actuellement, si l'on conçoit que dans le second membre de ces équations on ait substitué au lieu de ϖ la valeur donnée dans le n.° 189, on trouvera, en intégrant ces expressions conformément au théorême démontré dans le n.° 51,

$$\delta e = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 B}{1-\frac{d\varpi}{dv}}\cos\left\{v-\varpi+\left(1-\frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{dB}{B\cdot dv}\right\}$$
$$+\mathrm{m}^2\gamma_{,}\Sigma\frac{N\cos(v-\varpi-\varphi-it-\beta+\theta_{,})}{1-\frac{d\varpi}{dv}-\frac{d\varphi}{dv}-\frac{i\,dt}{dv}}$$
$$+\mathrm{m}^2\gamma_{,}\Sigma\frac{N\cos(v-\varpi+\varphi+it+\beta-\theta_{,})}{1-\frac{d\varpi}{dv}+\frac{d\varphi}{dv}+\frac{i\,dt}{dv}},$$

$$e\,\delta\varpi = -\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2 B}{1-\frac{d\varpi}{dv}}\sin\left\{v-\varpi+e\left(1-\frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{d\left(\frac{B}{e}\right)}{B\cdot dv}\right\}$$
$$+m^2\gamma_{,}\Sigma\frac{N\sin(v-\varpi-\varphi-it-\beta+\theta_{,})}{1-\frac{d\varpi}{dv}-\frac{d\varphi}{dv}-\frac{i\,dt}{dv}}$$
$$+m^2\gamma_{,}\Sigma\frac{N\sin(v-\varpi+\varphi+it+\beta-\theta_{,})}{1-\frac{d\varpi}{dv}+\frac{d\varphi}{dv}+\frac{i\,dt}{dv}}.$$

Cela posé, si avec ces valeurs on forme la fonction

$$\delta e\cos(v-\varpi)+e\,\delta\varpi\sin(v-\varpi),$$

qui représente la partie principale du développement du terme $e\cos(v-\varpi)$, on obtiendra

$$\delta e\cos(v-\varpi)+e\,\delta\varpi\sin(v-\varpi) =$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 B}{1-\frac{d\varpi}{dv}}\cos\left\{\left(1-\frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{dB}{B\cdot dv}\right\}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{m}^2 B}{1-\frac{d\varpi}{dv}}\cos\left\{e\left(1-\frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{d\left(\frac{B}{e}\right)}{B\cdot dv}\right\}$$

$$+ m^2\gamma_{,}\Sigma\frac{N\cos(\varphi+it+\beta-\theta_{,})}{1-\frac{d\varpi}{dv}-\frac{d\varphi}{dv}-\frac{idt}{dv}}+m^2\gamma_{,}\Sigma\frac{N\cos(\varphi+it+\beta-\theta_{,})}{1-\frac{d\varpi}{dv}+\frac{d\varphi}{dv}+\frac{idt}{dv}}.$$

L'expression de B posée plus haut donne

$$\frac{dB}{dv}=6e\frac{de}{dv}-\frac{5}{2}\gamma'\frac{d\gamma'}{dv}+3\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}.$$

Ainsi il est évident que les arcs exprimés par les fonctions

$$\left(1-\frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{dB}{B\cdot dv},\qquad e\left(1-\frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{d\left(\frac{B}{e}\right)}{dv}$$

sont réductibles à une suite de termes séculaires d'une petitesse excessive, et que par conséquent on peut ici supposer sans erreur sensible

$$\cos\left\{\left(1-\frac{d\varpi}{de}\right)\frac{dB}{B\cdot dv}\right\}=1\,;\qquad \cos\left\{e\left(1-\frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{d\left(\frac{B}{e}\right)}{B\cdot dv}\right\}=1.$$

Donc, en négligeant les très-petits termes compris sous le signe sommatoire Σ, il viendra

$$\delta e\cos(v-\varpi)+e\,\delta\varpi\sin(v-\varpi)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2B}{1-\frac{d\varpi}{dv}}.$$

La valeur de ϖ trouvée dans le n.° 189 donne

$$\frac{d\varpi}{dv}=(1-c)+\frac{9}{8}m^2\varepsilon'^2-\frac{3}{4}m^2\gamma'^2+\text{etc.}=\frac{3}{4}m^2+\text{etc.}$$

Donc, en substituant pour B sa valeur et négligeant les quantités d'un ordre supérieur au quatrième, on aura

$$\delta e\cos(v-\varpi)+e\,\delta\varpi\sin(v-\varpi)=-\frac{1}{2}m^2\left\{1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{3}{4}m^2+3e_{,}^2-\frac{5}{4}\gamma_{,}^2-\frac{5}{4}\gamma'^2\right\}.$$

Si l'on observe maintenant que l'équation $h^2=h_{,}^2(1+\gamma_{,}^2-\gamma^2)$ donne $h^2(1+\gamma^2)=h_{,}^2(1+\gamma_{,}^2+\gamma_{,}^2\gamma^2)$, on en conclura qu'en considérant seulement le terme principal de la partie constante et séculaire, on a

$$\frac{\sigma e\cos(v-\varpi)}{h^2(1+\gamma^2)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2\sigma}{h_{,}^2(1+\gamma_{,}^2)}\left\{1+\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{3}{4}m^2+3e_{,}^2-\frac{5}{4}\gamma_{,}^2-\frac{5}{4}\gamma'^2\right\}.$$

La seule inspection des valeurs générales de $\frac{dh^2}{dv}$, $\frac{d\gamma}{dv}$ suffit pour

démontrer qu'il est impossible d'obtenir dans cette même fonction d'autres termes semblables du quatrième ordre en ayant égard à la combinaison des termes à courte-période renfermés dans les expressions complètes de h^2 et γ^2.

Concluons de là que la valeur elliptique de u fournie par l'équation

$$u = \frac{\sigma}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\sqrt{1+ss} + e\cos(v-\varpi)\right\}$$

donne par son développement

$$u = \frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h^2(1+\gamma^2)} - \frac{\sigma m^2}{h_{\prime}^2}\left\{1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 - \frac{5}{4}\gamma'^2 + \frac{3}{4}m^2 + 3e_{\prime}^2 - \frac{5}{4}\gamma_{\prime}^2\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

et qu'en conséquence la valeur complète de u doit effectivement renfermer le terme séculaire $-\frac{3}{4}m^2\varepsilon'^2\frac{\sigma}{h_{\prime}^2}$; mais que ce terme ne saurait, par son origine, faire partie du demi-grand axe de l'orbite de la Lune.

Cependant, pour nous conformer à la division analytique des quantités, il faudra regarder comme terme principal de la valeur séculaire de u le terme du *second* ordre qui naît du développement de la fonction $\frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h^2(1+\gamma^2)}$.

En effet il est évident que l'on a

$$\frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h^2(1+\gamma^2)} = \frac{\sigma}{h_{\prime}^2}\left(1 - \gamma_{\prime}^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + \text{etc.}\right).$$

Donc, en substituant pour γ^2 sa valeur séculaire, et retenant seulement les quantités qui ne passent pas le second ordre, on aura

$$\frac{\sigma\sqrt{(1+ss)}}{h^2(1+\gamma^2)} = \frac{\sigma}{h_{\prime}^2}\left\{1 - \frac{3}{4}\gamma_{\prime}^2 + \frac{1}{4}\gamma'^2 + \frac{1}{2}\gamma_{\prime}\Sigma N\cos(\theta_{\prime} - \phi - it - \beta)\right\}.$$

Mais il est clair que cette dernière partie séculaire *disparaît* dans l'expression de la parallaxe de la Lune; puisque le *sinus* de cette coordonnée est proportionnel à la fonction

$$\frac{u}{\sqrt{(1+ss)}} = \frac{\sigma}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{1 + \frac{e\cos(v-\varpi)}{\sqrt{(1+ss)}}\right\}.$$

L'observation immédiate de la parallaxe de la Lune, même en la supposant susceptible du plus haut degré de précision, ne pourrait donc rien nous apprendre sur l'existence de ce terme séculaire du second ordre. En général l'observation des phénomènes donne des effets composés, et on ne peut déterminer les véritables lois qui les régissent qu'en étudiant les détails qui paraissent minutieux et sans importance réelle. Le seul phénomène sensible qui a signalé jusqu'à présent l'existence de la variable γ' dans le mouvement de la Lune est l'invariabilité de l'inclinaison de son orbite par rapport à l'écliptique vraie. Mais la théorie seule peut expliquer la véritable cause de cet effet, et faire voir les autres conséquences qui ont été développées dans ce paragraphe.

194. En continuant de considérer uniquement la valeur de u, on voit que si l'on ajoute la partie séculaire du second ordre avec l'autre du quatrième ordre trouvée dans le numéro précédent, on obtient le terme séculaire $\frac{\sigma}{h_i^2}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}m^2)\gamma'^2$. Mais il est essentiel d'observer que ce coefficient de γ'^2 ne peut être exact, du moins jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement. En effet l'intégration exécutée dans le n.° 183 pour obtenir les valeurs de $p = \gamma \sin\theta$ et $q = \gamma \cos\theta$ a abaissé de deux unités l'ordre des coefficiens. Ainsi, pour avoir avec précision le coefficient qui tient la place de $\frac{\sigma}{h_i^2}(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}m^2)$, il aurait fallu considérer les puissances supérieures de la force perturbatrice, afin d'obtenir une valeur séculaire de γ^2, où le cofficient de γ'^2 eût été exact jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement. Cette circonstance rend beaucoup plus difficile le calcul des termes séculaires multipliés par γ'^2 lorsqu'il s'agit de développer (au-delà du premier terme) des fonctions qui n'ont pas explicitement le facteur du second ordre m^2.

Si l'on voulait, par exemple, en s'appuyant directement sur l'équation

$$dt = \frac{dv}{u^2\sqrt{\left(h^2+2\int\frac{d\Omega}{u^2\,dv}\,dv\right)}},$$

démontrer le résultat trouvé dans le n.° 185, savoir que l'équation séculaire de la forme $A\mathrm{m}^2\int\gamma'^2 dv$ est absolument nulle dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune; il faudrait tenir compte dans la valeur de u^2 de tous les termes de la forme $(\beta + \beta' m + \beta'' m^2)\gamma'^2$, ce qui exigerait un calcul très-pénible.

Jusqu'à présent on a éludé cette difficulté en faisant $\gamma' = 0$ avant d'intégrer le second membre de l'équation précédente. Un tel artifice peut être toléré, lorsqu'on a démontré par d'autres moyens que le terme principal de l'équation séculaire due à la variation séculaire du plan de l'écliptique doit se réduire à zéro. Mais, en examinant de près la démonstration publiée par M. de Laplace, relativement à la destruction mutuelle des termes en question, on reconnaît que cette importante vérité n'a pas été établie avec la rigueur qu'on est en droit d'exiger sur un point aussi délicat de la théorie de la Lune.

195. C'est sur tout dans son premier Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune (Voyez le volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1786) que M. de Laplace a entrepris de résoudre directement cette difficulté. Il est entré dans des détails qui nous paraissent préférables à tout ce qu'on lit à ce sujet dans les deux pages 184 et 185 du troisième volume de la Mécanique céleste. Et nous ignorons pourquoi M. de Laplace n'a pas jugé à propos de reproduire cette démonstration dans ce dernier ouvrage, en y ajoutant les développemens nécessaires pour la mettre à l'abri de toute objection.

Quoiqu'il en soit, revenons au volume cité plus haut et remarquons que M. de Laplace est conduit (Voyez page 252) à calculer la partie séculaire renfermée dans l'intégrale correspondante à celle que nous désignons par $-2\int d'\Omega$. Nous avons examiné avec attention, si son résultat donnait les termes rapportés plus haut dans le n.° 191. Voyant que nous n'étions point d'accord sur ce point, nous en avons cherché la cause radicale, et voici a quoi tient cette discordance. M. de Laplace n'a pas remarqué,

1.° Qu'en formant directement la différentielle

$$d'\Omega = \frac{d\Omega}{dv}dv + \frac{d\Omega}{du}du + \frac{d\Omega}{ds}ds$$

au moyen de son expression de R posée dans la page 245 du volume cité, il arrivait que les deux termes multipliés par $\gamma\gamma' \sin(\theta - \theta')dv$ s'y détruisent exactement, comme nous l'avons démontré dans le n.° 170.

2.° Qu'en vertu de la destruction de ces termes, la valeur de $d'\Omega$ qu'il suffit de considérer ici peut être réduite à cette forme

$$d'\left\{\frac{M'u'^3}{4}\left(\frac{1-2\cdot ss}{u^2}\right)\right\} = \frac{M'u'^3}{4}\,d\left(\frac{1-2\cdot ss}{u^2}\right).$$

3.° Que la partie principale et séculaire dépendante de γ et γ', qui entre dans le développement de la fonction

$$\frac{M'u'^3}{4}\left(\frac{1-2\cdot ss}{u^2}\right) = \frac{M'h^4}{2\sigma^2 a'^3}\left(1+\tfrac{1}{2}\gamma^2+\tfrac{3}{2}e^2\right)\left(1+\tfrac{3}{2}\varepsilon'^2+\tfrac{3}{4}\gamma'^2\right),$$

n'est par réductible à un terme de la forme

$$M'A\left\{(\gamma\cos\theta - \gamma'\cos\theta')^2 + (\gamma\sin\theta - \gamma'\sin\theta')^2\right\};$$

c'est-à-dire au produit de $M'A$ par $\tang^2 I$, d'après ce qui a été démontré dans le n.° 184.

Cela posé, on conçoit pourquoi M. de Laplace n'obtient aucun terme séculaire de la forme $Am^2\gamma'^2$ dans son expression de l'intégrale $-2\int d'\Omega$. Mais la vérité est, que c'est précisément à cause que le contraire a lieu qu'il existe entre les coefficiens numériques multipliés par $m^2\int\gamma'^2 dv$ la relation nécessaire pour rendre tout-à-fait nulle leur somme dans la valeur de $n(t+f_{\prime})$ trouvée dans le n.° 185.

Au reste il est impossible de fixer les idées sur tout ce qui tient à la partie séculaire des élémens elliptiques du mouvement de la Lune sans construire et employer des formules, où toutes les quantités d'un ordre déterminé soient conservées et discutées conformément au but que l'on s'est proposé. C'est le principe qu'il nous paraît d'avoir suivi à la rigueur dans tout ce qui précède. S'il avait été observé dans le Mémoire en question, ou dans les formules exposées dix années plus tard dans le second volume des Mémoires de l'Institut, on y verrait des termes de la forme $Am^2\int\gamma'^2 dv$ dans la partie séculaire du nœud et du périgée de la Lune : l'absence de ces termes suffit pour démontrer qu'elles sont incomplètes. Ainsi il n'est pas surprenant, s'il y a

une discordance aussi marquée dans tout ce qui dépend des termes nés de l'existence de la tangente s' de la latitude du Soleil par rapport à un plan fixe.

Après avoir ainsi analysé les différentes questions qui ont été traitées dans ce paragraphe, il devient nécessaire de considérer le même sujet sous un autre point de vue, qui a un rapport plus immédiat avec les résultats définitifs consignés dans cet ouvrage.

En dernière analyse on doit déterminer la partie séculaire ou progressive qui s'ajoute à la partie constante de chaque élément, au moyen du développement des équations différentielles du second ordre; ainsi nous ne pouvons pas nous dispenser de chercher les principes généraux qui doivent être suivis dans leur intégration, pour que l'effet de ces mêmes variations soit compris dans l'expression complexe des coordonnées de la Lune.

§ 7.

Principes généraux pour avoir égard aux variations séculaires des élémens de l'orbite de la Lune dans le développement et l'intégration des équations différentielles du second ordre.

196. M. de Laplace a traité le premier cette question dans le second volume des Mémoires de l'Institut de France publié en 1797, et il a trouvé les premiers termes du mouvement séculaire du nœud, du périgée et de la longitude. Cependant son analyse comprenait aussi les variations semblables qui peuvent affecter l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite. Il n'y a nul doute que les variations de ces deux élémens seront éternellement insensibles, si la gravitation universelle est l'unique force qui trouble le mouvement des corps qui circulent autour du Soleil. Mais une théorie doit attacher autant d'importance à la valeur absolue des quantités qu'à la forme des expressions algébriques par lesquelles elles sont représentées. Or, en considérant sous ce dernier point de vue les formules trouvées par M. de Laplace, nous avos remarqué avec surprise qu'il a été conduit à ce principe,

savoir « que l'excentricité de l'orbe lunaire et son inclinaison à » l'écliptique vraie sont assujetties à des variations séculaires *proportionnelles à celle de la parallaxe* » (Voyez page 174 du second volume des Mémoires de l'Institut). Ce qui revient à dire qu'il y a dans l'expression de e et γ un terme du quatrième ordre de la forme $Am^2\varepsilon'^2$. Nous avons trouvé, au contraire, dans le paragraphe précédent que d'après nos équations l'existence d'un tel terme est inadmissible.

En réfléchissant sur les différens points de l'analyse par laquelle M. de Laplace *lie les deux variables* γ et θ par l'équation

$$2\frac{d\gamma}{dv}\left(1-\frac{d\theta}{dv}\right)-\gamma\frac{d^2\theta}{dv^2}=0,$$

et les deux variables e et ϖ par l'équation semblable

$$2\frac{d\varpi}{dv}\left(1-\frac{d\varpi}{dv}\right)-e\frac{d^2\varpi}{dv^2}=0,$$

(Voyez pages 165 et 171 du second volume des Mémoires de l'Institut) nous croyons en avoir découvert le vice dans une espèce de *double* solution dont est susceptible le problème suivant, lorsqu'on le considère isolément.

197. Supposons d'abord qu'il soit question d'intégrer l'équation unique

$$\frac{d^2s}{dv^2}+s+P\gamma\sin(v-\theta)=0,$$

où P,γ sont deux fonctions de v *données explicitement* composées de quantités constantes et de termes périodiques qui varient avec une excessive lenteur; et que θ contient une première partie constante, une seconde proportionnelle à v, et une troisième composée de termes périodiques croissant pareillement avec une excessive lenteur.

La solution directe de ce problème est fournie par la formule générale rapportée dans le n.° 37, de sorte que l'on a

$$s=\cos v\int P\gamma\sin(v-\theta)\sin v\,dv-\sin v\int P\gamma\sin(v-\theta)\cos v\,dv.$$

Donc, en faisant pour plus de simplicité

$$P'=\frac{P\gamma}{2-\frac{d\theta}{dv}},$$

il est facile de voir que nous avons

$$s = \frac{1}{2} \cos v \int P\gamma \cos\theta\, dv + \frac{1}{2} \sin v \int P\gamma \sin\theta\, dv$$
$$- \frac{1}{2} \cos v \int P' d\cdot \sin(2v - \theta) + \frac{1}{2} \sin v \int P' d\cdot \cos(2v - \theta);$$

d'où l'on conclut en intégrant par parties

$$s = -\frac{1}{2} P' \sin(v - \theta) + \frac{1}{2} \cos v \int P\gamma \cos\theta\, dv + \frac{1}{2} \sin v \int P\gamma \sin\theta\, dv$$
$$+ \frac{1}{2} \cos v \int \sin(2v - \theta)\, dP' - \frac{1}{2} \sin v \int \cos(2v - \theta)\, dP'.$$

Maintenant, si l'on observe que, *par hypothèse*, les trois quantités $\frac{d\gamma}{dv}$, $\frac{dP}{dv}$, $\frac{d^2\theta}{dv^2}$ sont composées de termes périodiques ayant des facteurs très-petits, on accordera que les intégrales $\int \sin(2v - \theta)\, dP'$, $\int \cos(2v - \theta)\, dP'$ donnent nécessairement des termes périodiques qui peuvent être négligés en comparaison des autres; et que par conséquent la valeur précédente de s peut être réduite à celle-ci:

$$s = -\frac{1}{2} P' \sin(v - \theta) + \frac{1}{2} \cos v \int P\gamma \cos\theta\, dv + \frac{1}{2} \sin v \int P\gamma \sin\theta\, dv.$$

Mais nous avons

$$\int P\gamma \cos\theta\, dv = \int \frac{P\gamma\, dv}{d\theta} d\cdot \sin\theta; \quad \int P\gamma \sin\theta\, dv = -\int \frac{P\gamma\, dv}{d\theta} d\cdot \cos\theta.$$

Donc, en intégrant par parties, il viendra

$$\int P\gamma \cos\theta\, dv = \frac{P\gamma \sin\theta\, dv}{d\theta} - \int \frac{dv \sin\theta}{d\theta} d.P\gamma + \int \frac{P\gamma \sin\theta\, d^2\theta}{d\theta^2} dv,$$

$$\int P\gamma \sin\theta\, dv = -\frac{P\gamma \cos\theta\, dv}{d\theta} + \int \frac{dv \cos\theta}{d\theta} d.P\gamma - \int \frac{P\gamma \cos\theta\, d^2\theta}{d\theta^2} dv;$$

ce qui donne

$$s = -\frac{P\gamma \sin(v - \theta)}{\frac{d\theta}{dv}\left(2 - \frac{d\theta}{dv}\right)}$$
$$- \frac{1}{2} \cos v \int \frac{dv \sin\theta}{d\theta} d.P\gamma + \frac{1}{2} \sin v \int \frac{dv \cos\theta}{d\theta} d.P\gamma$$
$$+ \frac{1}{2} \cos v \int \frac{P\gamma \sin\theta\, d^2\theta}{d\theta^2} dv - \frac{1}{2} \sin v \int \frac{P\gamma \cos\theta\, d^2\theta}{d\theta^2} dv.$$

Cela posé, si l'on se rappelle que les fonctions de v représentées par θ et $P\gamma$ sont, par hypothèse, de la forme

$$\theta = K + Av + \Sigma B\, sin(\alpha v + \beta),$$
$$P\gamma = K' + \Sigma \beta' sin(\alpha' v + \beta),$$

on en tirera en différentiant

$$\frac{d\theta}{dv} = A + \Sigma \alpha B\, cos(\alpha v + \beta),$$
$$\frac{d^2\theta}{dv^2} = -\Sigma \alpha^2 B\, sin(\alpha v + \beta),$$
$$\frac{d \cdot P\gamma}{dv} = \Sigma \alpha' \beta' cos(\alpha' v + \beta).$$

Donc, *en ajoutant aux conditions primitives* celle que la constante désignée par A, ainsi que son carré, soit une quantité très-grande en comparaison des coefficiens αB, $\alpha' B'$, on en conlura qu'il est permis de négliger tous les termes affectés du signe intégral; ce qui réduit l'expression précédente de s à celle-ci

$$s = -\frac{P\gamma\, sin(v - \theta)}{\frac{d\theta}{dv}\left(2 - \frac{d\theta}{dv}\right)}.$$

Il est évident que pour avoir l'intégrale complète de l'équation proposée, il faut ajouter à cette valeur de s un terme de la forme $\gamma_, sin(v - \theta_,)$, dans lequel $\gamma_,$ et $\theta_,$ désignent deux quantités absolument constantes et arbitraires. Il suit de là que si l'on fait pour plus de simplicité

$$G\, cos\, \Pi = \gamma_, cos\, \theta_, - \frac{P\gamma\, cos\, \theta}{\frac{d\theta}{dv}\left(2 - \frac{d\theta}{dv}\right)},$$

$$G\, sin\, \Pi = \gamma_, sin\, \theta_, - \frac{P\gamma\, sin\, \theta}{\frac{d\theta}{dv}\left(2 - \frac{d\theta}{dv}\right)},$$

l'on a

$$s = G\, sin(v - \Pi)$$

pour l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s + P\gamma\, sin(v - \theta) = 0.$$

198. Mais si, au lieu de considérer le problème sous le point de vue qui vient d'être exposé, *on cessait* de regarder *comme données* les deux fonctions de v représentées par γ et θ, et que l'on demandât de déterminer ces mêmes fonctions de manière que l'équation

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s + P\gamma \sin(v - \theta) = 0$$

soit *identiquement satisfaite* en prenant

$$s = \gamma \sin(v - \theta).$$

Alors il est évident que la question se réduit à rendre identique l'équation

$$\begin{aligned} 0 = \ & \sin(v - \theta)\left\{\gamma(1 + P) - \gamma\left(1 - \frac{d\theta}{dv}\right)^2 + \frac{d^2\gamma}{dv^2}\right\} \\ & + \cos(v - \theta)\left\{2\frac{d\gamma}{dv}\left(1 - \frac{d\theta}{dv}\right) - \gamma\frac{d^2\theta}{dv^2}\right\}, \end{aligned}$$

résultante de la substitution de la valeur de s dans la proposée.

Or il est clair que cette équation sera satisfaite, si l'on égale séparément à zéro le coefficient de $\sin(v - \theta)$ et celui de $\cos(v - \theta)$; c'est-à-dire, si l'on conçoit les valeurs de θ et γ telles que l'on ait

$$\frac{d^2\gamma}{dv^2} - \gamma\left(1 - \frac{d\theta}{dv}\right)^2 + \gamma(1 + P) = 0,$$

$$2\frac{d\gamma}{dv}\left(1 - \frac{d\theta}{dv}\right) - \gamma\frac{d^2\theta}{dv^2} = 0.$$

La seconde de ces équations est, comme l'on voit, *indépendante* de la fonction P, et devient immédiatement intégrable en la multipliant par γ; de sorte que, c désignant une constante arbitraire, l'on a

$$\gamma^2\left(1 - \frac{d\theta}{dv}\right) = c.$$

Il suit de là que la valeur de γ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2\gamma}{dv^2} + \gamma(1 + P) - \frac{c^2}{\gamma^3} = 0.$$

Mais il est impossible d'en trouver l'intégrale complète, sous forme finie, par les méthodes connues. Néanmoins on peut en tirer plusieurs conséquences et l'intégrer par approximation dans le cas où P est, comme nous le supposons ici, une fonction de v dont les coefficiens différentiels sont très-petits.

En la multipliant par $d\gamma$ et intégrant, on obtient

$$\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 + \gamma^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} 2\int P\gamma\, d\gamma = 0\,;$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 + \gamma^2(1 + P) + \frac{c^2}{\gamma^2} - \int \gamma^2\, dP = c'\,;$$

c' désignant une constante arbitraire.

Il est évident que cette équation serait rigoureusement satisfaite en supposant γ quantité absolument constante et en faisant $\gamma = \sqrt{c}$, $c' = 2c$; mais alors l'équation $\gamma^2\left(1 - \frac{d\theta}{dv}\right) = c$ ne peut être satisfaite autrement qu'en prenant aussi une quantité absolument constante pour θ. Cependant il est clair que cette solution est absurde, puisque en posant $s = \gamma \sin(v - \theta)$ et regardant γ et θ comme quantités constantes, on aurait toujours $\frac{d^2 s}{dv^2} + s = 0$ et jamais

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s + P\gamma \sin(v - \theta) = 0\,.$$

Ainsi, pour faire cesser l'absurdité, il faudra dire qu'il est nécessaire que la constante arbitraire désignée par c' soit égale à zéro: alors l'on a $\gamma = 0$ et par conséquent le problème cesse d'avoir lieu.

199. Prenons maintenant

$$\gamma^2 = \frac{c}{\sqrt{(1 + P)}}\,.$$

L'équation différentielle en γ devient d'après cela

$$\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 + 2c\sqrt{1 + P} - c\int \frac{dP}{\sqrt{(1 + P)}} = c'\,;$$

ou bien

$$\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 = c' = \frac{c}{16}\left(\frac{dP}{dv}\right)^2 \frac{1}{(1 + P)^{\frac{5}{2}}}\,.$$

Le dernier membre de cette équation n'est donc pas une quantité absolument constante, comme cela devrait être pour avoir une solution rigoureuse.

Mais il est certain qu'en posant

$$s = \frac{\sqrt{c}\, sin\{v - \int[1 - \sqrt{(1+P)}]dv\}}{\sqrt[4]{(1+P)}},$$

on a

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s + Ps = \sqrt{c}\,\frac{d^2[(1+P)^{-\frac{1}{4}}]}{dv^2}\, sin\{v - \int(1 - \sqrt{1+P})\,dv\}.$$

Donc, en supposant toujours que la quantité P est donnée par une suite de termes périodiques qui croissent avec une lenteur excessive, on pourra, en raison de l'excessive petitesse des coefficiens différentiels $\frac{dP}{dv}$, $\frac{d^2P}{dv^2}$, regarder la valeur précédente de s comme une solution *approchée* du problème proposé au commencement du n.° 198.

Mais, d'après ce principe, *on doit aussi* considérer comme une solution *également approchée* du même problème celle que l'on a en supposant γ quantité constante et en faisant

$$\theta = \int(1 - \sqrt{1+P})\,dv.$$

Car il est clair qu'en posant

$$s = \gamma\, sin\{v - \int(1 - \sqrt{1+P})dv\},$$

et traitant γ comme quantité constate, il en résulte

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s + Ps = \frac{1}{2}\gamma\frac{dP}{dv}\cdot\frac{cos\{v - \int[1 - \sqrt{(1+P)}]dv\}}{\sqrt{(1+P)}};$$

c'est-à-dire une quantité qu'il est permis de négliger, eu égard à l'excessive petitesse du facteur $\frac{dP}{dv}$.

Il y a plus: en prenant de nouveau

$$\theta = \int(1 - \sqrt{1+P})dv,$$

et se tenant toujours dans les limites d'une solution qui permet de négliger les quantités multipliées par les coefficiens différentiels de la

fonction P, on pourra supposer la quantité γ composée d'une quantité constante et d'une suite de termes périodiques, qui, étant différentiés, deviennent comparables à l'expression de $\frac{dP}{dv}$. En effet la fonction

$$s = \gamma \sin\left\{ v - \int (1 - \sqrt{1+P}) dv \right\}$$

donne (conformément à la dernière définition de γ)

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s + Ps = \frac{d^2\gamma}{dv^2} \sin\left\{ v - \int (1 - \sqrt{1+P}) dv \right\}$$
$$+ \frac{\left\{ 2\frac{d\gamma}{dv}(1+P) - \gamma \frac{dP}{dv} \right\} \cos\left\{ v - \int (1 - \sqrt{1+P}) dv \right\}}{\sqrt{(1+P)}};$$

c'est-à-dire une quantité qu'il est permis de négliger par la même raison qui a été admise dans les cas précédens.

Cette solution *approchée* de l'équation

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s + P\gamma \sin\left\{ v - \int (1 - \sqrt{1+P}) dv \right\} = 0$$

n'a rien de contraire au principe général démontré dans le n.° 197. Car en faisant $\frac{d\theta}{dv} = 1 - \sqrt{1+P}$ dans la formule

$$s = - \frac{P\gamma \sin(v - \theta)}{\frac{d\theta}{dv}\left(2 - \frac{d\theta}{dv}\right)},$$

on obtient

$$s = - \frac{P\gamma \sin\{v - \int [1 - \sqrt{(1+P)}] dv\}}{[1 - \sqrt{(1+P)}]\,[1 + \sqrt{(1+P)}]} = \gamma \sin\left\{ v - \int (1 - \sqrt{1+P}) dv \right\}.$$

On voit d'après cela que pour résoudre rapidement le problème proposé au commencement du n.° 198, on aurait pu poser l'équation $\frac{d\theta}{dv}\left(2 - \frac{d\theta}{dv}\right) = -P$, laquelle donne $\frac{d\theta}{dv} = 1 \pm \sqrt{1+P}$. Mais nous avons évité à dessein une telle solution pour faire voir en même tems les différentes circonstances qui se rapportent à la variable γ.

Il est surtout essentiel de remarquer que la solution précédente *ne saurait déterminer la quantité γ, ni même établir une relation nécessaire entre P et γ.*

Sous ce rapport on peut dire qu'il y a une différence énorme entre cette dernière solution et celle obtenue plus haut, en faisant

$$\gamma^2 = \frac{c}{\sqrt{(1+P)}}.$$

200. Pour décider la question, du moins en ce qui tient à la forme algébrique des quantités cherchées, il est nécessaire d'appliquer les réflexions qui viennent d'être exposées à la partie séculaire du nœud et de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, afin de savoir quelle est parmi ces solutions celle qui ne présente aucune contradiction dans la partie principale de ces deux élémens, déjà connue par tout ce qui précède.

Or il est facile de prouver qu'il faut *exclure* la solution qui donne

$$\gamma^2 = \frac{c}{\sqrt{(1+P)}}.$$

En effet, si l'on suppose calculés les premiers termes de la fonction désignée par P, au moyen du développement de la première des équations (VIII), (Voyez n.° 23), on y verra nécessairement un terme du quatrième ordre de la forme $A\,\mathrm{m}^2\,\varepsilon'^2$. Cela est sans doute exact à l'égard de la valeur séculaire de θ, mais le résultat qui en dérive pour γ^2, en substituant la même valeur de P dans la formule $\gamma^2 = \frac{c}{\sqrt{(1+P)}}$, est incompatible avec notre analyse du paragraphe précédent, où l'on a trouvé

$$\gamma^2 = \gamma_{,}^2 + \gamma'^2 + 2\gamma_{,}\Sigma N\cos(\theta_{,} - \phi - it - \beta),$$

sous la condition expresse que l'existence d'un terme de la forme $A\,\mathrm{m}^2\,\varepsilon'^2$ est impossible dans la valeur de cette fonction.

Concluons d'après tout cela que dans la théorie de la Lune, la seule solution admissible de l'équation

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s + P\gamma\sin(v-\theta) + \Sigma\, Q\sin(\alpha'v + \beta') = 0$$

(en voulant retenir, comme on le doit, dans γ et θ la partie séculaire) est celle que l'on obtient en prenant pour s une fonction de cette forme

$$s = \gamma \sin \left\{ v - \int (1 - \sqrt{1 + P}) dv \right\} + \Sigma Q' \sin(\alpha' v + \beta').$$

Il est vrai que de cette manière on laisse inconnue la partie séculaire de γ qui dépend de γ'. Mais ayant trouvé dans le n.° 186 que la première valeur de s est de la forme

$$s = \gamma_{,} \sin(v - \theta_{,} + \varphi) + \Sigma N \sin(v - it - \beta),$$

on peut regarder comme certain que la véritable forme de l'expression de la variable s est

$$s = \gamma_{,} \sin \left\{ v - \int (1 - \sqrt{1 + P}) dv \right\} + \Sigma N \sin(v - it - \beta) \\ + \Sigma Q' \sin(\alpha' v + \beta');$$

la fonction $\Sigma N \sin(v - it - \beta)$ étant celle qui naît d'un terme de la forme $R s'$ qui entre dans l'équation différentielle de s.

201. L'équation différentielle du second ordre qui détermine la variable u donne lieu à des considérations analogues. Mais il ne suffit pas d'indiquer une telle analogie; il est nécessaire d'entrer dans les détails, afin de mettre en évidence les circonstances qui apportent quelques modifications dans la solution qui concerne la partie séculaire de e et ϖ, et celles qui exigent quelque considération nouvelle relativement à la partie séculaire qui naît du développement de la fonction même désignée par u.

Admettons pour un moment que l'on a développé le second membre de l'équation

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = \frac{\sigma(1 + ss)^{-\frac{3}{2}} + \Omega_{(2)} - \frac{du}{dv} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv}}{h^2 + 2\int \frac{d\Omega}{u^2 dv} dv},$$

et qu'on obtenu un résultat de cette forme

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u + B + Q e \cos(v - \varpi) + \Sigma U \cos(\alpha v + \beta) = 0,$$

où B et Q renferment, outre les quantités absolument constantes, des termes séculaires, fonction de e' et γ'. D'après cette définition il sera permis de regarder comme très-petits les coefficiens différentiels $\frac{dB}{dv}$, $\frac{dQ}{dv}$. Cela posé, remarquons que rien n'empêche de concevoir

la valeur de u comme composée de deux parties distinctes. La première sera celle qui satisfait à l'équation

$$(1) \ldots \frac{d^2u}{dv^2} + u + B + Q e \cos(v - \varpi) = 0;$$

et la seconde sera celle qui donne

$$(2) \ldots \frac{d^2u}{dv^2} + u + \Sigma U \cos(\alpha v + \beta) = 0.$$

Les coefficiens U et les argumens β sont à la vérité composés de quantités constantes et de termes séculaires qui varient avec une grande lenteur; mais, pour ne point augmenter la difficulté de la question que nous traitons ici, nous accorderons que l'équation (2) est satisfaite en faisant

$$u = \Sigma \frac{U}{\alpha^2 - 1} \cos(\alpha v + \beta);$$

ce qui revient à l'intégrer, comme si U et β étaient des quantités constantes.

Nous ferons même abstraction des cas singuliers dans lesquels le coefficient α serait une quantité très-peu différente de l'unité, nous réservant de développer plus bas les circonstances qui ont lieu à l'égard de ces argumens, qui peuvent être assimilés à celui de l'équation du centre.

Tout se réduit donc à intégrer convenablement l'équation (1). Si cette équation était isolée, il n'y aurait aucune difficulté. Mais il s'agit ici de satisfaire à la condition que les *deux premiers termes* de la valeur de u soient effectivement tels qu'ils ont été *présupposés*, avant d'entreprendre le développement des fonctions de la force perturbatice. Or, quels que soient ces deux premiers termes, ils doivent être réductibles à la forme

$$u = A' + A'A'' e \cos(v - \varpi);$$

A', A'' étant des fonctions des élémens des deux orbites.

Substituons cette valeur de u dans l'équation (1), regardons toutes les quantités comme variables et faisons pour plus de simplicité $E = e A'A''$; on aura

$$0 = \frac{d^2A'}{dv^2} + A' + B + \cos(v - \varpi)\left\{E + eQ - E\left(1 - \frac{d\varpi}{dv}\right)^2 + \frac{d^2E}{dv^2}\right\}$$
$$+ \sin(v - \varpi)\left\{E\frac{d^2\varpi}{dv^2} - 2\left(1 - \frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{dE}{dv}\right\}.$$

Jusqu'ici rien ne définit les facteurs dont se compose la fonction Q; mais il est évident que les facteurs du produit $eA'A''$ étant inséparables, on doit regarder Q comme ayant la forme $Q'A'A''$. Donc, en faisant $eQ = Q'E$, on satisfera rigoureusement à l'équation précédente en la partageant dans les trois suivantes:

$$0 = \frac{d^2A'}{dv^2} + A' + B,$$
$$0 = E\left\{1 + Q' - \left(1 - \frac{d\varpi}{dv}\right)^2\right\} + \frac{d^2E}{dv^2},$$
$$0 = E\frac{d^2\varpi}{dv^2} - 2\left(1 - \frac{d\varpi}{dv}\right)\frac{dE}{dv}.$$

La dernière donne en l'intégrant

$$E^2\left(1 - \frac{d\varpi}{dv}\right) = H;$$

H étant une constante arbitraire. Il suit de là que l'on a

$$\frac{d^2E}{dv^2} + E(1 + Q') - \frac{H^2}{E^3} = 0;$$

c'est-à-dire une équation tout-à-fait semblable à celle trouvée dans le n.° 198 pour déterminer la valeur de γ. Ainsi nous pouvons en déduire les mêmes conséquences: savoir, que l'on a une solution *approchée* de l'équation (1), en faisant

$$E^2 = \frac{H}{\sqrt{(1 + Q')}}, \qquad \varpi = \int(1 - \sqrt{1 + Q'})\,dv;$$

mais que l'on a une solution *également approchée*, soit en supposant E quantité absolument constante, soit en l'imaginant composée de quantités constantes et de termes périodiques qui croissent avec une excessive lenteur.

Cette dernière solution étant la seule compatible avec les premiers termes de e et de ϖ trouvés par la méthode du paragraphe précédent, il en résulte la nécessité d'*exclure la solution qui donnerait*

$$E^2 = \frac{H}{\sqrt{(1+Q')}}:$$

car cette équation établit un rapport entre la partie variable de e et celle de ϖ, qui introduit dans l'expression séculaire de e un terme du quatrième ordre, de la forme $A\mathrm{m}^2\varepsilon'^2$, ce qui est en contradiction avec les résultats fournis par les formules de la variation des constantes arbitraires.

Concluons de là que pour intégrer l'équation différentielle en u, il faut d'abord poser dans les termes dépendans de la force perturbatrice

$$u = A' + A'A''e\cos(v-\varpi) + \text{etc.}$$

et la réduire d'après cela à la forme

$$0 = \frac{d^2u}{dv^2} + u + B + Q'A'A''e\cos(v-\varpi) + \Sigma U\cos(\alpha v + \beta).$$

Lorsqu'on aura ainsi découvert les deux fonctions des élémens désignées par B et Q', on prendra

$$\varpi = \int(1-\sqrt{1+Q'})\,dv$$

et on déterminera A' au moyen de l'équation

$$0 = \frac{d^2A'}{dv^2} + A' + B.$$

Or, en supposant la valeur de B réduite à la forme

$$B = \Sigma M\cos(pv+q),$$

on aurait

$$A' = \Sigma\frac{M}{p^2-1}\cos(pv+q).$$

Mais, par hypothèse, tous les coefficiens désignés par p sont très-petits par rapport à l'unité; donc on peut poser

$$A' = -\Sigma M\cos(pv+q) = -B.$$

Il n'y a rien dans l'ensemble de ces conditions qui puisse déterminer le facteur désigné par A''. Et cela doit être, puisque ce facteur est par sa nature inséparable de la quantité désignée par e.

202. Pour fixer davantage les idées sur l'équation $A' + B = 0$, à laquelle on doit nécessairement satisfaire, il importe de ne point perdre de vue que la lettre B représente ici une certaine fonction de A', h^2, α', e, γ, ε', γ'. En la supposant connue on aura une équation dont la forme explicite est celle-ci

$$A' + fonct.\{A',\, h^2,\, \alpha',\, e,\, \gamma,\, \varepsilon',\, \gamma'\} = 0.$$

On peut en conséquence la considérer comme propre à déterminer h^2 par A', et réciproquement.

Mais au lieu de laisser à ces deux dernières quantités la forme actuelle, on préfère ordinairement de la changer par un procédé qui revient à celui que nous allons oxposer.

Supposons que l'on ait développé la valeur complète de u, et que l'on a trouvé

$$u = A' + A'A''e\cos(v - \varpi) + \text{etc.};$$

supposons en outre que l'on ait développé l'intégrale $\frac{2}{h^2}\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv$, et que l'on a trouvé

$$\frac{2}{h^2}\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv = G' + G''\cos(iv + l) + G'''\cos(i'v + l') + \text{etc.}$$

Maintenant admettons qu'au moyen de ces deux suites de termes périodiques on a formé le développement du second membre de l'équation

$$h\frac{dt}{dv} = \frac{\left\{1 + \frac{2}{h^2}\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv\right\}^{-\frac{1}{2}}}{u^2},$$

et qu'il en est résulté cette troisième suite

$$h\frac{dt}{dv} = H' + H''\cos(g'v + f') + H'''\cos(g''v + f'') + \text{etc.}$$

Il est évident que la fonction des élémens représentée par H' sera réductible à cette forme

$$H' = \frac{1 + k}{A'^2\sqrt{(1 + G')}},$$

où les lettres k et G' doivent être regardées comme fonctions de h et des autres élémens.

Cependant rien n'empêche d'introduire dans le calcul une autre quantité, que nous désignerons par $a_{,}$, telle que l'on ait

$$h = \frac{(1 + k)\sqrt{(a_{,}\sigma)}}{\sqrt{(1 + G')}}; \text{ et par conséquent } H' = \frac{h}{A'^2\sqrt{(a_{,}\sigma)}}.$$

Alors l'expression de dt deviendra

$$dt = \frac{dv}{A'^2\sqrt{(a_{,}\sigma)}} + \frac{dv}{h}\left\{H''\cos(g'v + f') + H'''\cos(g''v + f'') + \text{etc.}\right\}.$$

Cela posé, admettons que l'on a résolu par rapport à h l'équation $h = \frac{(1 + k)\sqrt{(a_{,}\sigma)}}{\sqrt{(1 + G')}}$, et que l'on a trouvé

$$h = \mathit{fonct.}\left\{A',\ a_{,}\sigma,\ \alpha',\ e,\ \gamma,\ \varepsilon',\ \gamma'\right\}.$$

En substituant cette valeur de h dans l'équation $A' + B = 0$, on pourra ensuite tirer de cette dernière la valeur de A' en fonction de $a_{,}$ et des élémens de deux orbites.

203. Après avoir ainsi formé l'expression de A', rien n'empêche de la décomposer en deux facteurs de la forme

$$\frac{1}{a}\varphi(e,\ \gamma),$$

en se donnant arbitrairement le facteur $\varphi(e, \gamma)$ qui représente une fonction de e et de γ. Mais, pour se rapprocher davantage des formes connues dans la théorie du mouvement elliptique, on pourrait faire

$$\varphi(e,\ \gamma) = F(\gamma) \times f(e,\ \gamma)$$

et prendre pour $F(\gamma)$ la fonction de γ qui constitue le premier terme du développement du radical $\sqrt{1 + \gamma^2 \sin^2(v - \theta)}$, mis sous la forme

$$F(\gamma) + F_{,}(\gamma)\cos(2v - 2\theta) + \text{etc.}$$

On obtiendra de cette manière pour $\frac{1}{a}$ une expression réductible à cette forme

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_{,}}\varphi'(\alpha',\ e,\ \gamma,\ \varepsilon',\ \gamma');$$

de sorte que l'on aura

$$A' = \frac{1}{a_{,}} \varphi'(\alpha', e, \gamma, \varepsilon', \gamma') \times F(\gamma) \times f(e, \gamma).$$

Mais nous avons dit plus haut que l'on a

$$dt = \frac{dv}{A'^2 \sqrt{(a_{,}\sigma)}} + \text{etc.}$$

Donc, en substituant pour A' la valeur précédente, il viendra

$$dt = dv \frac{a_{,}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sigma}} \times fonct. (\alpha', e, \gamma, \varepsilon', \gamma') + \text{etc.}$$

Actuellement, pour intégrer ce premier coefficient de dv, il faut imaginer que l'on a substitué pour ε' et γ' leurs valeurs séculaires, et que l'on a partagé ce terme en deux autres de la forme

$$a_{,}^{\frac{3}{2}} M dv + a_{,}^{\frac{3}{2}} \times fonct. (\varepsilon', \gamma') dv;$$

où $a_{,}^{\frac{3}{2}} M$ représente une quantité absolument constante qui peut être remplacée par une autre de la forme $\frac{1}{n}$.

Alors l'on obtient l'équation

$$n\,dt = dv + \frac{1}{M} fonct. (\varepsilon', \gamma') dv + \text{etc.},$$

qui étant intégrée donne

$$nt + f_{,} = v + \frac{1}{M} \int fonct. (\varepsilon', \gamma') dv + \text{etc.};$$

c'est-à-dire une suite de termes périodiques précédée par une autre suite de termes également périodiques; mais tels que leur période est excessivement longue.

Cette dernière circonstance permet d'évaluer l'intégrale

$$\int fonct. (\varepsilon', \gamma') dv$$

en développant les variables suivant les puissances de la longitude v. Le résultat ainsi trouvé cesse d'être exact après quelques siècles; mais il est facile de la réformer convenablement, en recalculant la formule d'après les élémens ε' et γ' fournis par les observations astronomiques

faites peu d'années avant et peu d'années après la nouvelle époque qui sera choisie pour point de départ. Cette espèce d'imperfection ne pourra cesser que dans le tems où les masses des planètes seront assez bien déterminées pour pouvoir construire *a priori* les formules finies qui donnent sans limitation les variations séculaires des élémens de l'orbite de la Terre.

204. Sans suivre le procédé qui vient d'être exposé précisément dans l'ordre qu'il a été indiqué, il est facile de concevoir que rien n'empêche d'en transporter les conséquences au commencement de l'intégration des équations différentielles. Ainisi, en présupposant les formes qui ont été trouvées à l'égard des premiers termes, on pourra entreprendre le développement des fonctions de la force perturbatice, en faisant

$$s = \gamma \sin\left\{v - \int(1 - \sqrt{1 + P})\,dv\right\} + \text{etc.}$$

$$u = \frac{f(e_{,}\gamma)}{a}\left\{F(\gamma) + A''F(\gamma)\,e\cos\left\{v - \int v - \sqrt{1 + Q'})\,dv\right\} + \text{etc.}\right\}.$$

On pourrait même observer que le facteur A'' étant arbitraire, il convient de poser $A'' = \frac{1}{F(\gamma)}$, afin de simplifier la forme du coefficient de

$$\cos\left\{v - \int(1 - \sqrt{1 + Q'})\,dv\right\}.$$

Alors l'on a

$$u = \frac{f(e,\gamma)}{a}\left\{F(\gamma) + e\cos\left\{v - \int(1 - \sqrt{1 + Q'})\,dv\right\} + \text{etc.}\right\};$$

et en faisant $h^2 = \sigma a_{,}\, \psi(e, \gamma)$, les équations (*VIII*) du n.° 23 deviendront

$$(A)\ldots\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2s}{dv^2} + s = \frac{\Omega_{(1)} - \frac{ds}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}}{\sigma a_{,}\psi(e,\gamma) + 2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv};\\ &\frac{d^2u}{dv^2} + u = \frac{\sigma(1 + ss)^{-\frac{3}{2}} + \Omega_{(2)} - \frac{du}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{u^2dv}}{\sigma a_{,}\psi(e,\gamma) + 2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv};\\ &dt = \frac{dv}{u^2\sqrt{\left(\sigma a_{,}\psi(e,\gamma) + 2\int\frac{d\Omega}{u^2dv}dv\right)}}. \end{aligned}\right.$$

Mais en opérant ainsi, il faut regarder les deux *nouvelles* quantités représentées par les mêmes *lettres* e et γ comme absolument constantes, et *cesser* de considérer la partie variable et séculaire qu'elles pouvaient renfermer implicitement, lorsqu'on assujettissait les coordonnées du mouvement elliptique aux conditions exprimées par les équations différentielles du premier ordre qui déteminent la partie variable des élémens. En général, l'effet des variations, lentes ou rapides, sera *confondu* dans l'expression complexe des coordonnées, et on ne pourra les séparer sans une analyse spéciale, conforme aux méthodes qui peuvent être fournies par les propriétés intrinsèques des formules de la variation des constantes arbitraires. En s'écartant de ce principe, on risque d'attribuer à un élément ce qui appartient à d'autres, et par conséquent d'altérer la solution des problèmes qui pourraient dépendre *de l'intégration* de la partie purement séculaire qui affecterait un élément déterminé parmi les six qui appartinnent à l'orbite de la Lune. C'est d'après cette réflexion que nous avons insisté plus haut sur la nécessité d'exclure les valeurs séculaires de e^2 et γ^2, que M. de Laplace préscrit de calculer au moyen des équations de la forme

$$e^2 = \frac{c}{\sqrt{(1 + Q')}}; \qquad \gamma^2 = \frac{c'}{\sqrt{(1 + P)}};$$

c et c' désignant des quantités constantes. Il est aisé de sentir que l'on tomberait dans des erreurs assez graves, si l'on voulait appliquer ces deux formules à une question qui exigerait la valeur absolue des deux intégrales doubles $\iint e^2 dv^2$, $\iint \gamma^2 dv^2$, dans lesquelles e et γ représenteraient respectivement l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite de la Lune considérée comme une ellipse variable.

205. Les deux fonctions de e et γ, désignées par $f(e,\gamma)$, $\psi(e,\gamma)$, que nous venons d'introduire dans l'expression de u et les trois équations (A), sont, dans le fond, deux facteurs constans fort peu différens de l'unité, et on aurait pu les comprendre, le premier dans a, et le second dans $a_{\prime}$. Mais on a préféré de laisser ces facteurs en évidence, pour les déterminer ensuite de manière que les premiers termes des coordonnées polaires aient une forme semblable à celle qui a lieu pour le cas fort simple, où l'on suppose nulles les forces

perturbatrices. Il n'y a en cela aucun anvantage réel, on pourrait même ajouter que, pour rendre l'intégration plus directe, il conviendrait de s'abstenir d'une telle transformation. Il est clair en effet que les quatre quantités $f(e, \gamma)$, $\psi(e, \gamma)$, a, $\sigma a_{\prime}$ sont dans le cas actuel toujours réductibles à deux, puisque les deux termes de la fraction $\frac{f(e, \gamma)}{a}$ sont inséparables aussi bien que les deux termes du produit $\sigma a_{\prime} \psi(e, \gamma)$. Cependant nous avons adopté le principe de remplacer la quantité qui tiendrait la place de $\frac{1}{a}$ par une autre de la forme $\frac{f(e, \gamma)}{a}$, et de substituer $\sigma a_{\prime} \psi(e, \gamma)$ à la lettre h^2, afin de construire des formules qui soient plus immédiatement comparables avec celles publiées antérieurement sur cette théorie.

Au reste le principe fondamental dans cette transformation consiste dans l'équation

$$\frac{f(e, \gamma) \times F(\gamma)}{a} + B = 0,$$

analogue à celle qui auparavant était désignée par $A' + B = 0$. C'est par son moyen que l'on détermine a par une expression de la forme

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_{\prime}} \times fonct. (\alpha', e, \gamma, \varepsilon', \gamma'),$$

et que l'on reconnaît aussitôt que l'intégrale $\int \frac{dv}{u^2}$ doit renfermer une équation séculaire dépendante de l'intégrale du carré de l'excentricité du Soleil. Il est assez singulier que l'équation $A' + B = 0$ n'ait pas été d'abord désignée comme renfermant en elle-même la véritable cause de l'existence de l'équation séculaire de la Lune. Si l'on veut considérer pour un moment l'importance que cette circonstance donne à l'équation

$$\frac{f(e, \gamma) \times F(\gamma)}{a} + B = 0,$$

on excusera la longueur des détails dans lesquels nous sommes entrés pour faire voir clairement à quoi tient son origine et le mode de sa formation.

206. Reprenons maintenant l'équation différentielle du second ordre en u pour la considérer sous un autre point de vue, et expliquer une autre difficulté qui n'a pas été développée plutôt, parce qu'elle ne touchait pas le fond des principes généraux exposés jusqu'ici dans ce paragraphe.

Supposons l'équation (1), posée dans le n.° 201, satisfaite, et voyons ce qu'on doit faire à l'égard de l'équation (2) définie dans le même numéro. Si cette dernière avait effectivement la forme

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u + \Sigma\, U \cos(\alpha v + \beta) = 0,$$

on aurait en intégrant

$$u = \Sigma \frac{U}{\alpha^2 - 1} \cos(\alpha v + \beta);$$

ce qui revient à dire qu'il suffit de changer les coefficiens U en $\frac{U}{\alpha^2 - 1}$. Il est clair que ce changement augmente d'autant plus les coefficiens désignés par U que la quantité α diffère peu de l'unité. Et comme il y a quelques argumens dont le coefficient α est excessivement peu différent de l'unité, on pouvait croire que le coefficient U, correspondant à ces argumens, devient fort considérable en acquérant le diviseur $\alpha^2 - 1$. Mais il est essentiel d'observer que cette circonstance cesse d'avoir lieu, en se rapprochant davantage de la forme de l'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer. Pour arriver par degrés à cette dernière, considérons un autre cas hypothétique.

Supposons qu'il soit question d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u + m^2 f(u) + m^2 \Sigma\, U \cos(\alpha v + \beta) = 0;$$

m^2 étant un coefficient fort petit.

Il est censé que l'on sait d'avance que la valeur de u qui doit être substituée dans $f(u)$ se compose de deux parties représentées par $p + \delta u$, et que l'on peut supprimer la fonction $\frac{d^2p}{dv^2} + p$; de sorte que

$$(3) \ldots \frac{d^2 \cdot \delta u}{dv^2} + \delta u + m^2 f(p + \delta u) + m^2 \Sigma\, U \cos(\alpha v + \beta) = 0$$

est la véritable équation qu'il s'agit d'intégrer.

En développant la fonction $f(p+\delta u)$ suivant les puissances de δu, nous aurons

$$f(p+\delta u) = f(p) + f'(p)\,\delta u + f''(p)\,\frac{(\delta u)^2}{2} + \text{etc.}$$

Actuellement imaginons que l'on a développé le coefficient $f'(p)$ de δu dans une suite de termes périodiques, et que k soit le premier terme de ce développement, c'est-à-dire la somme de tous le termes non périodiques.

Par ce moyen l'équation différentielle précédente prendra la forme

$$(4)\ldots\ 0 = \frac{d^2\cdot\delta u}{dv^2} + (1+m^2k)\,\delta u + m^2\Sigma\, U'\cos(\alpha v+\beta)$$
$$+ m^2\, Q\,\delta u + m^2\, Q'(\delta u)^2 + \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on remarque que les termes principaux de la valeur de δu sont donnés par la fonction explicite de v représentée par $\Sigma\, U'\cos(\alpha v+\beta)$, on en conclura qu'en supprimant d'abord la fonction inconnue $m^2Q\,\delta u + m^2Q'(\delta u)^2 + \text{etc.}$, on a

$$\delta u = m^2\,\Sigma\frac{U'}{\alpha^2-1-m^2k}\cos(\alpha v+\beta)\,.$$

Donc, en supposant le coefficient α réductible à la forme $\alpha = 1 + bm^i$, on aura

$$\alpha^2 - 1 - m^2k = 2bm^i + b^2m^{2i} - m^2k;$$

et par conséquent l'ordre du coefficient U' ne pourra jamais s'abaisser que de deux unités, tout au plus, en acquérant le diviseur α^2-1-m^2k. Car le nombre désigné ici par k est par sa nature de l'ordre zéro. Telle est la cause qui détruit la possibilité d'un abaissement de l'ordre i, lorsque l'exposant i est plus grand que deux.

Il n'y aurait que le cas très-particulier de $i=2$ et $2b=k$, qui ferait exception, puisqu'alors le coefficient U' s'abaisserait de quatre unités en acquérant le diviseur $\alpha^2-1-m^2k = \frac{k^2}{4}m^4$.

Si l'on n'avait pas précisément $2b=k$, mais que la différence $2b-k$ fût un nombre absolu très-petit, on ne pourrait plus estimer

l'accroissement de $\frac{U'}{(2b-k)m^2+b^2m^4}$ par rapport à U', d'après la simple considération de l'abaissement de deux unités dans l'ordre du coefficient U'.

207. Si l'on suppose i plus grand que 2, et b une petite fraction, on pourra négliger $2bm^i$ par rapport à m^2k. Alors le terme de δu qui appartient à une telle valeur de α devient

$$\delta u = -\frac{U'}{k}\cos(\alpha v + \beta);$$

de sorte que, à l'égard de ces argumens, on a l'équation identique

$$m^2k\,\delta u + m^2U'\cos(\alpha v+\beta) = 0.$$

Voilà pourquoi, même en supposant qu'on a laissé l'équation (4) sous la forme

$$0 = \frac{d^2.\delta u}{dv^2} + \delta u + \Sigma U'\cos(\alpha v + \beta),$$

il est permis de supposer *nulle la somme* des termes qui composent le coefficient U' dans les cas particuliers où le coefficient α est excessivement peu différent de l'unité. C'est d'après cette remarque qu'on peut se rendre raison de l'équation

$$0 = \frac{5(1-2\mu)}{4} - A_0^{(18)} + \frac{(4+m)}{4}A_1^{(17)} - (5+m)A_1^{(19)},$$

que l'on voit rapportée dans la page 217 du troisième volume de la Mécanique céleste.

La complication du sujet rend cette explication nécessaire : autrement on pourrait penser que l'équation précédente n'est qu'un artifice de calcul, imaginé pour faire disparaître l'absurdité qui naîtrait de l'intégration directe de l'équation

$$0 = \frac{d^2u}{dv^2} + u + \frac{3m^2}{2a_1}\left\{\begin{matrix}\frac{5(1-2\mu)}{4} - A_0^{(18)} + \frac{(4+m)}{m}A_1^{(17)} \\ -(5+m)A_1^{(19)}\end{matrix}\right\}\frac{a}{a'}e'\cos(v-mv+c'mv-\varpi')$$
$$+ \text{etc.}$$

d'après le principe général, qu'il faut diviser le coefficient de cet argument par $(1 - m + c'm)^2 - 1$ (Voyez pages 209-211 du troisième volume de la Mécanique céleste).

208. Considérons maintenant le cas où il s'agirait d'intégrer une équation de la forme

$$(5) \ldots \frac{d^2u}{dv^2} + u + m^2 f(u) + \mu^2 \varphi(u) + m^2 \Sigma\, U \cos(\alpha v + \beta) = 0;$$

μ^2 désignant un coefficient beaucoup plus petit que m^2. C'est à-peu-près ce qui a lieu lorsqu'on ajoute à l'action du Soleil les termes dus à la figure de la Terre. Supposons que l'on ait d'abord intégré cette équation en posant $\mu^2 = 0$. Après cela, on restituera la fonction $\varphi(u)$ qui avait été supprimée, et on imaginera que $q + \delta u$ soit la valeur complète de u, q étant la première.

En développant $\varphi(q + \delta u)$, on aura

$$\varphi(q + \delta u) = \varphi(q) + \varphi'(q)\, \delta u + \text{etc.}$$

et l'équation (5), en négligeant les termes multipliés par $\mu^2 \delta u$, prendra cette forme

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u + m^2 f(u) + \mu^2 \varphi(q) + m^2 \Sigma\, U \cos(\alpha v + \beta) = 0.$$

Donc, en réduisant $\varphi(q)$ dans une suite de termes périodiques, et posant

$$\varphi(q) = \Sigma\, H \cos(iv + l),$$

on aura

$$\mu^2 \Sigma \frac{H}{i^2 - 1 - m^2 k} \cos(iv + l)$$

pour la suite correspondante de termes qui doivent être ajoutés à la valeur primitive de u désignée par q. Voilà le principe général. Cependant il y a un cas particulier dans lequel cette approximation ne serait pas suffisante.

En effet supposons le coefficient i très-peu différent de l'unité, et admettons que le même argument $iv + l$ puisse être *réproduit* par le développement de la fonction $f(u)$, lorsqu'on la développe en tenant compte des termes multipliés par μ^2 qui entrent dans l'expression complète de u.

Représentons par

$$\delta u = \mu^2 G \lambda \cos(iv + l)$$

ce terme spécial de la valeur de u, et regardons G comme un coefficient *inconnu*, et λ comme le facteur connu par la forme même du coefficient i. En développant $\phi(q)$, on aura un terme de cette forme

$$\phi(q) = G' \lambda \cos(iv + l),$$

G' étant un coefficient *censé connu*. Et en développant $f(u)$ on aura nécessairement un terme de la forme

$$f(u) = \mu^2 G M \lambda \cos(iv + l);$$

où M est un facteur *censé connu*.

Cela posé, l'équation (5), en y considérant seulement l'argument $iv + l$ dont il est ici question, donnera un résultat de cette forme

$$0 = \frac{d^2 \cdot \delta u}{dv^2} + (1 + m^2 k)\delta u + (m^2 \mu^2 G M + \mu^2 G')\lambda \cos(iv + l).$$

Mais, *par hypothèse*, cette équation doit être satisfaite en prenant

$\delta u = \mu^2 G \lambda \cos(iv + l)$, et par conséquent $\frac{d^2 \cdot \delta u}{dv^2} = -i^2 \mu^2 G \lambda \cos(iv + l)$; partant l'on a

$$0 = (1 + m^2 k - i^2) G + G' + m^2 G M;$$

ou bien

$$G = \frac{G'}{i^2 - 1 - m^2 k - m^2 M}.$$

Ainsi, en faisant $i = 1 + b m^x$, nous aurons

$$G = \frac{G'}{2b m^x + b^2 m^{2x} - m^2 (k + M)};$$

et par conséquent

$$\delta u = \frac{G' \mu^2}{2b m^x + b^2 m^{2x} - m^2 (k + M)} \lambda \cos(iv + l).$$

Donc, en supposant la quantité M *comparable* avec k, il est possible que la différence $2b m^x + b^2 m^{2x} - m^2 (k + M)$ soit beaucoup plus petite que $2b m^x + b^2 m^{2x} - m^2 k$. Alors le calcul du coefficient G de

cet argument, que l'on aurait fait sans avoir égard à l'existence de la quantité désignée par M, pourrait être très-fautif.

L'argument $(3f-2g)v$ défini dans le n.° 164 présente un exemple de cas singulier. Mais, pour découvrir à son égard la quantité désignée par M, il faudra ajouter le terme de la forme

$$\frac{\mu^2 N\gamma^2}{a} \sin(3fv - 2gv + 2\theta)$$

avec celui de la forme

$$\frac{f(e,\gamma)}{a} e \cos\left\{v - \int\left(1 - \sqrt{1+Q'}\right) dv\right\},$$

et exécuter les développemens qui réproduisent chacun de ces deux argumens jusqu'aux quantités de l'ordre que l'on jugera suffisant.

Si l'on fait attention que la réproduction d'un même argument dans les approximations successives dépend principalement *de la qualité* des différentes parties qui concourent à sa formation, on sentira *a priori* que malgré la proximité des deux quantités $3f-2g$, $\sqrt{1+Q'}$, il doit y avoir une différence entre les deux facteurs Mm^2, Q' qui leurs appartiennent respectivement. S'il n'était question que d'une approximation grossière, on pourrait supposer $Mm^2 = Q'$; mais cela ne suffit pas pour décider la question relative à la grandeur absolue de l'équation ayant pour argument $(3f-2g-c)v$. Le seul moyen de faire cesser les doutes sur ce point est de ne faire aucun cas de ces idées qui tendent à abréger des calculs pénibles par des moyens indirects et incertains, et de s'en tenir strictement aux résultats certains que l'on peut obtenir en demeurant fidèles à la méthode des approximations successives.

CHAPITRE TROISIÈME.

TRANSFORMATIONS PRÉPARATOIRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE, ET DÉVELOPPEMENT ULTÉRIEUR DES FONCTIONS DE LA FORCE PERTURBATRICE.

§ I.

Transformation préliminaire des trois équations (A) données dans le n.° 204.

209. Quelle que soit la valeur complète de la variable s, rien n'empêche de la partager en deux parties distinctes: et en considérant la forme de son expression algébrique trouvée dans le n.° 200, il est assez naturel d'opérer ce partage en posant

$$s_{,} = \gamma \sin[v - \int(1 - \sqrt{1+P})\,dv],$$
$$s = s_{,} + \delta s.$$

Mais il ne faut pas perdre de vue que la lettre γ représente ici un coefficient *absolument constant* du premier ordre, et que $-P$ désigne la fonction des élémens des *deux* orbites qui constitue le coefficient de $\gamma \sin[v - \int(1 - \sqrt{1+P})\,dv]$ dans le développement du second membre de la première des équations (A).

Cela posé, si lon néglige le terme insensible multiplié par $\frac{dP}{dv}$, il est clair que l'on a

$$\frac{ds_{,}}{dv} = \gamma\sqrt{1+P}\cos[v - \int(1 - \sqrt{1+P})\,dv],$$
$$\frac{d^2 s_{,}}{dv^2} = -\gamma(1+P)\sin[v - \int(1 - \sqrt{1+P})\,dv],$$

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s = \frac{d^2.\delta s}{dv^2} + \delta s - P\gamma \sin[v - \int(1 - \sqrt{1+P})\,dv].$$

Donc, en faisant pour plus de simplicité

$$v - \int(1 - \sqrt{1+P})\,dv = gv - \int\theta\,dv,$$

$$U = \frac{1}{\sigma a_{,}\psi(e,\gamma)} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv},$$

$$R' = \frac{1}{\sigma a_{,}\psi(e,\gamma)} \left\{ \frac{\Omega_{(1)} - \frac{ds}{dv} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv}}{1 + 2\int U\,dv} \right\},$$

la première des équations (A) deviendra

$$(1) \ldots\ldots \frac{d^2.\delta s}{dv^2} + \delta s = R' + P\gamma \sin(gv - \int\theta\,dv).$$

Et, conformément aux principes exposés dans le paragraphe précédent, on déterminera la quantité désignée par P, en développant la fonction R' dans une série de termes périodiques, et égalant ensuite à zéro la totalité des termes qui multiplient $\gamma \sin(gv - \int\theta\,dv)$ dans le second membre de cette équation.

210. Maintenant, si l'on fait pour plus de simplicité

$$R'' = \frac{1}{\sigma a_{,}\psi(e,\gamma)} \left\{ \frac{\Omega_{(2)} - \frac{du}{dv} \cdot \frac{d\Omega}{u^2 dv} - (1 + ss)^{-\frac{3}{2}}\, 2\int U\,dv}{1 + 2\int U\,dv} \right\},$$

la seconde des équations (A) prendra cette forme

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{(1+ss)^{-\frac{3}{2}}}{a_{,}\psi(e,\gamma)} = R''.$$

Or, en faisant $s = s_{,} + \delta s$, l'on a

$$(1+ss)^{-\frac{3}{2}} = (1 + s_{,}^2)^{-\frac{3}{2}} \left\{ 1 + \frac{\delta s(2s_{,} + \delta s)}{1 + s_{,}^2} \right\}^{-\frac{3}{2}}.$$

Donc, en représentant par $1 + V\delta s$ le développement du second facteur de ce produit, nous aurons

$$(2) \ldots \frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{(1+s_{,}^2)^{-\frac{3}{2}}}{a_{,}\psi(e,\gamma)} = R'' + \frac{(1+s_{,}^2)^{-\frac{3}{2}} V\delta s}{a_{,}\psi(e,\gamma)}.$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les deux premiers termes de la valeur de u sont de cette forme

$$u = \frac{f(e,\gamma)}{a} F(\gamma) + \frac{f(e,\gamma)}{a} e \cos[v - \int (1 - \sqrt{1+Q'})\, dv];$$

où e désigne un coefficient *absolument constant* du *premier* ordre, et $F(\gamma)$ le premier terme qui naît du développement en termes périodiques du radical $\sqrt{1+s_{,}^2}$.

D'après cela, et surtout pour nous rapprocher le plus qu'il est possible (à l'égard des premiers termes) des formes qui ont lieu dans le cas fort simple des forces perturbatrices nulles, nous imaginerons la valeur complète de u partagée dans les trois parties suivantes ; savoir

$$u = \frac{f(e,\gamma)}{a}\sqrt{1+s_{,}^2} + \frac{f(e,\gamma)}{a} e \cos(cv - \int \varpi\, dv) + \frac{\delta u}{a};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$cv - \int \varpi\, dv = v - \int (1 - \sqrt{1+Q'})\, dv :$$

$-Q'$ représente la fonction des élémens des *deux* orbites qui multiplie le terme $\frac{f(e,\gamma)}{a} e \cos(cv - \int \varpi\, dv)$ dans le développement en termes périodiques du second membre de l'équation (2).

211. En négligeant les termes insensibles multipliés par les coefficiens différentiels de a ou de Q', on trouvera que la substitution de la valeur précédente de u dans le premier membre de l'équation (2) donne

$$(3) \ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\left(\frac{\delta u}{a}\right)}{dv^2} + \frac{\delta u}{a} - \frac{(1+s_{,}^2)^{-\frac{3}{2}}}{a_{,}\psi(e,\gamma)} + \frac{f(e,\gamma)}{a} \left\{ \frac{d^2\sqrt{(1+s_{,}^2)}}{dv^2} + \sqrt{1+s_{,}^2} \right\} \\ &= \frac{f(e,\gamma)}{a} Q' e \cos(cv - \int \varpi\, dv) + \frac{(1+s_{,}^2)^{-\frac{3}{2}} V\delta s}{a_{,}\psi(e,\gamma)} + R'' \end{aligned} \right\}.$$

Mais, en différentiant deux fois la fonction $\sqrt{1+s_{,}^2}$, l'on obtient l'équation identique

$$\frac{d^2\sqrt{(1+s_{\prime}^2)}}{dv^2}+\sqrt{1+s_{\prime}^2}=(1+s_{\prime}^2)^{-\frac{3}{2}}\left\{(1+s_{\prime}^2)\left(1+s_{\prime}^2+s_{\prime}\frac{d^2s_{\prime}}{dv^2}\right)+\frac{ds_{\prime}^2}{dv^2}\right\}.$$

Donc, en observant que $s_{\prime}=\gamma\sin[v-\int(1-\sqrt{1+P})\,dv]$, il viendra

$$1+s_{\prime}^2+s_{\prime}\frac{d^2s_{\prime}}{dv^2}=1-Ps_{\prime}^2;\quad (1+s_{\prime}^2)\left(1+s_{\prime}^2+s_{\prime}\frac{d^2s_{\prime}}{dv^2}\right)=1-(1-P)s_{\prime}^2-Ps_{\prime}^4;$$

$$(1+s_{\prime}^2)\left(1+s_{\prime}^2+s_{\prime}\frac{d^2s_{\prime}}{dv^2}\right)+\frac{ds_{\prime}^2}{dv^2}=$$

$$1+\gamma^2+P\gamma^2\cos(2gv-2\int\theta dv)-P\gamma^4\sin^4(gv-\int\theta dv);$$

ou bien

$$(1+s_{\prime}^2)\left(1+s_{\prime}^2+s_{\prime}\frac{d^2s_{\prime}}{dv^2}\right)+\frac{ds_{\prime}^2}{dv^2}=$$

$$\left(1+\gamma^2-\tfrac{3}{8}P\gamma^4\right)+P\gamma^2\left(1+\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\cos\left(2gv-2\int\theta dv\right)-\tfrac{1}{8}P\gamma^4\sin\left(4gv-4\int\theta dv\right).$$

Maintenant, si l'on observe que

$$(1+s_{\prime}^2)^{-\frac{3}{2}}V\delta s=(1+ss)^{-\frac{3}{2}}-(1+s_{\prime}^2)^{-\frac{3}{2}},$$

on verra que au lieu de l'équation (3) l'on a celle-ci

$$(4)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\left(\frac{\delta u}{a}\right)}{dv^2}+\dfrac{\delta u}{a}=R''\\[2ex]+\dfrac{f(e,\gamma)}{a}Q'e\cos(cv-\int\varpi dv)-\dfrac{1}{a}\left\{f(e,\gamma)(1+\gamma^2)(1+s_{\prime}^2)^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{a(1+ss)^{-\frac{3}{2}}}{a_{\prime}\psi(e,\gamma)}\right\}\\[2ex]+\dfrac{f(e,\gamma)}{a}P\gamma^2(1+s_{\prime}^2)^{-\frac{3}{2}}\left\{\frac{3}{8}\gamma^2-(1+\frac{1}{2}\gamma^2)\cos(2gv-2\int\theta dv)+\frac{1}{8}\gamma^2\cos(4gv-4\int\theta dv)\right\}\end{array}\right\}.$$

D'après les principes exposés dans le paragraphe précédent on doit déterminer le rapport $\frac{a}{a_{\prime}}$ en égalant à zéro la fonction des élémens des *deux* orbites composée de la totalité des termes explicitement indépendans de v, qui entrent dans le développement, en termes périodiques, du second membre de cette équation: et la valeur de Q' doit être déterminée en égalant à zéro la fonction semblable qui constitue le coefficient de $\frac{f(e,\gamma)}{a}e\cos(c'v-\int\varpi dv)$ dans le même développement.

Après avoir satisfait à ces deux conditions, l'équation (4) prendra cette forme

$$(5) \ldots \quad \frac{d^2\left(\frac{\delta u}{\mathrm{a}}\right)}{dv^2} + (1 + K)\frac{\delta u}{\mathrm{a}} + \frac{1}{\mathrm{a}}\Sigma M \cos(\alpha v - \int \beta dv) = 0,$$

où a, k, M, β doivent être considérées, en général, comme des fonctions des élémens des deux orbites suceptibles de varier avec une lenteur excessive.

212. Cependant il est essentiel de faire observer que cette circonstance n'empêchera pas d'intégrer l'équation (5), en prenant

$$\frac{\delta u}{\mathrm{a}} = \frac{1}{\mathrm{a}}\Sigma \frac{M}{(\alpha + \beta)^2 - 1 - k}\cos(\alpha v + \int \beta dv).$$

En effet, si l'on fait pour plus de simplicité

$$N = \frac{M}{\mathrm{a}[(\alpha + \beta)^2 - 1 - k]},$$

l'on obtient, en différentiant cette expression de $\frac{\delta u}{a}$,

$$\frac{d^2\left(\frac{\delta u}{\mathrm{a}}\right)}{dv^2} + (1 + k)\frac{\delta u}{\mathrm{a}} = \Sigma\left(\frac{d^2N}{dv^2} - \frac{M}{\mathrm{a}}\right)\cos(\alpha v + \int \beta dv)$$
$$- \Sigma\left\{N\frac{d\beta}{d\alpha} + (\alpha + 2\beta)\frac{dN}{dv}\right\}\sin(\alpha v + \int \beta dv).$$

Donc, en supposant que

$$\frac{\delta u}{\mathrm{a}} = Y + \Sigma N \cos(\alpha v + \int \beta dv)$$

soit l'expression exacte de $\frac{\delta u}{\mathrm{a}}$ qui satisfait à l'équation (5), on aura, pour déterminer Y, l'équation

$$0 = \frac{d^2Y}{dv^2} + (1 + k)Y + \Sigma\frac{d^2N}{dv^2}\cos(\alpha v + \int \beta dv)$$
$$- \Sigma\left\{N\frac{d\beta}{dv} + (\alpha + 2\beta)\frac{dN}{dv}\right\}\sin(\alpha v + \int \beta dv).$$

Mais, par hypothèse, les coefficiens différentiels $\frac{d\mathrm{a}}{dv}$, $\frac{dk}{dv}$, $\frac{dM}{dv}$, $\frac{d\beta}{dv}$ sont exprimés par des quantités très-petites, composées de termes

périodiques dont les argumens (en comparaison des argumens $\alpha v + \int \beta dv$) croissent avec une lenteur excessive. Donc la valeur de Y sera donnée par une fonction de la forme

$$Y = \Sigma G \cos\left\{(\alpha + f)v + l + \int \beta dv\right\} + \Sigma G' \sin\left\{(\alpha + f)v + l + \int \beta dv\right\},$$

dans laquelle les coefficiens G et G' seront nécessairement insensibles. En conséquence il est inutile d'avoir égard à ces derniers termes, et il suffit de prendre

$$\delta u = \Sigma \frac{M}{(\alpha + \beta)^2 - 1 - k} \cos\left(\alpha v + \int \beta dv\right).$$

Il suit de là qu'en multipliant l'équation (4) par a, l'on peut réduire la recherche de δu à l'intégration de cette équation

$$(6)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2 \delta u}{dv^2} + \delta u = \mathrm{a}R'' \\ + f(e, \gamma)\, Q' e \cos\left(cv - \int \varpi dv\right) - \left\{f(e, \gamma)(1 + \gamma^2)(1 + s_{,}^2)^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{\mathrm{a}(1 + ss)^{-\frac{3}{2}}}{\mathrm{a}_{,}\psi(e, \gamma)}\right\} \\ + f(e, \gamma) P\gamma^2 (1 + s_{,}^2)^{-\frac{3}{2}}\left\{\frac{3}{8}\gamma^2 - (1 + \frac{1}{2}\gamma^2)\cos\left(2gv - 2\int \theta dv\right) + \frac{1}{8}\gamma^2 \cos\left(4gv - 4\int \theta dv\right)\right\} \end{array}\right\}.$$

213. Considérons maintenant la troisième des équations (A). En faisant pour plus de simplicité

$$u_{,} = f(e, \gamma)\left\{\sqrt{1 + s_{,}^2} + e \cos\left(cv - \int \varpi dv\right)\right\},$$

nous avons

$$u = \frac{u_{,}}{\mathrm{a}} + \frac{\delta u}{\mathrm{a}} = \frac{u_{,}}{\mathrm{a}}\left(1 + \frac{\delta u}{u_{,}}\right).$$

Donc, en substituant cette valeur de u dans celle de dt, il viendra

$$dt = \frac{dv\, \mathrm{a}^2 u_{,}^{-2} \left(1 + 2\int U dv\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sigma \mathrm{a}_{,} \psi(e, \gamma)}\left(1 + \dfrac{\delta u}{u_{,}}\right)^2}.$$

Posons

$$\left\{\sqrt{1 + s_{,}^2} + e \cos\left(cv - \int \varpi dv\right)\right\}^{-2} = X,$$

et représentons par λ la fonction des deux élémens e et γ qui constitue le premier terme non périodique du développement de la

fonction X en termes périodiques; alors la valeur de $\frac{X}{\lambda}$ sera composée de l'unité suivie par une série de termes périodiques. Cela posé, écrivons la valeur précédente de dt sous cette forme

$$(7) \ldots . dt = \frac{dv\,\lambda\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}\right)^{2}\sqrt{\frac{(\mathrm{a}_{\prime}^{3})}{\sigma}}}{[f(e\,,\gamma)]^{2}\sqrt{[\psi(e\,,\gamma)]}} \cdot \frac{\frac{X}{\lambda}\left(1 + 2\int U dv\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^{2}};$$

et rappelons nous que, conformément à l'analyse exposée dans le paragraphe précédent, on peut regarder comme arbitraires les deux constantes représentées par les fonctions $f(e\,,\gamma)$, $\psi(e\,,\gamma)$. D'après cela, rien n'empêche de supposer

$$(8) \ldots . \qquad [f(e\,,\gamma)]^{2}\sqrt{\psi(e\,,\gamma)} = \lambda;$$

ce qui rapproche la forme de l'expression de dt de celle qui a lieu dans le cas où l'on suppose nulles les forces perturbatrices, du moins en faisant abstraction des deux facteurs qui sont explicitement fonction de la force perturbatrice. Mais on peut rendre ce rapprochement plus intime, et simplifier en même tems le second membre de l'équation (6), en faisant

$$(9) \ldots . \qquad f(e\,,\gamma)\,(1 + \gamma^{2}) = \frac{1}{\psi(e\,,\gamma)}.$$

Alors les équations (8) et (9) donnent

$$f(e,\gamma) = \lambda^{\frac{2}{3}}(1 + \gamma^{2})^{\frac{1}{3}}, \qquad \psi(e\,,\gamma) = \lambda^{-\frac{2}{3}}(1 + \gamma^{2})^{-\frac{4}{3}},$$

et il s'agit de déterminer la valeur de λ.

214. Pour cela remarquons d'abord que dans le développement de la fonction X il n'y a que les termes compris dans la série

$$(1 + s_{\prime}^{2})^{-1} + 3e^{2}(1 + s_{\prime}^{2})^{-2}\cos^{2}\left(cv - \int \varpi dv\right) + 5e^{4}(1 + s_{\prime}^{2})^{-3}\cos^{4}\left(cv - \int \varpi dv\right) + \text{etc.}$$

qui peuvent donner une partie non périodique. Ensuite observons que pour avoir la valeur cherchée de λ il suffit de prendre la partie constante fournie par le développement des puissances paires de $\cos\left(cv - \int \varpi dv\right)$.

Donc, en désignant par b_i le terme non périodique qui se trouve dans le développement de $(1+s_i^2)^{-i}$ (i étant un nombre entier), nous aurons

$$(10)\ldots.\lambda = b_1 + \frac{3}{2}e^2b_2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{1\cdot 2}e^4b_3 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}e^6b_4 + \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on remarque que l'on a

$$1+s_i^2 = 1+\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\gamma^2}{2}\cos(2gv-2\int\theta dv),$$

ou bien

$$1+s_i^2 = \left(\frac{\sqrt{(1+\gamma^2)}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{(1+\gamma^2)}-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{1+\gamma^2}+1)(\sqrt{1+\gamma^2}-1)\cos(2gv-2\int\theta dv);$$

et par conséquent

$$(1+s_i^2)^{-i} = \left(\frac{1+\sqrt{(1+\gamma^2)}}{2}\right)^{-2i}\left\{1+\left(\frac{\sqrt{(1+\gamma^2)}-1}{\sqrt{(1+\gamma^2)}+1}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{(1+\gamma^2)}-1}{\sqrt{(1+\gamma^2)}+1}\right)\cos(2gv-2\int\theta dv)\right\}^{-i},$$

on en conclura que d'après la formule (6) donnée dans la page 276 du second volume des Exercices de calcul intégral de M. *Legendre* l'on a

$$(11)\quad b_i = \left(\frac{1+\sqrt{(1+\gamma^2)}}{2}\right)^{-2i}\left\{1+i^2\left(\frac{\sqrt{(1+\gamma^2)}-1}{\sqrt{(1+\gamma^2)}+1}\right)^2 + \left(\frac{i\cdot i+1}{1\cdot 2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{(1+\gamma^2)}-1}{\sqrt{(1+\gamma^2)}+1}\right)^4 + \text{etc.}\right\}.$$

Il est maintenant facile de former la valeur de λ avec le degré d'approximation que l'on jugera convenable. Il est d'ailleurs évident que cette valeur devient fort simple en supposant $\gamma = 0$; ce qui donne $b_i = 1$; et par conséquent $\lambda = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}$.

215. Si l'on développe les fonctions

$$\left(1+\frac{\delta u}{u_i}\right)^{-2}, \quad (1+2\int U dv)^{-\frac{1}{2}},$$

l'on aura

$$\left(1+\frac{\delta u}{u_i}\right)^{-2}(1+2\int U dv)^{-\frac{1}{2}} = (1-A)(1+B),$$

en posant pour plus de simplicité

$$A = 2\frac{\delta u}{u_i} - 3\left(\frac{\delta u}{u_i}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta u}{u_i}\right)^3 - 5\left(\frac{\delta u}{u_i}\right)^5 + \text{etc.};$$

$$B = -\int U dv + \frac{3}{2}\left(\int U dv\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\int U dv\right)^3 + \frac{35}{8}\left(\int U dv\right)^4 - \text{etc.}$$

Maintenant, si l'on représente par $1+\Pi$ la fonction des élémens des *deux* orbites, explicitement indépendante de v, qui se trouve dans le produit $\frac{X}{\lambda}(1-A)(1+B)$ développé dans une série de termes périodiques, on pourra écrire l'équation (7) sous la forme

$$dt = dv\left(\frac{a}{a_{,}}\right)^2 \sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}}(1+\Pi)\frac{X}{\lambda}\cdot\frac{(1-A)(1+B)}{1+\Pi};$$

ou bien sous la forme

$$dt = dv\left(\frac{a}{a_{,}}\right)^2 \sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}}(1+\Pi)\frac{X}{\lambda}$$
$$-dv\left(\frac{a}{a_{,}}\right)^2 \sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}}(1+\Pi)\frac{(A-B+AB+\Pi)}{1+\Pi};$$

d'où l'on tire

$$(12)\ldots\ dt = dv\left(\frac{a}{a_{,}}\right)^2(1+\Pi)\sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}}$$
$$+dv\left(\frac{a}{a_{,}}\right)^2 \sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}}\left(\frac{X}{\lambda}-1\right)$$
$$-dv\left(\frac{a}{a_{,}}\right)^2 \sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}}\left(\frac{X}{\lambda}Y+\Pi\right),$$

en faisant pour plus de simplicité

$$Y = A - B + AB.$$

Donc, en désignant par n un coefficient *absolument constant* tel que l'on ait

$$(13)\ldots\ \int dv\left(\frac{a}{a_{,}}\right)^2(1+\Pi)\sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}} = \frac{v}{n}+\frac{1}{n}\int\zeta dv,$$

il viendra, en intégrant les deux membres de l'équation (12),

$$nt = v+\int\zeta dv+\int\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\left(\frac{X}{\lambda}-1\right)dv-\int\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\left(\frac{X}{\lambda}Y+\Pi\right)dv.$$

Mais, à cause de la lenteur excessive avec laquelle varient les termes séculaires renfermés dans l'expression de ζ, comparativement aux argumens qui naissent du développement des fonctions $\left(\frac{X}{\lambda}-1\right)$, $\frac{XY}{\lambda}+\Pi$, on peut sans erreur sensible faire sortir du signe intégral le facteur $\frac{1+\zeta}{1+\Pi}$, et supposer

$$(14) \ldots \quad nt = v + \int \zeta dv + \left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)dv$$
$$- \left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left(\frac{X}{\lambda}Y + \Pi\right)dv.$$

Au reste il est évident que cela revient à négliger des termes très-petits multipliés par $\frac{d\zeta}{dv}$ ou $\frac{d\Pi}{dv}$, puisque l'expression rigoureuse de nt est

$$v = nt + \int \zeta dv + \left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)dv - \left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left(\frac{X}{\lambda}Y + \Pi\right)dv$$
$$- \int\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right) d\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right) + \int\left(\frac{X}{\lambda}Y + \Pi\right) d\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right).$$

Or, en associant les argumens de $\frac{d\zeta}{dv}$ ou $\frac{d\Pi}{dv}$ avec ceux de $\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)$ ou de $\left(\frac{X}{\lambda}Y + \Pi\right)$, il n'en peut résulter aucun terme capable de devenir sensible, même après l'intégration qu'il faut exécuter.

Pour imiter à l'égard de nt ce qui a été fait à l'égard des deux autres coordonnées polaires s et u, nous partagerons aussi l'expression complète de nt en posant

$$[nt] = v + \int \zeta dv + \left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)dv,$$
$$\delta nt = -\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left(\frac{X}{\lambda}Y + \Pi\right)dv;$$

ce qui donne

$$nt = [nt] + \delta nt.$$

216. En résumant les résultats trouvés dans ce paragraphe, nous en conclurons qu'en faisant

$$s_{\prime} = \gamma \sin(gv - \int \theta dv)$$
$$u_{\prime} = \lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{1}{3}}\left\{\sqrt{1 + s_{\prime}^2} + e\cos(cv - \int \varpi dv)\right\},$$

et

$$s = s_{\prime} + \delta s, \qquad u = \frac{u_{\prime}}{a} + \frac{\delta u}{a},$$

l'on a, pour déterminer δs et δu en fonction de v, les deux équations suivantes :

$$(\text{I}) \ldots \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d^2 \cdot \delta s}{dv^2} + \delta s\right)(1 + 2\int U dv) = P s_{\prime}(1 + 2\int U dv) - U\left(\frac{ds_{\prime}}{dv} + \frac{d \cdot \delta s}{dv}\right) \\ &\qquad + \frac{\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{4}{3}}}{\sigma a_{\prime}}\left\{\frac{s}{u} \cdot \frac{d\Omega}{du} + \frac{1+ss}{u^2} \cdot \frac{d\Omega}{ds}\right\} \end{aligned} \right\};$$

$$(\mathrm{II})\ldots\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\left(1+2\int U dv\right)=\frac{\mathrm{a}}{\sigma \mathrm{a}_1}\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{4}{3}}\left\{\frac{d\Omega}{du}+\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega}{ds}\right\} \\ -U\left(\frac{du_1}{dv}+\frac{d.\delta u}{dv}\right)+Q'\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{1}{3}}\left(1+2\int U dv\right) e\cos\left(cv-\int\varpi dv\right) \\ -\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{4}{3}}(1+s_1^2)^{-\frac{3}{2}}\,2\int U dv-\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{4}{3}}\left\{(1+s_1^2)^{-\frac{3}{2}}-(1+ss)^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1}\right\} \\ +\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{4}{3}}P\gamma^2\left(1+2\int U dv\right)(1+s_1^2)^{-\frac{3}{2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{8}\gamma^2-\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\right)\cos\left(2gv-2\int\theta dv\right) \\ \qquad +\frac{1}{8}\gamma^2\cos\left(4gv-4\int\theta dv\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\},$$

où l'on a fait

$$U=\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{4}{3}}}{\sigma \mathrm{a}_1}\cdot\frac{d\Omega}{u^2.dv}.$$

Ensuite l'on aura δnt au moyen de l'équation

$$(\mathrm{III})\ldots\ \delta nt=-\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left[\frac{Y}{\lambda}\cdot\left\{\sqrt{1+s_1^2}+e\cos\left(cv-\int\varpi dv\right)\right\}^{-2}+\Pi\right]dv$$

Par ce procédé on aura décomposé les trois coordonnées polaires s, $\mathrm{a}u$, nt chacune en deux parties, dont la première partie sera respectivement

$$s_1=\gamma\sin\left(gv-\int\theta dv\right),$$

$$u_1=\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{1}{3}}\left\{\sqrt{1+s_1^2}+e\cos\left(cv-\int\varpi dv\right)\right\},$$

$$[nt]=v+\int\zeta dv+\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left[\frac{1}{\lambda}\left\{\sqrt{1+s_1^2}+e\cos\left(cv-\int\varpi dv\right)\right\}^{-2}-1\right]dv.$$

Et les deux argumens $gv-\int\theta dv$, $cv-\int\varpi dv$ devront être déterminés d'après les équations

$$gv-\int\theta dv=v-\int\left(1-\sqrt{1+P}\right)dv,$$

$$cv-\int\varpi dv=v-\int\left(1-\sqrt{1+Q'}\right)dv,$$

lorsque les fonctions P et Q' des élémens des *deux* orbites auront été trouvées conformément à la règle enseignée pour cet objet.

§ 2.

Développement des fonctions de la force perturbatrice due à l'action du Soleil suivant les puissances de δs, δu, δnt, et formation des équations différentielles qui déterminent ces trois variables.

217. Faisons pour plus de simplicité

$$\mu^2 = \frac{M'}{\sigma}\left(\frac{\mathrm{a}}{\alpha'}\right)^3\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1}\right); \qquad q = \lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{4}{3}}; \qquad b^2 = \frac{\mathrm{a}}{\alpha'},$$

et convenons de supprimer ici les termes multipliés par la latitude s' du Soleil que l'on voit dans les formules du n.° 27. Alors, en posant

$$R_1 = q\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha'u')^3 \sin(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^4} + \frac{3}{8}\,b^2\frac{(\alpha'u')^4\sin(v-v')}{(\mathrm{a}u)^5} \\ +\frac{15}{8}\,b^2\frac{(\alpha'u')^4\sin(3v-3v')}{(\mathrm{a}u)^5} - \frac{3}{2}\,b^2\frac{ss(\alpha'u')^4\sin(v-v')}{(\mathrm{a}u)^5} \\ +\frac{5}{8}\,b^4\frac{(\alpha'u')^5\sin(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^6} - \frac{15}{4}\,b^4\frac{ss(\alpha'u')^5\sin(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^6} \\ +\frac{35}{16}\,b^4\frac{(\alpha'u')^5\sin(4v-4v')}{(\mathrm{a}u)^6} \end{array}\right\};$$

$$R_2 = q\left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha'u')^3}{(\mathrm{a}u)^4} + \frac{45}{16}\,b^4\frac{(\alpha'u')^5}{(\mathrm{a}u)^6} - \frac{15}{4}\,b^4 ss\frac{(\alpha'u')^5}{(\mathrm{a}u)^6}\right\};$$

$$R_3 = q\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha'u')^3\cos(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^4} + \frac{33}{8}\,b^2\frac{(\alpha'u')^4\cos(v-v')}{(\mathrm{a}u)^5} \\ +\frac{15}{8}\,b^2\frac{(\alpha'u')^4\cos(3v-3v')}{(\mathrm{a}u)^5} - \frac{3}{2}\,b^2\frac{ss(\alpha'u')^4\cos(v-v')}{(\mathrm{a}u)^5} \\ +5\,b^4\frac{(\alpha'u')^5\cos(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^6} - \frac{15}{4}\,b^4\frac{ss(\alpha'u')^5\cos(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^6} \\ +\frac{35}{16}\,b^4\frac{(\alpha'u')^5\cos(4v-4v')}{(\mathrm{a}u)^6} \end{array}\right\};$$

$$R_4 = q\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{(\alpha'u')^3}{(\mathrm{a}u)^3} + \frac{9}{16}\,b^4\frac{(\alpha'u')^5}{(\mathrm{a}u)^5} - \frac{9}{4}\,b^4 ss\frac{(\alpha'u')^5}{(\mathrm{a}u)^5}\right\};$$

$$R_5 = q\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha' u')^3 \cos(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^3} + \frac{9}{8}b^2\frac{(\alpha' u')^4\cos(v-v')}{(\mathrm{a}u)^4} \\ +\frac{15}{8}b^2\frac{(\alpha' u')^4\cos(3v-3v')}{(\mathrm{a}u)^4} - \frac{3}{2}b^2\frac{ss(\alpha' u')^4\cos(v-v')}{(\mathrm{a}u)^4} \\ +\frac{5}{4}b^4\frac{(\alpha' u')^5\cos(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^5} - \frac{15}{4}b^4\frac{ss(\alpha' u')^5\cos(2v-2v')}{(\mathrm{a}u)^5} \\ +\frac{35}{16}b^4\frac{(\alpha' u')^5\cos(4v-4v')}{(\mathrm{a}u)^5} \end{array}\right\},$$

nous aurons

$$\frac{q}{\sigma\mathrm{a}_1}\left\{\frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega'}{du} + \frac{1+ss}{u^2}\cdot\frac{d\Omega'}{ds}\right\} = -\mu^2 s(R_2+R_3),$$

$$\frac{q}{\sigma}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1}\right)\left\{\frac{d\Omega'}{du} + \frac{s}{u}\cdot\frac{d\Omega'}{ds}\right\} = -\mu^2\ (R_4+R_5),$$

$$U = \frac{q}{\sigma\mathrm{a}_1}\cdot\frac{d\Omega'}{u^2 dv} = -\mu^2 R_1\ ;$$

$$B = \mu^2\int R_1 dv + \frac{3}{2}\mu^4\left(\int R_1 dv\right)^2 + \frac{5}{2}\mu^6\left(\int R_1 dv\right)^3 + \frac{35}{8}\mu^8\left(\int R_1 dv\right)^4 :$$

et les équations (I), (II) trouvées dans le paragraphe précédent deviendront (en considérant seulement l'action du Soleil)

$$(\mathrm{I})'\ldots\left\{\begin{array}{c} -\frac{d^2.\delta s}{dv^2} - \delta s = \\ -P\gamma\sin\left(gv - \int\theta dv\right) + \mu^2(s_1+\delta s)(R_2+R_3) \\ -\mu^2\left(\frac{ds_1}{dv} + \frac{d.\delta s}{dv}\right)R_1 - 2\mu^2\left(\frac{d^2.\delta s}{dv^2} + \delta s - Ps_1\right)\int R_1 dv \end{array}\right\};$$

$$(\mathrm{II})'\ldots\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad -\frac{d^2.\delta u}{dv^2} - \delta u = \\ -Q'\frac{qe}{1+\gamma^2}\cos\left(cv - \int\varpi dv\right) + q\left\{(1+s_1^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1}(1+ss)^{-\frac{3}{2}}\right\} \\ +\mu^2(R_4+R_5) - \mu^2\left(\frac{du_1}{dv} + \frac{d.\delta u}{dv}\right)R_1 \\ -2\mu^2\left\{\frac{d^2.\delta u}{dv^2} + \delta u + q(1+s_1^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{Q'.qe}{1+\gamma^2}\cos\left(cv - \int\varpi dv\right)\right\}\int R_1 dv \\ -Pq\gamma^2(1+s_1^2)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - 2\mu^2\int R_1 dv\right)\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{8}\gamma^2 - \left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\right)\cos\left(2gv - 2\int\theta dv\right) \\ \quad + \quad \frac{1}{8}\gamma^2\cos\left(4gv - 4\int\theta dv\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

218. La variable indépendante étant v, il est nécessaire d'éliminer de ces équations la longitude v' du Soleil, et de l'exprimer par une fonction de la longitude v de la Lune. Pour cela il est facile d'obtenir une formule générale par le procédé suivant.

La troisième des équations (IX) données dans le n.° 55 peut être mise sous cette forme

$$n'(t+f')=v'-F(v').$$

Donc, en faisant

$$m=\frac{n'}{n}=\frac{\textit{moyen mouvement du Soleil}}{\textit{moyen mouvement de la Lune}},$$

on aura

$$v'=m(nt+nf')+F(v').$$

Maintenant imaginons intégrées les équations du mouvement de la Lune, et par conséquent l'équation (14) trouvée dans le paragraphe précédent réduite à la forme

$$n(t+f_{,})=v+\int\zeta dv+f(v);$$

$f(v)$ désignant une fonction de v composée de termes périodiques.

En éliminant le tems t entre ces deux équations et faisant pour plus de simplicité

$$\mathrm{A}=mn(f'-f_{,}),$$

il est clair que l'on a

$$v'=\mathrm{A}+mv+m\int\zeta dv+mf(v)+F(v').$$

Donc, en appliquant à cette équation le théorème connu de *Lagrange* sur le retour des suites, on en pourra tirer la valeur d'une fonction quelconque de v' exprimée par une fonction du polynome $\mathrm{A}+mv+m\int\zeta dv+mf(v)$. Mais il suffit à notre objet d'avoir l'expression de

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{i(v-v')+i'(c'v'-\varkappa')\right\};$$

i et i' représentant des nombres entiers.

Ainsi, en posant

$$V=\Lambda+mv+m\int\zeta dv+mf(v),$$

$$K=iv-iV+i'(c'V-x'),$$

on aura, en vertu du théorème cité,

$$\sin\left\{i(v-v')+i'(c'v'-x')\right\}=\sin K+(i'c'-i)\cos K.F(V)+\frac{(i'c'-i)}{1.2}d.\frac{\cos K.\overline{F(V)}^2}{dV}$$

$$+\frac{(i'c'-i)}{1.2.3}d^2.\frac{\cos K.\overline{F(V)}^3}{dV^2}+\text{etc.}$$

219. En exécutant les opérations indiquées, cette formule donne un résultat, dans lequel un argument quelconque est de la forme $i(v-V)+(i'+p)(c'V-x')$; p représentant un nombre entier positif ou négatif, y compris zéro. Donc, en écrivant

$$\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}[p] \text{ au lieu de } \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\left\{i(v-V)+(i'+p)(c'V-x')\right\},$$

on pourra représenter par

$$A\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}[0], \quad A'\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}[-1], \quad A''\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}[+1], \text{ etc.}$$

la suite des termes qui naissent du développement du second membre de l'équation précédente.

Cela posé, si l'on réduit à

$$F(v')=2\varepsilon'\sin(c'v'-x')-\left(\frac{3}{4}\varepsilon'^2+\frac{1}{8}\varepsilon'^4\right)\sin(2c'v'-2x')$$

$$+\left(\frac{1}{3}\varepsilon'^3+\frac{1}{8}\varepsilon'^5\right)\sin(3c'v'-3x')-\frac{5}{32}\varepsilon'^4\sin(4c'v'-4x')$$

$$+\frac{3}{40}\varepsilon'^5\sin(5c'v'-5x')$$

la valeur de $F(v')$ qui serait donnée par les développemens indiqués dans le § 2 du second Chapitre (en faisant $\gamma'=0$ et négligeant les puissances de ε' supérieures à la cinquième), l'on obtiendra le résultat suivant, où l'on a fait $c'=1$ dans les coefficiens des termes périodiques :

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{i(v-v')+i'(c'v'-\varkappa')\right\}=$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[0]\left\{1-(i'-i)^2\left(\varepsilon'^2+\frac{9}{64}\varepsilon'^4\right)+(i'-i)^4\frac{\varepsilon'^4}{4}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[-1]\left\{\begin{matrix}-(i'-i)\varepsilon'+(i'-i)(i'-i-1)\left(\frac{3}{8}\varepsilon'^3+\frac{\varepsilon'^5}{8}\right)+(i'-i)(i'-i-1)^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon'^3+\frac{11}{192}\varepsilon'^5\right)\\ -(i'-i)(i'-i-1)^3\frac{\varepsilon'^5}{8}-(i'-i)(i'-i-1)^4\frac{\varepsilon'^5}{12}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[+1]\left\{\begin{matrix}(i'-i)\varepsilon'+(i'-i)(i'-i+1)\left(\frac{3}{8}\varepsilon'^3+\frac{\varepsilon'^5}{8}\right)-(i'-i)(i'-i+1)^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon'^3+\frac{11}{192}\varepsilon'^5\right)\\ -(i'-i)(i'-i+1)^3\frac{\varepsilon'^5}{8}+(i'-i)(i'-i+1)^4\frac{\varepsilon'^5}{12}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[-2]\left\{\begin{matrix}(i'-i)\left(\frac{3}{8}\varepsilon'^2+\frac{1}{16}\varepsilon'^4\right)+(i'-i)(i'-i-2)\left(\frac{1}{2}\varepsilon'^2-\frac{1}{6}\varepsilon'^4\right)\\ -(i'-i)(i'-i-2)^2\frac{3}{8}\varepsilon'^4-(i'-i)(i'-i-2)^3\frac{\varepsilon'^4}{6}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[+2]\left\{\begin{matrix}-(i'-i)\left(\frac{3}{8}\varepsilon'^2+\frac{1}{16}\varepsilon'^4\right)+(i'-i)(i'-i+2)\left(\frac{1}{2}\varepsilon'^2-\frac{1}{6}\varepsilon'^4\right)\\ +(i'-i)(i'-i+2)^2\frac{3}{8}\varepsilon'^4-(i'-i)(i'-i+2)^3\frac{\varepsilon'^4}{6}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[-3]\left\{\begin{matrix}-(i'-i)\left(\frac{\varepsilon'^3}{6}+\frac{\varepsilon'^5}{16}\right)-(i'-i)(i'-i-3)\left(\frac{3}{8}\varepsilon'^3-\frac{\varepsilon'^5}{64}\right)\\ -(i'-i)(i'-i-3)^2\left(\frac{\varepsilon'^3}{6}-\frac{91}{384}\varepsilon'^5\right)+(i'-i)(i'-i-3)^3\frac{3}{16}\varepsilon'^5\\ +(i'-i)(i'-i-3)^4\frac{\varepsilon'^5}{24}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[+3]\left\{\begin{matrix}(i'-i)\left(\frac{\varepsilon'^3}{6}+\frac{\varepsilon'^5}{16}\right)-(i'-i)(i'-i+3)\left(\frac{3}{8}\varepsilon'^3-\frac{\varepsilon'^5}{64}\right)\\ +(i'-i)(i'-i+3)^2\left(\frac{\varepsilon'^3}{6}-\frac{91}{384}\varepsilon'^5\right)+(i'-i)(i'-i+3)^3\frac{3}{16}\varepsilon'^5\\ -(i'-i)(i'-i+3)^4\frac{\varepsilon'^5}{24}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[-4]\left\{(i'-i)\frac{5}{64}\varepsilon'^4+(i'-i)(i'-i-4)\frac{91}{384}\varepsilon'^4+(i'-i)(i'-i-4)^2\frac{3}{16}\varepsilon'^4+(i'-i)(i'-i-4)^3\frac{\varepsilon'^4}{24}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[+4]\left\{-(i'-i)\frac{5}{64}\varepsilon'^4+(i'-i)(i'-i+4)\frac{91}{384}\varepsilon'^4-(i'-i)(i'-i+4)^2\frac{3}{16}\varepsilon'^4+(i'-i)(i'-i+4)^3\frac{\varepsilon'^4}{24}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}[-5]\left\{\begin{matrix}-(i'-i)\frac{3}{80}\varepsilon'^5-(i'-i)(i'-i-5)\frac{9}{64}\varepsilon'^5+(i'-i)(i'-i-5)^2\frac{59}{384}\varepsilon'^5 \\ -(i'-i)(i'-i-5)^3\frac{\varepsilon'^5}{16}-(i'-i)(i'-i-5)^4\frac{\varepsilon'^5}{120}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}[+5]\left\{\begin{matrix}(i'-i)\frac{3}{80}\varepsilon'^5-(i'-i)(i'-i+5)\frac{9}{64}\varepsilon'^5+(i'-i)(i'-i+5)^2\frac{59}{384}\varepsilon'^5 \\ -(i'-i)(i'-i+5)^3\frac{\varepsilon'^5}{16}+(i'-i)(i'-i+5)^4\frac{\varepsilon'^5}{120}\end{matrix}\right\}.$$

220. Comme $f(v)$ représente ici une fonction périodique de v, il reste à développer les fonctions $\begin{smallmatrix}\sin \\ \cos\end{smallmatrix}[p]$ suivant les puissances de $mf(v)$, afin de pouvoir obtenir la valeur de $\begin{smallmatrix}\sin \\ \cos\end{smallmatrix}[i(v-v')+i'(c'v'-\varkappa')]$ exprimée par une suite de termes périodiques. On exécutera cette transformation au moyen de la série

$$\sin\left\{\alpha+\beta mf(v)\right\}=\sin\alpha+\beta m\cos\alpha.f(v)-\frac{\beta^2m^2}{2}\sin\alpha.\overline{f(v)}^2$$
$$-\frac{\beta^3m^3}{2.3}\cos\alpha.\overline{f(v)}^3+\text{etc.}$$

après que l'on aura trouvé la valeur de $f(v)$.

Mais en cela l'on sera favorisé par une circonstance qu'il est important de remarquer. En effet la série précédente procède suivant les puissances de $mf(v)$, où m désigne une fraction que nous regardons comme une quantité du *premier ordre.* Donc il suffit que la valeur de $f(v)$ soit développée jusqu'aux quantités de l'ordre $i-1$ pour qu'il soit possible de développer $\sin\{\alpha+\beta mf(v)\}$ jusqu'aux quantités de l'ordre i inclusivement. Or cela est effectivement suffisant dans une théorie qui, comme celle-ci, donne les résultats cherchés par une suite d'approximations successives.

Pour mieux développer cette idée, imaginons que l'on a partagé $f(v)$ en deux parties $f'(v)+f''(v)$, dont la seconde est inconnue, mais d'un ordre supérieur à la première au moins d'une unité. Il est clair qu'en laissant $f''(v)$ sous les signes périodiques l'on aurait

$$\sin\{\alpha+m\beta f(v)\}=\sin\{\alpha+\beta mf''(v)\}+m\beta f'(v)\cos\{\alpha+m\beta f''(v)\}$$
$$-\frac{m^2\beta^2}{2}\overline{f'(v)}^2\cos\{\alpha+m\beta f''(v)\}-\text{etc.}$$

Donc, en supposant d'abord $f''(v)=0$, et développant ensuite en termes périodiques la série

$$\sin\alpha+\beta m f'(v)\cos\alpha-\frac{m^2\beta^2}{2}\overline{f'(v)}^2\cos\alpha-\text{etc.},$$

il n'y aura qu'à remplacer α par $\alpha+m\beta f''(v)$ dans le résultat ainsi trouvé, pour en conclure la valeur de la série précédente. Parvenu au point où ce changement sera nécessaire, l'on connaîtra déjà une portion de $f''(v)$: ainsi l'on pourra faire sortir cette portion des signes périodiques, et continuer indéfiniment ce mode de développement par cette espèce de bissection de la fonction représentée par $f(v)$.

221. D'après l'analyse du paragraphe précédent, l'on a

$$f(v)=\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left(\frac{X}{\lambda}-1\right)dv+\delta nt.$$

Donc, en imaginant développées en termes périodiques les différentes fonctions de la force perturbatrice dans l'hypothèse de $\delta nt=0$, il suffira de changer mv en $mv+m\delta nt$ pour tenir compte de la fonction δnt, qui d'abord avait été supprimée. Pour indiquer ce changement, nous conviendrons de représenter par

$$(\alpha' u')^3\sin(2v-2v')+\delta[(\alpha' u')^3\sin(2v-2v')]$$

la valeur complète que doit avoir la fonction $(\alpha' u')^3\sin(2v-2v')$: et la même notation sera employée à l'égard des autres fonctions analogues de v'.

Toutefois il ne faudra pas perdre de vue que dans le développement de ces fonctions affectées de la caractéristique δ nous tiendrons compte non seulement de la première, mais aussi des autres puissances de $m\delta nt$, lorsque cela sera nécessaire pour avoir exactement le coefficient numérique d'un terme dont l'ordre sera déterminé. Il faut donc se représenter le simbole $\delta[(\alpha' u')^3\sin(2v-2v')]$ comme tenant lieu d'une série ordonnée suivant les puissances de $m\delta nt$.

222. Actuellement imaginons que dans les valeurs de R_1, R_2 . . . R_5 posées dans le n.° 216 l'on a fait $au=u_1+\delta u$, $s=s_1+\delta s$, et qu'en outre l'on a développé les fonctions de v' par le procédé qui

vient d'être indiqué. Il est clair qu'il en résultera pour chacune de ces fonctions une nouvelle série ordonnée suivant les puissances et les produits de δu, δs et $m\delta nt$. Donc, en convenant de représenter par R' la valeur que prend $R_{,}$, en y faisant $au = u_{,}$, $s = s_{,}$ et $\delta nt = 0$, l'on pourra faire

$$R_{,} = R' + \delta R'$$

et considérer le simbole $\delta R'$ comme tenant lieu de la totalité des termes qui naissent du développement de $R_{,}$ suivant les puissances de δu, δs et $m\delta nt$. Nous ferons de même

$$R_{2} = R'' + \delta R'' ; \qquad R_{3} = R''' + \delta R''' ;$$
$$R_{4} = R^{\text{IV}} + \delta R^{\text{IV}} ; \qquad R_{5} = R^{\text{V}} + \delta R^{\text{V}}.$$

Cela posé, voici les termes de $\delta R'$, $\delta R'' \ldots \delta R^{\text{V}}$, qui, en général, seront suffisans pour développer les perturbations de la Lune dues à l'action du Soleil :

$$\begin{aligned}
\delta R' = & - q\,\frac{(a'u')^3 \sin(2v - 2v')}{u_{,}^4}\left\{6\,\frac{\delta u}{u_{,}} - 15\left(\frac{\delta u}{u_{,}}\right)^2 + 30\left(\frac{\delta u}{u_{,}}\right)^3 - \frac{105}{2}\left(\frac{\delta u}{u_{,}}\right)^4\right\} \\
& - qb^2\,\frac{(a'u')^4 \sin(v - v')}{u_{,}^5}\left\{\frac{15}{8}\cdot\frac{\delta u}{u_{,}} - \frac{45}{8}\left(\frac{\delta u}{u_{,}}\right)^2 - \frac{15}{2}s_{,}^2\,\frac{\delta u}{u_{,}}\right\} \\
& - qb^2\,\frac{(a'u')^4 \sin(3v - 3v')}{u_{,}^5}\left\{\frac{75}{8}\cdot\frac{\delta u}{u_{,}} - \frac{225}{8}\left(\frac{\delta u}{u_{,}}\right)^2\right\} \\
& - \frac{15}{4}qb^4\,\frac{(a'u')^5 \sin(2v - 2v')}{u_{,}^6}\cdot\frac{\delta u}{u_{,}} - \frac{105}{8}qb^4\,\frac{(a'u')^5 \sin(4v - 4v')}{u_{,}^6}\cdot\frac{\delta u}{u_{,}} \\
& + q\,\frac{\partial\,[(a'u')^3 \sin(2v - 2v')]}{u_{,}^4}\left\{\frac{3}{2} - 6\,\frac{\delta u}{u_{,}} + 15\left(\frac{\delta u}{u_{,}}\right)^2\right\} \\
& + qb^2\,\frac{\partial\,[(a'u')^4 \sin(v - v')]}{u_{,}^5}\left\{\frac{3}{8} - \frac{15}{8}\cdot\frac{\delta u}{u_{,}} - \frac{3}{2}s_{,}^2\right\} \\
& + qb^2\,\frac{\partial\,[(a'u')^4 \sin(3v - 3v')]}{u_{,}^5}\left\{\frac{15}{8} - \frac{75}{8}\cdot\frac{\delta u}{u_{,}}\right\} \\
& - qb^2\,\frac{(a'u')^4 \sin(v - v')}{u_{,}^5}\left\{2s_{,}\delta s + (\delta s)^2\right\}\left\{\frac{3}{2} - \frac{15}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{,}}\right\} \\
& + \frac{5}{8}qb^4\,\frac{\partial\,[(a'u')^5 \sin(2v - 2v')]}{u_{,}^6} + \frac{35}{16}qb^4\,\frac{\partial\,[(a'u')^5 \sin(4v - 4v')]}{u_{,}^6} ;
\end{aligned}$$

$$\delta R'' = -q\,\frac{(a'u')^3}{u_{\prime}^4}\left\{6\,\frac{\delta u}{u_{\prime}} - 15\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^2\right\} + \frac{3}{2}\,q\,\frac{\delta\,[(a'u')^3]}{u_{\prime}^4};$$

$$\delta R''' = -q\,\frac{(a'u')^3\cos(2v-2v')}{u_{\prime}^4}\left\{6\,\frac{\delta u}{u_{\prime}} - 15\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{165}{8}\,qb^2\,\frac{(a'u')^4\cos(v-v')}{u_{\prime}^5}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}} - \frac{75}{8}\,qb^2\,\frac{(a'u')^4\cos(3v-3v')}{u_{\prime}^5}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}}$$

$$+ q\,\frac{\delta\,[(a'u')^3\cos(2v-2v')]}{u_{\prime}^4}\left\{\frac{3}{2} - 6\,\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right\}$$

$$+\frac{33}{8}\,qb^2\,\frac{\delta\,[(a'u')^4\cos(v-v')]}{u_{\prime}^5} + \frac{15}{8}\,qb^2\,\frac{\delta\,[(a'u')^4\cos(3v-3v')]}{u_{\prime}^5};$$

$$\delta R^{\text{IV}} = -q\,\frac{(a'u')^3}{u_{\prime}^3}\left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}} - 3\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^2 + 5\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^3\right\}$$

$$+ q\,\frac{\delta\,[(a'u')^3]}{u_{\prime}^3}\left\{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right\} - \frac{45}{16}\,qb^4\,\frac{(a'u')^5}{u_{\prime}^5}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}};$$

$$\delta R^{\text{V}} = -q\,\frac{(a'u')^3\cos(2v-2v')}{u_{\prime}^3}\left\{\frac{9}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}} - 9\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^2 + 15\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^3\right\}$$

$$-qb^2\,\frac{(a'u')^4\cos(v-v')}{u_{\prime}^4}\left\{\frac{9}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}} - \frac{45}{4}\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^2 - 6s_{\prime}^2\,\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right\}$$

$$-qb^2\,\frac{(a'u')^4\cos(3v-3v')}{u_{\prime}^4}\left\{\frac{15}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}} - \frac{75}{4}\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{25}{4}\,qb^4\,\frac{(a'u')^5\cos(2v-2v')}{u_{\prime}^5}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}} - \frac{175}{16}\,qb^4\,\frac{(a'u')^5\cos(4v-4v')}{u_{\prime}^5}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}}$$

$$+ q\,\frac{\delta\,[(a'u')^3\cos(2v-2v')]}{u_{\prime}^3}\left\{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}} + 9\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^2\right\}$$

$$+ qb^2\,\frac{\delta\,[(a'u')^4\cos(v-v')]}{u_{\prime}^4}\left\{\frac{9}{8} - \frac{9}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right\}$$

$$+ qb^2\,\frac{\delta\,[(a'u')^4\cos(3v-3v')]}{u_{\prime}^4}\left\{\frac{15}{8} - \frac{15}{2}\cdot\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right\}$$

$$-\frac{3}{2}\,qb^2\,\frac{(a'u')^4\cos(v-v')}{u_{\prime}^4}\left\{2s_{\prime}\,\delta s + (\delta s)^2\right\}.$$

223. Convenons de faire dans le second membre de l'équation (II)′ donnée dans le n.° 217

$$T = (1 + s_{,}^{2})^{-\frac{3}{2}}, \qquad T + \delta T = \{1 + (s_{,} + \delta s)^{2}\}^{-\frac{3}{2}}.$$

En développant ces deux fonctions il suffira de retenir les termes suivans

$$T = 1 - \frac{3}{2}s_{,}^{2} + \frac{15}{8}s_{,}^{4};$$

$$\delta T = \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{4}s_{,}^{2} - \frac{105}{16}s_{,}^{4}\right)\{2s'\delta s + (\delta s)^{2}\} + \left(\frac{15}{8} - \frac{105}{16}s_{,}^{2}\right)\{2s_{,}\delta s + (\delta s)^{2}\}^{2}.$$

Donc, en substituant pour $s_{,}$ sa valeur $\gamma\, sin(gv - \int\theta\, dv)$, nous aurons

$$T = \left(1 - \frac{3}{4}\gamma^{2} + \frac{45}{61}\gamma^{4}\right) + \gamma^{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{15}{16}\gamma^{2}\right)cos(2gv - 2\int\theta\, dv)$$
$$+ \frac{15}{64}\gamma^{4}\, cos(4gv - 4\int\theta\, dv);$$

$$\delta T = \left\{\begin{matrix}\left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{8}\gamma^{2} - \frac{315}{128}\gamma^{4}\right) - \gamma^{2}\left(\frac{15}{8} - \frac{105}{32}\gamma^{2}\right)cos(2gv - 2\int\theta\, dv) \\ - \frac{105}{128}\gamma^{4}\, cos(4gv - 4\int\theta\, dv)\end{matrix}\right\}\{2s_{,}\delta s + (\delta s)^{2}\}$$
$$+ \left\{\frac{15}{8} - \frac{105}{32}\gamma^{2} + \frac{105}{32}\gamma^{2}\, cos(2gv - 2\int\theta\, dv)\right\}\{2s_{,}\delta s + (\delta s)^{2}\}^{2}.$$

224. Supposons maintenant que l'on a développé le second membre de l'équation (I)′, et que $\frac{3}{2}\mu^{2} + \frac{3}{2}\mu^{2}H$ représente le coefficient constant qui multiplie δs, ou, pour parler plus exactement, la fonction des élémens des deux orbites multipliée par δs. Il paraîtrait assez naturel de faire passer le terme $\left(\frac{3}{2}\mu^{2} + \frac{3}{2}\mu^{2}H\right)\delta s$ dans le premier membre de cette équation, et de l'intégrer après l'avoir réduite à la forme

$$-d^{2}\frac{\delta s}{dv^{2}} - \left(1 + \frac{3}{2}\mu^{2} + \frac{3}{2}\mu^{2}H\right)\delta s = \Sigma A\, sin(pv + q).$$

Mais cela exigerait la connaissance préalable du coefficient H; et il est facile d'éviter cette difficulté, en observant qu'il suffit à notre objet de découvrir successivement les différens termes des quantités cherchées.

Si l'on fait abstraction des cas singuliers définis dans le n.° 208, l'on pourra, en général, intégrer l'équation précédente en la considérant sous la forme

$$-d^{2}\frac{\delta s}{dv^{2}} - \left(1 + \frac{3}{2}\mu^{2}\right)\delta s = \frac{3}{2}\mu^{2}H\delta s + \Sigma A\, sin(pv + q).$$

En effet, le coefficient $\frac{3}{2}\mu^2 H$ est par sa nature d'un ordre supérieur au principal terme de la fonction $\Sigma A \sin(pv + q)$.

Donc, on peut d'abord supposer $H = 0$, et prendre

$$\delta s = \Sigma \frac{A}{\beta} \sin(pv + q);$$

où pour plus de simplicité l'on a fait $\beta = p^2 - 1 - \frac{3}{2}\mu^2$.

Cette première valeur de δs étant substituée dans le second membre de l'équation différentielle précédente, l'on trouvera en réitérant l'intégration

$$\delta s = \Sigma \left(\frac{A}{\beta} + \frac{3}{2}\mu^2 H \frac{A}{\beta^2}\right) \sin(pv + q).$$

Donc, en faisant servir cette dernière expression de δs pour une nouvelle intégration, il est clair qu'en continuant ce procédé, l'on aura

$$\delta s = \Sigma A \sin(pv + q) \left\{ \frac{1}{\beta} + \frac{3}{2}\mu^2 H \frac{1}{\beta^2} + \left(\frac{3}{2}\mu^2 H\right)^2 \frac{1}{\beta^3} + \text{etc.} \right\};$$

ou bien, en sommant la série infinie,

$$\delta s = \Sigma \frac{A}{\beta - \frac{3}{2}\mu^2 H} \sin(pv + q).$$

Or il est évident que cette expression de δs est conforme à celle qui serait donnée immédiatement par l'intégration de l'équation

$$-\frac{d^2 \cdot \delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^2 H\right)\delta s = \Sigma A \sin(pv + q).$$

Un raisonnement tout-à-fait semblable s'applique à l'équation différentielle en δu. Tel est le motif qui nous a déterminé à donner aux équations différentielles (I)′, (II)′ la forme suivante

$$(\text{I})'' \ldots \left\{ \begin{array}{c} -\frac{d^2 \cdot \delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2}\mu^2\right)\delta s = \\ \gamma \sin(gv - \int \theta dv) \left\{ \mu^2 (R_2 + R_3) + 2\mu^2 P \int R_1 dv + P \right\} \\ + \mu^2 \delta s\left(R_2 + R_3 - \frac{3}{2}\right) - \mu^2\left(\frac{ds_1}{dv} + \frac{d \cdot \delta s}{dv}\right) R_1 - 2\mu^2 \left(\frac{d^2 \cdot \delta s}{dv^2} + \delta s\right) \int R_1 dv \end{array} \right\};$$

$$
(\mathrm{II})'' \ldots \left\{
\begin{array}{l}
-\frac{d^2\cdot\delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2}\mu^2\right)\delta u = \\
-\frac{Q'q}{1+\gamma^2}\, e\cos(cv - \int\varpi dv) + q\left(1 - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{45}{64}\gamma^4\right) \\
+ q\gamma^2\left\{\left(1 - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{15}{16}\gamma^2\right) + P\left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right)\right\}\cos(2gv - 2\int\theta dv) \\
+ q\gamma^4\left\{\left(1 - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}\right)\frac{15}{64} + \frac{P}{4}\right\}\cos(4gv - 4\int\theta dv) \\
+ \mu^2\left(R_4 + R_5 + \frac{3}{2}\delta u\right) - \mu^2\left(\frac{du_{\prime}}{dv} + \frac{d\cdot\delta u}{dv}\right)R_{\prime} - q\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}\right)\delta T \\
- 2q\mu^2\left(1 - \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{45}{64}\gamma^4\right)\int R_{\prime}dv - 2\mu^2\left(\frac{d^2\cdot\delta u}{dv^2} + \delta u\right)\int R_{\prime}dv \\
+ \frac{2\mu^2 q Q'}{1+\gamma^2}\, e\cos(cv - \int\varpi dv)\int R_{\prime}\, dv \\
- 2\mu^2 q\gamma^2\left\{\frac{3}{4} - \frac{15}{16}\gamma^2 + P\left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right)\right\}\cos(2gv - 2\int\theta dv)\int R_{\prime} dv \\
- 2\mu^2 q\gamma^4\left(\frac{15}{64} + \frac{P}{4}\right)\cos(4gv - 4\int\theta dv)\int R_{\prime}\, dv
\end{array}
\right\}.
$$

225. Pour fixer les idées à l'égard du facteur μ^2 qui multiplie dans les équations différentielles les fonctions de la force perturbatrice, il faut se rappeler que d'après l'équation (13) du paragraphe précédent nous avons

$$\frac{1+\zeta}{n} = \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}\right)^2(1+\Pi)\sqrt{\frac{(\mathrm{a}_{\prime}^3)}{\sigma}},$$

et que dans le n.° 47 l'on a fait

$$n' = \sqrt{\frac{(\sigma')}{a'^3}} = \sqrt{\frac{(M'+M'')}{a'^3}}.$$

Donc, en multipliant ces deux équations et faisant ensuite le carré, il viendra

$$\left(\frac{n'}{n}\right)^2(1+\zeta)^2 = \frac{M'}{\sigma}\left(1 + \frac{M''}{M'}\right)\left(\frac{\mathrm{a}}{a_{\prime}}\right)^3\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}\right)(1+\Pi)^2;$$

ou bien

$$m^2(1+\zeta)^2 = \mu^2\left(1 + \frac{M''}{M'}\right)(1+\Pi)^2;$$

d'où l'on tire

$$\mu^2 = \frac{m^2\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)^2}{1+\frac{M''}{M'}}.$$

Ainsi il est évident que μ^2 doit être considéré comme un facteur du *second* ordre, puisque le premier terme de son expression analytique est égal à m^2.

Le facteur q doit être considéré comme une quantité de l'*ordre zéro*; car en développant sa valeur on obtient, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au *quatrième*,

$$q = 1 + e^2 + \gamma^2 + e^4 + \tfrac{1}{2}e^2\gamma^2.$$

Le facteur $b^2 = \frac{a}{a'}$ sera traité comme une quantité du *second* ordre, d'après le motif purement arithmétique que la moyenne distance de la Lune à la Terre divisée par la moyenne distance du Soleil à la Terre est une fraction fort peu différente de $\frac{1}{400}$, et par conséquent du même ordre de grandeur que le carré du rapport $\frac{n'}{n} = m$.

Il est presque superflu d'ajouter que les quantités constantes e et γ doivent être regardées chacune comme du *premier* ordre.

226. Mais il peut être utile de faire remarquer dès ce moment que le rapport $\frac{a}{a_{,}}$ diffère de l'unité d'une quantité du *second* ordre. En effet il est évident que $\frac{1}{2}\mu^2$ est le premier terme qui entre dans le développement de la fonction $\mu^2 R_4$. Donc, en égalant à zéro la totalité des termes non périodiques qui se trouveront dans le second membre de l'équation (II)'', l'on aura une équation de la forme

$$q\left(1-\frac{a}{a_{,}}\right)\left(1-\tfrac{3}{4}\gamma^2+\tfrac{45}{64}\gamma^4\right)+\tfrac{1}{2}\mu^2+\text{etc.} = 0;$$

d'où l'on tirera

$$\frac{a}{a_{,}} = 1+\frac{1}{2}\mu^2+\text{etc.}$$

Avec une légère réflexion on voit aussi que la quantité désignée par Π dans le n.° 215 est nécessairement du *quatrième* ordre. Car

cette fonction des élémens des deux orbites s'obtient en égalant à $1+\Pi$ la totalité des termes non périodiques qui naissent du développement du produit

$$\left(1+\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^{-2}\left(1-2\mu^2\int R_{\prime}dv\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or il est clair qu'il n'y a que les trois fonctions $\left(\frac{\delta u}{u_{\prime}}\right)^2$, $\mu^4\left(\int R_{\prime}dv\right)^2$, $\mu^2\frac{\delta u}{u_{\prime}}\int R_{\prime}dv$, chacune du quatrième ordre au moins, qui peuvent concourir à la formation du premier terme qui entre dans l'expression de Π.

227. En arrêtant davantage la pensée sur l'origine analytique de cette même fonction séculaire des élémens de l'orbite du Soleil, on ne tarde pas à reconnaître que ce n'est pas elle qui fournit le *premier* terme de l'équation séculaire de la Lune. En effet les trois fonctions que l'on vient de nommer ne peuvent introduire dans Π qu'un terme non périodique du *sixième* ordre de la forme $Am^4\varepsilon'^2$, tandis que l'expression de $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}$ en renferme un du *quatrième* ordre de la forme $Am^2\varepsilon'^2$.

Ce dernier est immédiatement donné par le développement de la fonction

$$\mu^2R_4=\tfrac{1}{2}\mu^2q\,\frac{(\alpha'u')^3}{(\mathrm{a}u)^3}+\text{etc.}$$

en y faisant $q=1$, $\mathrm{a}u=1$, $\alpha'u'=1+\varepsilon'^2+\varepsilon'\cos(c'v'-\varkappa')+\text{etc.}$, et se rappelant qu'après l'élimination de v' l'on obtient

$$(\alpha'u')^3=1+\tfrac{3}{2}\varepsilon'^2+\text{etc.}$$

(Voyez n.° 147). Il suit de là que l'équation qui doit déterminer $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}$ est de la forme

$$q\left(1-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}\right)\left(1-\tfrac{3}{4}\gamma^2+\tfrac{45}{64}\gamma^4\right)+\tfrac{1}{2}\mu^2+\tfrac{3}{4}\mu^2\varepsilon'^2+\text{etc.}=0,$$

et que par conséquent l'on a

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}=1+\tfrac{1}{2}\mu^2+\tfrac{3}{4}\mu^2\varepsilon'^2+\text{etc.};$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}}=1+\tfrac{1}{2}\mu^2+\tfrac{3}{4}\mu^2E'^2+\tfrac{3}{4}\mu^2(\varepsilon'^2-E'^2)+\text{etc.};$$

E' désignant l'excentricité de l'orbite du Soleil à une époque déterminée. Donc l'intégrale $\int dv \left(\frac{a}{a_{,}}\right)^2 (1 + \Pi) \sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}}$ qui remplace le moyen mouvement dans le mouvement troublé de la Lune (Voyez n.° 215) renfermera le terme

$$\frac{3}{2} m^2 \sqrt{\frac{(a_{,}^3)}{\sigma}} \int dv (\varepsilon'^2 - E'^2),$$

qui constitue la principale partie séculaire de la valeur du tems t exprimé en fonction de v (Voyez l'équation (12) du paragraphe précédent).

D'après cela l'on comprend qu'il était impossible de découvrir la cause de l'équation séculaire en se bornant à la chercher uniquement parmi les fonctions explicites de la force perturbatrice qui entrent dans la différentielle du tems t. Il fallait considérer les variations *insensibles* qui peuvent se trouver dans l'expression analytique du rayon vecteur de la Lune, et voir que leur existence pouvait devenir sensible dans l'expression de la longitude, en vertu de l'intégration qu'il faut exécuter sur le *carré* du rayon vecteur pour obtenir cette dernière coordonnée de la Lune. C'est ainsi que les très-petites variations de l'excentricité de l'orbite de la Terre deviennent plus sensibles en se transmettant à la Lune.

228. Si d'autres causes, différentes de l'attraction réciproque des Planètes, pouvaient faire varier lentement les élémens de l'orbite de la Terre, on calculerait d'une manière analogue les perturbations correspondantes du mouvement de la Lune.

Pour en donner un exemple fort simple, admettons l'existence d'une matière éthérée répandue autour du Soleil, et capable d'opposer une résistance très-petite au mouvement du globe de la Terre et à celui de la Lune. Mais, pour considérer uniquement les effets des variations des élémens de l'orbite de la Terre, nous ferons abstraction de l'altération que la matière éthérée peut produire directement dans le moyen mouvement de la Lune, quoiqu'elle soit la partie plus considérable de l'effet dû à cette cause.

Cela posé, rappelons nous qu'il est démontré que la résistance de matière éthérée produit une diminution *proportionnelle au tems* dans le demi-grand axe α' et l'excentricité ε' de l'orbite de la Terre. Donc, pour tenir compte des perturbations que cette cause peut introduire dans le mouvement de la Lune, il faudrait changer α' en $\alpha'-\alpha'Kn't$; ε' en $\varepsilon'-\varepsilon'K'n't$, et déterminer les deux coefficiens K et K' d'après les formules publiées dans le troisième volume de la Correspondance du *Bar. de Zach* (page 347): outre cela, il faudrait, à la rigueur, remplacer $n't$ par un binome de la forme $n't+K''n'^2t^2$ dans l'équation $n'(t+f')=v'-F(v')$. Alors l'élimination du temps t entre les deux équations

$$n'(t+f')+K''n'^2t^2=v'-F(v'), \qquad n(t+f_1)=v+\int\zeta dv+f(v),$$

donnerait

$$v'=\Lambda+mv+m\int\zeta dv+mf(v)+F(v')$$
$$+K''\left\{mv-mf_1+m\int\zeta dv+mf(v)\right\}^2.$$

Mais, en négligeant les termes très-petits, multipliés par KK'', ou par $K'K''$, il suffira de faire $n't=mv$, ce qui donnera

$$\alpha'^{-3}(1+3K\,mv+\text{etc.}) \quad \text{au lieu de} \quad \alpha'^{-3};$$
$$\varepsilon'^2(1-2K'mv+\text{etc.}) \quad \text{au lieu de} \quad \varepsilon'^2;$$

et par conséquent

$$\mu^2+3\mu^2Kmv+\text{etc.} \quad \text{au lieu de} \quad \mu^2.$$

Donc l'équation précédente, qui détermine le rapport $\frac{a}{a_1}$, donnera

$$\frac{a}{a_1}=1+\frac{1}{2}\mu^2+\frac{3}{2}\mu^2\varepsilon'^2+\left(\frac{3}{2}\mu^2K-\frac{3}{2}\mu^2\varepsilon'^2K'\right)mv+\text{etc.};$$

ce qui fait voir que la distance moyenne, a, de la Lune à la Terre reçoit une altération beaucoup plus petite que la distance moyenne α' du Soleil à la Terre, puisque les coefficiens K et K' sont ici multipliés par la fraction m^3. Cette valeur de $\frac{a}{a_1}$ donne

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2=1+3m^3(K-\varepsilon'^2K')v+\text{etc.}$$

Il suit de là, que l'intégrale $\int dv \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 (1+\Pi)\sqrt{\frac{a_1^3}{\sigma}}$ renfermera le terme

$$\frac{3}{2} m^3 (K - \varepsilon'^2 K') v^2 ,$$

qui représente l'effet *indirect* que cette cause hypothétique serait capable de produire dans le moyen mouvement de la Lune.

On a étendu la dénomination d'*équations séculaires* aux termes de cette forme. Mais il ne faut pas perdre de vue, que ceux-ci peuvent augmenter à l'infini; et qu'en cela ils sont absolument différens des termes semblables que l'on forme en développant des fonctions composées de termes périodiques, afin de pouvoir représenter pour quelques siècles seulement l'effet des équations séculaires qui sont dues à l'attraction réciproque des planètes.

229. Parmi les causes qui peuvent troubler indirectement le mouvement de la Lune il faut aussi admettre les perturbations périodiques que l'attraction de la Lune elle-même produit dans le mouvement du centre de gravité de la Terre: car ces dernières modifient les coordonnées elliptiques du Soleil, et deviennent, par conséquent, une espèce de nouvelle cause perturbatrice, dont il est facile de tenir compte par le procédé suivant, qu'on doit à D'Alembert.

Soient $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta s'$ les variations de u', v', s' dues à cette cause. En négligeant le carré du rapport de la masse de la Lune à la somme des masses de la Terre et de la Lune, on démontre que la perturbation de la Terre due à l'attraction de la Lune se réduit à donner

$$\delta u' = -\frac{M}{M+M''}\cdot\frac{u'^2}{u}\cos(v-v'),\quad \delta v' = \frac{M}{M+M''}\cdot\frac{u'}{u}\sin(v-v'),\quad \delta s' = \frac{M}{M+M''}\cdot\frac{u'}{u}s.$$

Donc il faudra d'abord changer $\alpha' u'$ en

$$\alpha' u' - \frac{M}{M+M''}\cdot\frac{(\alpha' u')^2}{a u} b^2 \cos(v-v')$$

dans les valeurs de R', R'' . . R^{v}. Après cela, si l'on change mv en

$$mv + m.\delta nt + \frac{M}{M+M''}\cdot b^2\cdot\frac{\alpha' u'}{a u}\sin(v-v')$$

dans les argumens qui naissent du développement des fonctions des coordonnées elliptiques, on tiendra compte, par ce changement, de la variation que ces mêmes développemens subissent par la perturbation de la longitude de la Lune, et par la perturbation de la longitude du Soleil due à l'action de la Lune. On verra dans le paragraphe suivant la démonstration de cette règle.

A l'égard des termes nés de la perturbation $\delta s'$, il faudrait recourir aux formules du n.° 27, où nous avons conservé les fonctions de s'.

§ 3.

Démonstration des formules qui expriment les perturbations de l'orbite de la Terre dues à l'action de la Lune.

230. Les expressions de $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta s'$ posées dans le n.° précédent ont été empruntées du tome 3.me de la Mécanique Céleste (Voyez p. 207). LAPLACE, en suivant D'ALEMBERT (Voyez tome VI de ses Opuscules p. 311-324), les déduit d'un théorème relatif au mouvement du centre commun de gravité d'une planète et de ses satellites qu'il avait démontré dans le premier volume (Voyez p. 132-134), conformément à l'analyse fort élégante publiée par LAGRANGE dans les Mémoires de l'Académie de Berlin (année 1777). Mais, pour faire connoître avec plus de précision le mode d'existence des formules qui déterminent ainsi les perturbations de la Terre dues à l'action de la Lune, je vais former, entre les coordonnées orthogonales et les coordonnés polaires, les équations, soit rigoureuses, soit approchées, desquelles dépend le mouvement de la Terre et celui de leur centre commun de gravité autour du Soleil.

231. Reprenons les dénominations du n.° 3, d'après lesquelles; $X+x'$, $Y+y'$, $Z+z'$ désignent les coordonnées du point M' par rapport aux axes fixes dans l'espace; et $\frac{M(x'-x)}{\Delta^3}$, $\frac{M''x'}{r'^3}$ les forces parallèles à l'axe des X qui sollicitent ce même point: de sorte que, en affectant ces forces du signe négatif pour indiquer qu'elles tendent à diminuer l'abscisse $X+x'$, on a l'équation

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{d^2x'}{dt^2}=-\frac{M(x'-x)}{\Delta^3}-\frac{M''x'}{r'^3}:$$

d'où l'on tire, en substituant pour $\frac{d^2X}{dt^2}$ sa valeur $\frac{Mx}{r^3}+\frac{M'x'}{r'^3}$,

$$\frac{d^2x'}{dt^2}+(M'+M'')\frac{x'}{r'^3}+\frac{Mx}{r^3}-\frac{M(x-x')}{\Delta^3}=0.$$

Cette équation coïncide avec la première des équations (I) trouvées dans la page 3, en y changeant x, y, z en x', y', z'; M' en M, et réciproquement : ce qui est d'ailleurs évident. Ainsi, en considérant uniquement la Lune, le Soleil et la Terre, les six coordonnées x, y, z, x', y', z' seront déterminées à l'aide des équations (I) qu'on vient de citer, et de celles-ci

$$(x')\ \ldots\ \begin{cases}\frac{d^2x'}{dt^2}+(M'+M'')\frac{x'}{r'^3}=\frac{M(x-x')}{\Delta^3}-\frac{Mx}{r^3}=\frac{d\Omega'}{dx'},\\ \frac{d^2y'}{dt^2}+(M'+M'')\frac{y'}{r'^3}=\frac{M(y-y')}{\Delta^3}-\frac{My}{r^3}=\frac{d\Omega'}{dy'},\\ \frac{d^2z'}{dt^2}+(M'+M'')\frac{z'}{r'^3}=\frac{M(z-z')}{\Delta^3}-\frac{Mz}{r^3}=\frac{d\Omega'}{dz'};\end{cases}$$

où l'on a fait, $\Omega'=\frac{-M(xx'+yy'+zz')}{r^3}+\frac{M}{\Delta}$.

232. Il n'est peut être pas inutile de faire remarquer ici, en passant, que, au lieu de ces équations, on aurait

$$[x']\ldots\left\{\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{M'x'}{r'^3}+\frac{Mx}{r^3}=0,\quad \frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{M'y'}{r'^3}+\frac{My}{r^3}=0,\quad \frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{M'z'}{r'^3}+\frac{Mz}{r^3}=0;\right.$$

si le centre de gravité du Soleil était; ou absolument immobile dans l'espace, ou nullement attiré par la Terre et la Lune; l'origine des coordonnées x', y', z' étant toujours au centre de gravité de la Terre. Mais cette hypothèse qui se réduit, comme on le voit, à faire disparoître les termes divisés par Δ^3, et à changer $M'+M''$ en M' dans les équations (x'), n'altère point la forme des équations (I) qui déterminent le mouvement rélatif de la Lune autour de la Terre. Car, en placant d'abord l'origine des coordonnées au point M', censé fixe, on a les deux équations

$$\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{M'x'}{r'^3}-\frac{Mx}{r^3}=0,\quad \frac{d^2(x'+x)}{dt^2}+\frac{M'(x'+x)}{\{(x'+x)^2+(y'+y)^2+(z'+z)^2\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{M''x}{r^3}=0;$$

qui, par l'élimination de $\frac{d^2x'}{dt^2}$, et le changement de x', y', z' en $-x'$, $-y'$, $-z'$ donneraient précisement la première des équations (I) posées dans la page 3.

Dans le cas où l'on voudrait supposer le centre de gravité de la Terre; ou absolument immobile, ou nullement attiré par le Soleil et la Lune; les coordonnées x', y', z' du Soleil, par rapport aux axes menés par le centre de la Terre, seraient déterminées par les équations

$$[x']' \ldots\ldots \begin{cases} \frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{M''x'}{r'^3}+\frac{M(x'-x)}{\Delta^3}=0, \\ \frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{M''y'}{r^3}+\frac{M(y'-y)}{\Delta^3}=0, \\ \frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{M''z'}{r'^3}+\frac{M(z'-z)}{\Delta^3}=0; \end{cases}$$

et les coordonnées x, y, z de la Lune, rélativement aux mêmes axes, par les équations

$$(x) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{M''x}{r^3}-\frac{M'(x'-x)}{\Delta^3}=0, \\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{M''y}{r^3}-\frac{M'(y'-y)}{\Delta^3}=0, \\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{M''z}{r^3}-\frac{M'(z-z')}{\Delta^3}=0, \end{cases}$$

essentiellement différentes des trois équations (I).

Le rapprochement de ces trois différens systèmes de six équations différentielles offre un moyen simple pour mieux saisir la proposition LXVI du premier Livre des Principes ds NEWTON.

233. Revenons maintenant aux équations (x'): si l'on y fait

$$x'=\frac{\cos v'}{u'},\qquad y'=\frac{\sin v'}{u'},\qquad z'=\frac{s'}{u'},$$

$$Q'=s'^2-2s.\frac{u'}{u}s'-2\frac{u'}{u}.\cos(v-v')+(1+ss)\frac{u'^2}{u^2},$$

$$R'=\frac{M}{h'^2}(1+ss)^{-\frac{3}{2}}.\frac{u^2}{u'^3}\sin(v-v')-\frac{M}{uh'^2}(1+Q')^{-\frac{3}{2}}.\sin(v-v');$$

et si l'on prend v' pour la variable indépendante, on trouvera, d'après l'analyse exposée dans le n.° 26, que ces équations sont équivalentes aux trois suivantes, dans lesquelles h'^2 désigne une constante arbitraire ;

$$\left(\frac{d^2 s'}{dv'^2}+s'\right)\left(1-2.\int R'\,dv'\right)=2R'.\frac{ds'}{dv'}+\frac{M}{h'^2}\left\{s'\cos(v-v')-s\right\}\left\{\frac{u^2}{u'^3}(1+s^2)^{-\frac{3}{2}}-\frac{(1+Q')^{-\frac{3}{2}}}{u}\right\},$$

$$\left(\frac{d^2 u'}{dv'^2}+u'\right)\left(1-2.\int R'\,dv'\right)=\left\{\begin{array}{l} 2R'.\frac{du'}{dv'}+\frac{M'+M''}{h'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{M}{h'^2u(1+Q')^{\frac{3}{2}}} \\ +\frac{M}{h'^2}\left\{\frac{u^2}{u'^2}(1+s^2)^{-\frac{3}{2}}-\frac{u'}{u}(1+Q')^{-\frac{3}{2}}\right\}\cos(v-v') \end{array}\right\};$$

$$dt=\frac{dv'}{h'u'^2}\left\{1-2.\int R'\,dv'\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on observe actuellement, qu'en posant $b^2=\frac{a}{\alpha'}$, $i=\frac{M}{M+M''}$, $\frac{M'+M''}{h'^2}=\frac{1}{\alpha'}$, $M'+M''=n'^2\alpha'^3$, $I=i(1+p)^3$, $M+M''=n^2a^3(1+p)^3$, on a, $\frac{M}{M'+M''}=\frac{Ib^6}{m^2}$; on en conclura, que les équations entre les coordonnées polaires peuvent être écrites ainsi ; savoir

$$(u')\ldots\left\{\begin{array}{l} Q'=s'^2-2b^2.s\,\frac{\alpha'u'}{au}.s'-2b^2\frac{\alpha'u'}{au}\cos(v-v')+b^4(1+s^2)\left(\frac{\alpha'u'}{au}\right)^2; \\ R'=\frac{Ib^2}{m^2}.\frac{(au)^2\sin(v-v')}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}(\alpha'u')^3}-\frac{Ib^8}{m^2}.\frac{\sin(v-v')}{au(1+Q')^{\frac{3}{2}}}; \\ \left(\frac{d^2s'}{dv'^2}+s'\right)\left(1-2\int R'dv'\right)-2\frac{R'ds'}{dv'}=\frac{Ib^2}{m^2}\left\{s'.\cos(v-v')-s\right\}\left\{\frac{(au)^2}{(\alpha'u')^3(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{b^6}{au(1+Q')^{\frac{3}{2}}}\right\}; \\ \left(\frac{d^2.\alpha'u'}{dv'^2}+\alpha'u'\right)\left(1-2\int R'\,dv'\right)-(1+s'^2)^{-\frac{3}{2}}-2R'\frac{d.\alpha'u'}{dv'}= \\ \frac{Ib^2}{m^2}\cos(v-v')\left\{(1+s^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{au}{\alpha'u'}\right)^2-b^6\frac{\alpha'u'}{au}(1+Q')^{-\frac{3}{2}}\right\}+\frac{Ib^8}{m^2}\frac{(1+Q')^{-\frac{3}{2}}}{au}; \\ n'\,dt=\frac{dv'(1-2\int R'dv')^{-\frac{1}{2}}}{(\alpha'u')^2}. \end{array}\right.$$

Sous cette forme il est plus aisé d'estimer l'ordre de petitesse des facteurs constans qui multiplient les termes dûs à la force perturbatrice, en observant, que l'unité est le principal terme de au et $\alpha'u'$; et que les trois quantités i, b^2, m, sont respectivement égales aux fractions $\frac{1}{87}$, $\frac{1}{400}$, $\frac{1}{13}$, environ.

On trouvera dans le second vol. l'expression de p : pour le moment il suffit de savoir que $1+p=1+\frac{1}{6}m^2+$ etc.

234. Lorsqu'on néglige le carré de la force perturbatrice, c'est-à-dire le carré de la fraction i; et, outre cela, le carré de b^2, les équations précédentes deviennent beaucoup plus simples. Car alors, la partie elliptique de s', $\alpha' u'$, $n't$ donne

$$\frac{d^2 s'}{dv'^2} + s' = 0, \quad \frac{d^2 \alpha' u'}{dv'^2} + \alpha' u' - (1 + s'^2)^{-\frac{3}{2}} = 0, \quad n' dt = \frac{dv'}{(\alpha' u')^2}:$$

et en nommant $\delta s'$, $\delta \alpha' u'$, $\delta n' t$ la perturbation de ces mêmes coordonnées, on peut la détermimer par ces équations;

$$[\delta u'] \ldots \left\{ \begin{array}{l} R' = \frac{I b^2}{m^2} \cdot \frac{(\mathrm{a} u)^2 \sin(v - v')}{(\alpha' u')^3 \cdot (1 + ss)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{d^2 . \delta s'}{dv'^2} + \delta s' = -\frac{I b^2}{m^2} s . (1 + s^2)^{-\frac{3}{2}} . \frac{(\mathrm{a} u)^2}{(\alpha' u')^3} \\ \frac{d^2 . \delta \alpha' u'}{dv'^2} + \delta \alpha' u' = 2 \int R' dv' + R' . \frac{d . \alpha' u'}{dv'} + \frac{I b^2}{m^2} . \frac{(\mathrm{a} u)^2 \cos(v - v')}{(\alpha' u')^2 (1 + s^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{d . \delta n' t}{dv'} = \left\{ \int R' dv' - 2 \frac{\delta \alpha' u'}{\alpha' u'} \right\} (\alpha' u')^{-2}. \end{array} \right.$$

235. Au reste, si l'on accorde qu'il est permis de négliger le carré de la force perturbatrice, on pourra retenir le temps pour la variable indépendante, et intégrer les équations (x') par les formules données dans le premier volume de la Mécanique Céleste (Voyez p. 254-262). Pour cela, on fera d'abord $z' = 0$ dans l'expression de Ω'; ce qui donne $\Omega' = -\frac{M \alpha'}{\mathrm{a}^2} P + \frac{M}{\alpha'} Q$, en posant pour plus de simplicité;

$$P = \frac{(\mathrm{a} u)^2 \cos(v - v')}{\alpha' u' \ (1 + s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Q = \alpha' u' . \left\{ 1 - 2 \left(\frac{\mathrm{a}}{\alpha'} \right) \frac{\alpha' u' . \cos(v - v')}{\mathrm{a} u} + \left(\frac{\mathrm{a}}{\alpha'} \right)^2 (1 + s^2) \left(\frac{\alpha' u'}{\mathrm{a} u} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Imaginons maintenant P et Q exprimés en fonction des moyens mouvemens nt et $n't$ de la Lune et de la Terre. Il faudra regarder $\alpha' u'$ et P comme quantités indépendantes de α', et faire par conséquent $\left(\frac{dP}{d\alpha'}\right) = 0$: en prenant la différentielle partielle de Q par rapport à α' on aura un résultat de la forme $\left(\frac{dQ}{d\alpha'}\right) = \frac{\mathrm{a}}{\alpha'^2} . Q_1$. Il suit de là que

$$-\left(\frac{d\Omega'}{n'dt}\right)=\frac{M\alpha'}{a^2}\left(\frac{dP}{n'dt}\right)-\frac{M}{\alpha'}\left(\frac{dQ}{n'dt}\right),$$

$$-\alpha'\left(\frac{d\Omega'}{d\alpha'}\right)=\frac{M\alpha'}{a^2}.P+\frac{M}{\alpha'}Q-\frac{Ma}{\alpha'^2}.Q_1.$$

Mais $M=In'^2a^3$: donc en posant

$$T=P+b^4Q-b^6Q_1+2\int\left(\frac{dP}{n'dt}\right)n'dt-2b^4\int\left(\frac{dQ}{n'dt}\right)n'dt,$$

on aura

$$-\frac{2}{\alpha'^2n'^2}\int\left(\frac{d\Omega}{n'dt}\right)n'dt-\frac{1}{\alpha'^2n'^2}.\alpha'\left(\frac{d\Omega'}{d\alpha'}\right)=\frac{Ib^2}{m^2}.T.$$

Cela posé, si l'on néglige les termes qui seraient multipliés par le cube de ε', on aura, conformément aux équations désignées par (Y) et (X') dans les pages 258 et 261 du premier volume de la Mécanique Céleste;

$$\delta r' =-\frac{\alpha'Ib^2}{m^2}U\left\{1+\frac{3}{4}\varepsilon'^2+2\varepsilon'\cos n't+\frac{9}{4}\varepsilon'^2\cos 2n't\right\},$$

$$\delta\alpha'u'= \frac{Ib^2}{m^2}(\alpha'u')^2.U\left\{1+\frac{3}{4}\varepsilon'^2+2\varepsilon'\cos n't+\frac{9}{4}\varepsilon'^2\cos 2n't\right\},$$

$$\delta v' = \frac{Ib^2.U}{m^2\sqrt{1-\varepsilon'^2}}\left\{3\varepsilon'\sin n't+5\varepsilon'^2\sin 2n't\right\}$$

$$-\frac{Ib^2}{m^2\sqrt{1-\varepsilon'^2}}.\frac{dU}{n'dt}\left\{2+\frac{1}{2}\varepsilon'^2+2\varepsilon'\cos n't+\frac{3}{2}\varepsilon'^2\cos 2n't\right\}$$

$$+\frac{Ib^2}{m^2\sqrt{1-\varepsilon'^2}}\left\{\begin{array}{l}3\iint n'^2dt^2\left(\frac{dP}{n'dt}\right)+2\int Pn'dt-3b^4\iint n'^2dt^2\left(\frac{dQ}{n'dt}\right)\\ +2b^4\int Qn'dt-2b^6\int Q_1n'dt\end{array}\right\};$$

pourvu que l'expression de U soit tirée de l'équation

$$0=\frac{d^2U}{n'^2dt^2}+U-T\left\{1+\frac{1}{4}\varepsilon'^2-\varepsilon'\cos n't-\frac{1}{4}\varepsilon'^2\cos 2n't\right\}$$

$$-\int n'dt\,T\left(2\varepsilon'\sin n't+\varepsilon'^2\sin 2n't\right).$$

Si l'on supprime dans ces formules les termes multipliés par b^4, elles se réduisent à celles qu'on aurait en faisant d'abord $Q=0$; ce qui est le cas des équations désignées par $[x']$ dans le n.° 232.

Pour développer la valeur de P remarquons, que, en posant

$$P_1 = \frac{(au)^2 \cos v}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}, \qquad P_2 = \frac{(au)^2 \sin v}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}},$$

on a, $P = P_1 . \frac{r' \cos v'}{a'} + P_2 . \frac{r' \sin v'}{a'}$.

Mais en nommant θ l'anomalie excentrique, on sait que

$$\frac{r' \cos v'}{a'} = \cos\theta - \varepsilon' = \frac{1 - \varepsilon'^2 - \frac{r'}{a'}}{\varepsilon'},$$

$$\frac{r' \sin v'}{a'} = \sqrt{1-\varepsilon'^2} . \sin\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon'^2}}{\varepsilon'}(\theta - n't);$$

$$\frac{r'}{a'} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon'^2 - \varepsilon'\left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon'^2\right)\cos n't - \frac{1}{2}\varepsilon'^2 \cos 2n't - \frac{3}{8}\varepsilon'^3 \cos 3n't,$$

$$\theta = n't + \varepsilon'\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon'^2\right)\sin n't + \frac{1}{2}\varepsilon'^2 \sin 2n't + \frac{3}{8}\varepsilon'^3 \sin 3n't;$$

partant nous avons

$$P = P_1 \sqrt{1-\varepsilon'^2}\left\{-\frac{3}{2}\varepsilon' + \left(1 + \frac{1}{8}\varepsilon'^2\right)\cos n't + \frac{1}{2}\varepsilon' \cos 2n't + \frac{3}{8}\varepsilon'^2 \cos 3n't\right\}$$
$$+ P_2 \sqrt{1-\varepsilon'^2}\left\{\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon'^2\right)\sin n't + \frac{1}{2}\varepsilon' \sin 2n't + \frac{3}{8}\varepsilon'^2 \sin 3n't\right\};$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dP}{n'dt}\right) = -P_1 . \sqrt{1-\varepsilon'^2}\left\{\left(1 + \frac{1}{8}\varepsilon'^2\right)\sin n't + \varepsilon' \sin 2n't + \frac{9}{8}\varepsilon'^2 \sin 3n't\right\}$$
$$+ P_2 . \sqrt{1-\varepsilon'^2}\left\{\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon'^2\right)\cos n't + \varepsilon' \cos 2n't + \frac{9}{8}\varepsilon'^2 \cos 3n't\right\}.$$

Après avoir intégré les équations qui déterminent le mouvement de la Lune, on pourra exprimer P_1 et P_2 en fonction de nt.

236. Pour avoir la perturbation $\delta s'$ de la latitude, on prendra

$$\delta s' = -\frac{Ib^2}{m^2} . U'' \left\{1 + \frac{3}{4}\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' \cos n't + \frac{9}{4}\varepsilon'^2 \cos 2n't\right\},$$

où U'' doît être déterminé à l'aide de l'équation

$$0 = \frac{d^2 U''}{n'^2 dt^2} + U'' - P_3\left\{1 + \frac{1}{4}\varepsilon'^2 - \varepsilon' \cos n't - \frac{1}{4}\varepsilon'^2 \cos 2n't\right\}$$
$$- \int n' dt P_3 \left\{2\varepsilon' \sin n't + \varepsilon'^2 \sin 2n't\right\},$$

dans laquelle, $P_3 = \frac{s(au)^2}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}$.

S'il était question de déterminer le mouvement absolu des trois corps M, M', M'' dans l'espace, il faudrait chercher les coordonnées X, Y, Z au moyen des équations

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{Mx}{r^3} + \frac{M'x'}{r'^3}, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{My}{r^3} + \frac{M'y'}{r'^3}, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{Mz}{r^3} + \frac{M'z'}{r'^3};$$

ce qui suppose déjà connu le mouvement relatif.

237. Soient X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du centre de gravité des deux corps M, M'', relativement aux axes fixes dans l'espace. Par la propriété de ce centre, on a les équations

$$(M+M'')X_1 = M''X + M(X+x),$$
$$(M+M'')Y_1 = M''Y + M(Y+y),$$
$$(M+M'')Z_1 = M''Z + M(Z+z),$$

lesquelles donnent;

$$X_1 = X + \frac{M}{M+M''}x, \quad Y_1 = Y + \frac{M}{M+M''}y, \quad Z_1 = Z + \frac{M}{M+M''}z.$$

Mais, en nommant X', Y', Z' les coordonnées du même centre de gravité par rapport aux axes parallèles aux axes fixes qui ont leur origine au point M', il est clair qu'on a

$$(B) \ldots\ldots \begin{cases} X' = X + x' - X_1 = x' - \frac{M}{M+M''}x, \\ Y' = Y + y' - Y_1 = y' - \frac{M}{M+M''}y, \\ Z' = Z + z' - Z_1 = z' - \frac{M}{M+M''}z; \end{cases}$$

et par conséquent

$$\frac{d^2X'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} - i.\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2Y'}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2} - i.\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2Z'}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2} - i.\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Donc, en substituant ici pour $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ etc. leurs valeurs, fournies par les équations désignées plus haut par (x'), et par celles désignées par (I) dans la page 3, il viendra

$$(X') \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{d^2 X'}{dt^2} + \dfrac{M+M'+M''}{M+M''}\left\{\dfrac{M'' x'}{r'^3} + \dfrac{M(x'-x)}{\Delta^3}\right\} = 0, \\ \dfrac{d^2 Y'}{dt^2} + \dfrac{M+M'+M''}{M+M''}\left\{\dfrac{M'' y'}{r'^3} + \dfrac{M(y'-y)}{\Delta^3}\right\} = 0, \\ \dfrac{d^2 Z'}{dt^2} + \dfrac{M+M'+M''}{M+M''}\left\{\dfrac{M'' z'}{r'^3} + \dfrac{M(z'-z)}{\Delta^3}\right\} = 0. \end{cases}$$

Telles sont les équations rigoureuses qui renferment les circonstances du mouvement du centre de gravité de la Terre et de la Lune autour du Soleil. Il est facile de leurs donner une forme plus approchante de celle des équations (x'). Soit pour plus de simplicité,

$$x'' = \frac{M}{M+M''}x, \quad y'' = \frac{M}{M+M''}y, \quad z'' = \frac{M}{M+M''}z,$$
$$x''' = -\frac{M''}{M+M''}x, \quad y''' = -\frac{M''}{M+M''}y, \quad z''' = -\frac{M''}{M+M''}z;$$

nous avons, d'après les équations précédentes représentées par (B),

$$x' = X' + x'', \quad y' = Y' + y'', \quad z' = Z' + z'',$$
$$x' - x = X' + x''', \quad y' - y = Y' + y''', \quad z' - z = Z' + z''';$$

ce qui revient à dire, que x'', y'', z''; x''', y''', z''' expriment les coordonnées des corps M'' et M par rapport à des axes parallèles aux axes fixes menés par leur centre commun de gravité. Cela est d'ailleurs évident, puisque, par la définition même de ces coordonnées on a, identiquement;

$$(C) \ldots \{M'' x'' + M x''' = 0, \quad M'' y'' + M y''' = 0, \quad M'' z'' + M z''' = 0\}.$$

Maintenant, si l'on fait, $A = \frac{M+M'+M''}{M+M''}$; $B = \frac{(M+M'')(M'+M'')}{M+M'+M''}$,

$$R_1^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2,$$
$$\Delta''^2 = (X' + x'')^2 + (Y' + y'')^2 + (Z' + z'')^2,$$
$$\Delta'''^2 = (X' + x''')^2 + (Y' + y''')^2 + (Z' + z''')^2,$$
$$\Omega'' = -\frac{B}{R_1} + \frac{M''}{\Delta''} + \frac{M}{\Delta'''},$$

il est clair qu'on peut mettre les équations (X') sous cette forme

$$[X'] \ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X'}{dt^2} + (M' + M'') \frac{X'}{R_1^3} = A \frac{d\Omega''}{dX'}, \\ \frac{d^2 Y'}{dt^2} + (M' + M'') \frac{Y'}{R_1^3} = A \frac{d\Omega''}{dY'}, \\ \frac{d^2 Z'}{dt^2} + (M' + M'') \frac{Z'}{R_1^3} = A \frac{d\Omega''}{dZ'} : \end{array} \right.$$

ce qui fait voir, que la partie elliptique des coordonnées X', Y', Z' est la même que la partie elliptique des coordonnées x', y', z' : de sorte que, la différence, porte uniquement sur la perturbation de ces deux mouvemens.

238. Mais il y a cela de remarquable, que la perturbation des coordonnées X', Y', Z' du centre de gravité est beaucoup plus petite que celles des coordonnées x', y', z' de la Terre. C'est ce qu'il est facile de démontrer en développant les radicaux qui entrent dans les équations (x') et $[X']$. Alors, en négligeant les termes de l'ordre du cube de x, y, z on trouve aussitôt que les équations (x') se réduisent à celles-ci:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2 x'}{dt^2} + (M + M' + M'') \frac{x'}{r'^3} + Mx \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) - \frac{3Mx'}{r'^5} (xx' + yy' + zz') \\ & - \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{r'^5} \left\{ x' r^2 + 2x(x'x + y'y + z'z) - 5x' \left(x \cdot \frac{x'}{r'} + y \cdot \frac{y'}{r'} + z \cdot \frac{z'}{r'} \right)^2 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2 y'}{dt^2} + (M + M' + M'') \frac{y'}{r'^3} + My \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) - \frac{3My'}{r'^5} (xx' + yy' + zz') \\ & - \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{r'^5} \left\{ y' r^2 + 2y(x'x + y'y + z'z) - 5y' \left(x \cdot \frac{x'}{r'} + y \cdot \frac{y'}{r'} + z \cdot \frac{z'}{r'} \right)^2 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2 z'}{dt^2} + (M + M' + M'') \frac{z'}{r'^3} + Mz \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) - \frac{3Mz'}{r'^5} (xx' + yy' + zz') \\ & - \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{r'^5} \left\{ z' r^2 + 2z(x'x + y'y + z'z) - 5z' \left(x \cdot \frac{x'}{r'} + y \cdot \frac{y'}{r'} + z \cdot \frac{z'}{r'} \right)^2 \right\}; \end{aligned}$$

et que les équations $[X']$ se réduisent à celles-ci :

$$0 = \frac{d^2 X'}{dt^2} + (M + M' + M'') \frac{X'}{R_1^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{MM''(M + M' + M'')}{(M + M'')^2 R_1^5} \left\{ \begin{array}{l} X' r^2 - 2x(X'x + Y'y + Z'z) \\ -5X' \left(\frac{X'}{R_1} x + \frac{Y'}{R_1} y + \frac{Z'}{R_1} z \right)^2 \end{array} \right\};$$

$$0 = \frac{d^2 Y'}{dt^2} + (M + M' + M'') \frac{Y'}{R_1^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{MM''(M + M' + M'')}{(M + M'')^2 R_1^5} \left\{ \begin{array}{l} Y' r^2 - 2y(X'x + Y'y + Z'z) \\ -5Y' \left(\frac{X'}{R_1} x + \frac{Y'}{R_1} y + \frac{Z'}{R_1} z \right)^2 \end{array} \right\};$$

$$0 = \frac{d^2 Z'}{dt^2} + (M + M' + M'') \frac{Z'}{R_1^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{MM''(M + M' + M'')}{(M + M'')^2 R_1^5} \left\{ \begin{array}{l} Z' r^2 - 2z(X'x + Y'y + Z'z) \\ -5Z' \left(\frac{X'}{R_1} x + \frac{Y'}{R_1} y + \frac{Z'}{R_1} z \right)^2 \end{array} \right\}.$$

Or, en mettant le terme $\frac{Mx}{r^3}$, qui entre dans la première des équations précédentes en x', y', z', sous la forme

$$\frac{Mx}{r^3}=(M+M'+M'').\frac{x'}{r'^3}.\frac{M+M''}{M+M'+M''}.\frac{M}{M+M''}.\frac{x}{x'}.\frac{r'^3}{r^3}$$
$$=(M+M'+M'')\frac{x'}{r'^3}.\frac{Ib^2}{m^2}.\frac{x}{r}.\frac{r'}{x'}\left(\frac{\mathrm{a}r'}{\alpha' r}\right)^2$$

il est clair que ce terme est beaucoup plus grand que le terme

$$\frac{(M+M'+M'')MM''X'r^2}{(M+M'')^2R_1^5}=(M+M'+M'')\frac{X'}{R_1^3}.i(1-i)\left(\frac{\mathrm{a}}{A'}\right)^2\left(\frac{r}{\mathrm{a}}.\frac{A'}{R_1}\right)^2, \quad (*)$$

qui mesure l'ordre de grandeur de la force perturbatrice dans les équations en X', Y', Z'. Et voilà comment on peut se former une idée claire de la proposition LXVII du premier Livre des Principes de NEWTON.

239. Pour rendre plus immédiate la comparaison entre tout ce qui tient au mouvement du centre de gravité de la Terre et de la Lune, et le mouvement de la Terre, il faut faire d'abord

$$X'=\frac{\cos V'}{U'}, \qquad Y'=\frac{\sin V'}{U'}, \qquad Z'=\frac{S'}{U'}$$

et transformer les trois équations $[X']$ dans celles qui ont lieu lorsqu'on prend V' pour la variable indépendante : ensuite il faut appliquer à ces mêmes équations une transformation analogue à celle exposée dans le n.° 235.

D'après les équations désignées par (VIII) dans la page 26 on a, dans le cas actuel,

$$(U')\ldots\begin{cases}\left(\frac{d^2S'}{dV'^2}+S'\right)\left(1+2\int R''dV'\right)+\frac{R''dS'}{dV'}=\frac{A}{H'^2}\left\{\frac{S'}{U'}\frac{d\Omega''}{dU'}+\frac{(1+S'S')}{U'^2}\frac{d\Omega''}{dS'}\right\};\\ \left(\frac{d^2U'}{dV'^2}+U'\right)\left(1+2\int R''dV'\right)+\frac{R''dU'}{dV'}-\frac{(M'+M'')}{H'^2(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}=\frac{A}{H'^2}\left\{\frac{d\Omega''}{dU'}+\frac{S'}{U'}\frac{d\Omega''}{dS'}\right\};\\ dt=\frac{dV'}{H'U'^2}\left(1+2\int R''dV'\right)^{-\frac{1}{2}},\end{cases}$$

(*) La lettre A' représente le demi-grand'axe de l'ellipse relative au centre de gravité de la Lune et de la Terre : de sorte que on peut faire sans erreur sensible $A'=\alpha'$.

où H'^2 désigne une constante arbitraire, et $R''=\frac{A}{H'^2}\cdot\frac{d\Omega'}{U'^2dV'}$.

Les équations

$$R_1^2=\frac{1+S'S'}{U'^2},$$

$$\Delta''^2=\frac{1+S'S'}{U'^2}+\frac{i^2(1+s^2)}{u^2}+\frac{2i\{\cos(v-V')+sS'\}}{uU'},$$

$$\Delta'''^2=\frac{1+S'S'}{U'^2}+\frac{(i-1)^2(1+s^2)}{u^2}+\frac{2(i-1)\{\cos(v-V')+sS'\}}{uU'},$$

donnent $\frac{dR_1}{dV'}=0$, $\frac{dR_1}{dU'}=-\frac{(1+S'S')}{U'^3R_1}$, $\frac{dR_1}{dS'}=\frac{S'}{R_1U'^2}$,

$$\frac{d\Delta''}{dV'}=\frac{i\sin(v-V')}{uU'\Delta''};\quad \frac{d\Delta''}{dS'}=\frac{S'}{U'^2\Delta''}+\frac{is}{uU'\Delta''};\quad \frac{d\Delta''}{dU'}=-\frac{(1+S'S')}{\Delta''U'^3}-\frac{i\{\cos(v-V')+sS'\}}{uU'^2\Delta''}.$$

De là, et de l'expression de Ω'', on tire aisément;

$$\frac{d\Omega''}{dU'}=-\frac{B}{\sqrt{1+S'S'}}+\frac{M''}{U'^3\Delta''^3}\left\{1+S'S'+i\frac{U'}{u}[\cos(v-V')+sS']\right\}$$
$$+\frac{M}{U'^3\Delta'''^3}\left\{1+S'S'+(i-1)\frac{U'}{u}[\cos(v-V')+sS']\right\};$$

$$\frac{d\Omega''}{dS'}=\frac{BS'U'}{(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}-\frac{M''}{U'^2\Delta''^3}\left(S'+is\frac{U'}{u}\right)-\frac{M}{U'^2\Delta'''^3}\left(S'+(i-1)s\frac{U'}{u}\right);$$

$$\frac{d\Omega''}{dV'}=-\left\{\frac{iM''}{\Delta''^3}+\frac{(i-1)M}{\Delta'''^3}\right\}\frac{\sin(v-V')}{uU'};$$

$$\frac{d\Omega''}{dU'}+\frac{S'}{U'}\frac{d\Omega''}{dS'}=-\frac{B}{(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}+\frac{M''}{U'^3\Delta''^3}\left\{1+\frac{iU'}{u}\cos(v-V')\right\}+\frac{M}{U'^3\Delta'''^3}\left\{1+(i-1)\frac{U'}{u}\cos(v-V')\right\};$$

$$\frac{S'}{U'}\frac{d\Omega''}{dV'}+\frac{1+S'S'}{U'^2}\frac{d\Omega''}{dS'}=\frac{M''i}{uU'^3\Delta''^3}\left\{S'\cos(v-V')-s\right\}+\frac{M(i-1)}{uU'^3\Delta'''^3}\left\{S'\cos(v-V')-s\right\}.$$

Cela posé, si l'on fait $\frac{M+M'+M''}{H'^2}=\frac{1}{A'}$, on aura

$$\frac{AB}{H'^2}=\frac{M'+M''}{H'^2},\quad \frac{AM''}{H'^2}=\frac{i-1}{A'},\quad \frac{AM}{H'^2}=\frac{i}{A'}$$

d'où on conclura, qu'en faisant

$$\Delta_1=2i\frac{a}{A'}\cdot\left(\frac{A'U'}{au}\right)\left\{\frac{\cos(v-V')+sS'}{1+S'^2}\right\}+i^2\left(\frac{a}{A'}\right)^2\left(\frac{1+ss}{1+S'S'}\right)\left(\frac{A'U'}{au}\right)^2,$$

$$\Delta_2=2(i-1)\frac{a}{A'}\left(\frac{A'U'}{au}\right)\left\{\frac{\cos(v-V')+sS'}{1+S'^2}\right\}+(i-1)^2\left(\frac{1+ss}{1+S'S'}\right)\left(\frac{A'U'}{au}\right)^2,$$

on a,

$$\frac{1}{U'^3\Delta''^3}=(1+S'S')^{-\frac{3}{2}}(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}; \qquad \frac{1}{U'^3\Delta'''^3}=(1+S'S')^{-\frac{3}{2}}(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$R''=i(1-i)\left(\frac{\mathrm{a}}{A'}\right)\frac{A'U'}{(\mathrm{a}u)^2}\cdot\frac{\sin(v-V')}{(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{a}u}{A'U'}\left\{(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\};$$

$$\frac{A}{H'^2}\left\{\frac{d\Omega''}{dU'}+\frac{S'}{U'}\frac{d\Omega''}{dS'}\right\}=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{(M'+M'')}{H'^2(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1-i}{A'}\cdot\dfrac{(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}\left\{1+i\dfrac{A'U'}{\mathrm{a}u}\cdot\dfrac{\mathrm{a}}{A'}\cos(v-V')\right\}}{(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}\\[2ex] +\dfrac{i}{A'}\cdot\dfrac{(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\left\{1+(i-1)\dfrac{\mathrm{a}}{A'}\cdot\dfrac{A'U'}{\mathrm{a}u}\cos(v-V')\right\}}{(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}\end{array}\right\};$$

$$\frac{A}{H'^2}\left\{\frac{S'}{U'}\frac{d\Omega''}{dV'}+\frac{(1+S'S')}{U'^2}\frac{d\Omega''}{dS'}\right\}=\frac{\mathrm{a}.i(1-i)\{S'\cos(v-V')-s\}}{A'\mathrm{a}u.(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}\left\{(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (U'), et remarquant qu'on peut, sans erreur sensible, remplacer $M'+M''$ par $M+M'+M''$, il viendra;

$$(U')\ldots\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{d^2S'}{dV'^2}+S'\right)\left(1+2\int R''dV'\right)+\dfrac{R''dS'}{dV'}=\dfrac{\mathrm{a}}{A'}\cdot\dfrac{i(1-i)\{S'\cos(v-V')-s\}}{\mathrm{a}u(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}\left\{(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\};\\[2ex] \left(\dfrac{d^2A'U'}{dV'^2}+A'U'\right)\left(1+2\int R''dV'\right)-(1+S'S')^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{R''dA'U'}{dV'}=\left\{\dfrac{(1-i)(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}+i(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}-1}{(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}\right\}\\[2ex] +\dfrac{\mathrm{a}}{A'}i(1-i)\dfrac{A'U'}{\mathrm{a}u}(1+S'S')^{-\frac{3}{2}}\cos(v-V')\left\{(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\};\\[2ex] \sqrt{\dfrac{M+M'+M''}{A'^3}}\,dt=n'dt=\dfrac{dV'\left\{1+2\int R''dV'\right\}^{-\frac{3}{2}}}{(A'U')^2}.\end{array}\right.$$

Les valeurs élliptiques des coordonnées polaires sont celles qui satisfont aux équations

$$\frac{d^2S'}{dV'^2}+S'=0, \qquad \frac{d^2.A'U'}{dV'^2}+A'U'-(1+S'S')^{-\frac{3}{2}}=0, \qquad n'dt=\frac{dV'}{(A'U')^2}.$$

Donc, en nommant $\delta S'$, $\delta A'U'$, $\delta n't$ la partie qui constitue la perturbation de ces mêmes coordonnées on aura, pour déterminer cette partie, les équations suivantes;

$$[U']\ldots\begin{cases}\left(\dfrac{d^2.\delta S'}{dV'^2}+\delta S'\right)\left(1+2\int R''\,dV'\right)+\dfrac{R''dS'}{dV'}= \\ -i(1-i)\dfrac{\text{a}}{A'}\left\{\dfrac{s-S'\cos(v-V')}{\text{a}u(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}\right\}\left\{(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\}; \\ \left(\dfrac{d^2.\delta A'U'}{dV'^2}+\delta A'U'\right)\left(1+2\int R''dV'\right)+\dfrac{R''d.A'U'}{dV'}=\left\{\dfrac{(1-i)(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}+i(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}-1}{(1+S'S')^{\frac{3}{2}}}\right\} \\ +\dfrac{\text{a}}{A'}i(1-i)\dfrac{A'U'}{\text{a}u}\cos(v-V').(1+SS)^{-\frac{3}{2}}\left\{(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\}; \\ d.\delta n't=\dfrac{dV'}{(A'U'_1)^2}\left\{\left(1+2\int R'dV'\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{\delta A'U'}{A'U'_1}\right)^{-2}-1\right\};\end{cases}$$

où $A'U'_1$, représente la partie elliptique de $A'U'$.

La complication de ces formules tient au grand degré de généralité que nous avons voulu conserver jusqu'ici ; mais en négligeant le carré de la force perturbatrice; c'est-à-dire les termes multipliés par i^2, S'^2, iS', $\frac{R''dS'}{dV'}$ on aura ;

$$[\delta U']\ldots\begin{cases}\Delta_1=\quad 2ib^2.\dfrac{A'U'}{\text{a}u}\cos(v-V'); \\ \Delta_2=-2b^2.\dfrac{A'U'}{\text{a}u}\cos(v-V')+b^4(1+ss)\left(\dfrac{A'U'}{\text{a}u}\right)^2; \\ R''=\quad ib^2.\dfrac{A'U'}{(\text{a}u)^2}\sin(v-V').\left\{1-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\}.\dfrac{\text{a}u}{A'U'}; \\ \dfrac{d^2.\delta S'}{dV'^2}+\delta S'=-\dfrac{ib^2.s}{\text{a}u}\left\{1-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\}; \\ \dfrac{d^2.\delta A'U'}{dV'^2}+\delta A'U'=-R'.\dfrac{d.A'U'}{dV'}+\left\{(1-i)(1+\Delta_1)^{-\frac{3}{2}}+i(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}-1\right\} \\ \qquad +ib^2\dfrac{A'U'}{\text{a}u}\cos(v-V')\left\{1-(1+\Delta_2)^{-\frac{3}{2}}\right\}; \\ \dfrac{d.\delta n't}{dV'}=-\left\{\int R'dV'+\dfrac{2\delta A'U'}{A'U'_1}\right\}(A'U'_1)^{-2}.\end{cases}$$

240. Lorsqu'on veut; conserver le temps pour la variable indépendante, négliger le carré de la force perturbatrice, et appliquer aux équations $[X']$ une transformation analogue à celle dont il à été question dans le n.° 235, on fera pour plus de simplicité ;

$$\Delta_{,}'=2(i-1)\frac{a}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'u'}{au}\cos(v-v')+(i-1)^2\left(\frac{a}{\alpha'}\right)^2(1+s^2)\left(\frac{\alpha'u'}{au}\right)^2,$$

$$\Delta_{,}''=2i\frac{a}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'u'}{au}\cos(v-v')+i^2\left(\frac{a}{\alpha'}\right)^2(1+s^2)\left(\frac{\alpha'u'}{au}\right)^2,$$

ce qui donne, en supposant $Z'=0$; $\alpha'u'=A'U'$; $R_{,}=r'$;

$$\Omega''=-\frac{B}{r'}+\frac{M}{r'}(1+\Delta_{,}')^{-\frac{1}{2}}+\frac{M''}{r'}(1+\Delta_{,}'')^{-\frac{1}{2}};$$

d'où l'on tire $A\Omega''=-\frac{(M'+M'')}{\alpha'}Q'$, en posant

$$Q'=\alpha'u'\{1-i(1+\Delta_{,}')^{-\frac{1}{2}}-(1-i)(1+\Delta_{,}'')^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Donc en faisant $\left(\frac{dQ'}{d\alpha'}\right)=\frac{a}{\alpha'^2}Q_{,}'$, nous aurons

$$-\left(\frac{d.A\Omega''}{d.n't}\right)=\frac{(M'+M'')}{\alpha'}\left(\frac{dQ'}{d.n't}\right);\quad -\alpha'\left(\frac{d.A\Omega''}{d\alpha'}\right)=-\frac{(M'+M'')}{\alpha'}\left\{Q'-\frac{a}{\alpha'}Q_{,}'\right\}.$$

Mais $M'+M''=n'^2\alpha'^3$: donc en faisant

$$ib^4T'=2\int\left(\frac{dQ'}{d.n't}\right)n'dt-Q'+b^2Q_{,}'$$

on aura

$$-\frac{2}{\alpha'^2n'^2}\cdot\int\left(\frac{d.A\Omega''}{d.n't}\right)n'dt-\frac{1}{\alpha'^2n'^2}\cdot\alpha'\left(\frac{d.A\Omega''}{d\alpha'}\right)=ib^4T'.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons, qu'en développant l'expression de Q', et négligeant le cube de $\Delta_{,}'$, $\Delta_{,}''$, on a ;

$$Q'=\alpha'u'\left\{\frac{i}{2}\Delta_{,}'+\frac{1}{2}(1-i)\Delta_{,}''-\frac{3}{8}i\Delta_{,}'^2-\frac{3}{8}(1-i)\Delta_{,}''^2\right\}.$$

Mais ;

$$i\Delta_{,}'+(1-i)\Delta_{,}''=-i(i-1)\left(\frac{a}{\alpha'}\right)^2(1+s^2)\left(\frac{\alpha'u'}{au}\right)^2;$$

$$i\Delta_{,}'^2+(1-i)\Delta_{,}''^2=-4i(i-1)\left(\frac{a}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\alpha'u'}{au}\cos(v-v')\right)^2;$$

partant

$$Q'=\frac{i(i-1)}{2}b^4\frac{(\alpha'u')^3}{(au)^2}\left\{\frac{1}{2}-s^2+\frac{3}{2}\cos(2v-2v')\right\};$$

d'où l'on tire

$$Q_{,}'=-i(i-1)b^2\frac{(\alpha'u')^3}{(au)^2}\left\{\frac{1}{2}-s^2+\frac{3}{2}\cos(2v-2v')\right\}.$$

Il suit de là que si l'on fait $P' = \frac{(\alpha' u')^3}{(a u)^2}\left\{\frac{1}{2} - s^2 + \frac{3}{2}\cos(2v - 2v')\right\}$

nous avons, $T' = -\int\left(\frac{dP'}{d.n't}\right)n'dt + \frac{3}{2}P'$.

Cela posé, si l'on détermine la fonction U''' par l'équation

$$o = \frac{d^2 U'''}{n'^2 dt^2} + U''' - T'\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon'^2 - \varepsilon' \cos n't - \frac{1}{4}\varepsilon'^2 \cos 2n't\right)$$
$$- \int n' dt\, T'(2\varepsilon' \sin n't + \varepsilon'^2 \sin 2n't)$$

on aura

$$\delta R_{,} = -A' i b^4 . U'''\left\{1 + \frac{3}{4}\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' \cos n't + \frac{9}{4}\varepsilon'^2 \cos 2n't\right\};$$

$$\delta A' U' = (A' U')^2 . i b^4 U'''\left\{1 + \frac{3}{4}\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' \cos n't + \frac{9}{4}\varepsilon'^2 \cos 2n't\right\};$$

$$\delta V' = \frac{i b^4 U'''}{\sqrt{1-\varepsilon'^2}}\left\{3\varepsilon' \sin n't + 5\varepsilon'^2 \sin 2n't\right\}$$
$$- \frac{i b^4}{\sqrt{1-\varepsilon'^2}} . \frac{dU'''}{n'dt}\left\{2 + \frac{1}{2}\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' \cos n't + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 \cos 2n't\right\}$$
$$- \frac{3 i b^4}{2\sqrt{1-\varepsilon'^2}} \iint n'^2 dt^2 \left(\frac{dP'}{d.n't}\right) + \frac{3 i b^4}{\sqrt{1-\varepsilon'^2}} \int n' dt . P'.$$

On voit par ces formules, que les perturbations $\delta R_{,}$, et $\delta V'$ exprimées en fonction du temps sont de l'ordre de $i b^4$; ce qui est conforme à la conséquence tirée plus haut par le simple développement des radicaux qui entrent dans les équations (x') et (X').

Pour déterminer la perturbation $\delta S'$ remarquons, qu'en faisant $Z = o$, après la différentiation, on a

$$\frac{A\Omega''}{dZ'} = -\frac{M'' z''}{\Delta''^3} - \frac{M z'''}{\Delta'''^3}:$$

de sorte que

$$\left(d.\frac{A\Omega''}{dZ'}\right) = \frac{a . i(i-1) . n'^2 . s(\alpha' u')^3}{au}\left\{(1 + \Delta_{,}')^{-\frac{3}{2}} - (1 + \Delta_{,}'')^{-\frac{3}{2}}\right\}.$$

Mais $(1 + \Delta_{,}')^{-\frac{3}{2}} - (1 + \Delta_{,}'')^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}\Delta_{,}' + \frac{3}{2}\Delta_{,}'' = 3\frac{a}{\alpha'} . \frac{\alpha' u'}{au}\cos(v - v')$,

partant

$$-\frac{1}{n'^2\alpha'}\left(\frac{d.A\Omega''}{dZ'}\right)=3b^4 i\frac{s\,(\alpha' u')^4}{(au)^2}\cos(v-v')=3b^4 i.P''.$$

D'après cela on aura

$$\delta S'=-ib^4\,U^{IV}\left\{1+\frac{3}{4}\varepsilon'^2+2\varepsilon'\cos n't+\frac{9}{4}\varepsilon'^2\cos 2n't\right\};$$

en déterminant U^{IV} au moyen de l'équation

$$0=\frac{d^2\,U^{IV}}{n'^2\,dt^2}+U^{IV}-3P''\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon'^2-\varepsilon'\cos n't-\frac{1}{4}\varepsilon'^2\cos 2n't\right)$$
$$-3\int P''\,n'\,dt\,\{2\varepsilon'\sin n't+\varepsilon'^2\sin 2'nt\}.$$

241. Reprenons maintenant l'équation $X'=x'-x''=x'-\frac{M}{M+M''}x$, et remarquons que, en nommant $\delta X'$ la perturbation de X', et $\delta x'$ celle de x', on doit avoir $\delta X'=\delta x'-x''$, puisque la partie elliptique de X' et celle de x' sont égales. Par la même raison on a, $\delta Y'=\delta y'-y''$, $\delta Z'=\delta z'-z''$. Il suit de là et de l'équation $r'^2=x'^2+y'^2+z'^2$, que

$$\delta r'=\frac{x'}{r'}\delta x'+\frac{y'}{r'}\delta r'+\frac{z'}{r'}\delta z'=\frac{x'\delta X'+y'\delta Y'+z'\delta Z'}{r'}+\frac{i(xx'+yy'+zz')}{r'}.$$

Mais, comme on néglige le carré de la force perturbatrice, on peut faire $x'=X'$, $y'=Y'$, $z'=Z'$ dans la première partie de cette expression de $\delta r'$, et alors il viendra

$$\delta r'=\delta R_1+\frac{i(xx'+yy'+zz')}{r'}=\quad\delta R_1+\frac{i(xx'+yy')}{r'}$$

en supprimant le terme $\frac{izz'}{r'}$, qui est de l'ordre du carré de la force perturbatrice. Or nous avons

$$R_1=\frac{1}{U'},\quad r'=\frac{1}{u'},\quad x'=\frac{\cos v'}{u'},\quad y'=\frac{\sin v'}{u'},\quad x=\frac{\cos v}{u},\quad y=\frac{\sin v}{u};$$

partant il est clair que

$$\delta r'=-\frac{\delta u'}{u'^2}=-\frac{\delta U'}{U'^2}+\frac{i\cos(v-v')}{u'};\quad \text{d'où l'on tire}$$

$$\delta u'=-\frac{iu'^2\cos(v-v')}{u}+\left(\frac{u'}{U'}\right)^2\delta U';\qquad \delta\alpha' u'=-\frac{ib^2(\alpha' u')^2\cos(v-v')}{au}+\delta A'\,U';$$

en observant que le produit $\left(\frac{u'}{U'}\right)^2 \delta U'$ se réduit à $\delta U'$ lorsqu'on néglige le carré de la force perturbatrice. L'équation, tang. $v' = \frac{y'}{x'}$, donne $\delta v' = u'^2(x'\delta y' - y'\delta x')$: de sorte que nous avons

$$\delta v' = u'^2(x'\delta Y' - y'\delta X') + iu^2(x'y - y'x);$$

et en remplacant dans la première partie : x' par X', y' par Y';

$$\delta v' = u'^2(X'\delta Y' - Y'\delta X') + iu'^2(x'y - y'x).$$

Mais l'équation tang. $V' = \frac{Y'}{X'}$ donne $\delta V' = U'^2(X'\delta Y' - Y'\delta X')$; partant on a

$$\delta v' = i\frac{u'}{u}\sin(v - v') + \left(\frac{u'}{U'}\right)^2 \delta V';$$

d'où l'on tire

$$\delta v' = i\, b^2 \frac{a'u'.\sin(v - v')}{au} + \delta V'.$$

L'équation $s' = u'z'$ donne $\delta s' = u'\delta z' = u'(\delta Z + z'')$; et comme $Z' = \frac{S'}{U'}$ on a $\delta Z' = \frac{\delta S'}{U'} - \frac{S'\delta U'}{U'^2}$; et par conséquent

$$\delta s' = i\frac{u'}{u}s + \frac{u'}{U'}\delta S',$$

en supprimant le terme $\frac{S'\delta U'}{U'^2}$, qui est de l'ordre du carré de la force perturbatrice.

Ainsi, en réunissant les trois formules que nous venons de trouver, il est démontré qu'on a

$$(\delta) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \delta a'u' &= -\frac{M}{M+M''}\, b^2 . \frac{(a'u')^2 \cos(v - v')}{au} + \delta A'U', \\ \delta v' &= \frac{M}{M+M''}\, b^2 . \frac{a'u'.\sin(v - v')}{au} + \delta V', \\ \delta s' &= \frac{M}{M+M''}\, b^2 . \frac{a'u'.s}{au} + \delta S', \end{aligned} \right.$$

lorsqu'on convient de négliger le carré de la force perturbatrice. Les équations trouvées dans le n.° précédent offrent le moyen de déterminer $\delta A'U'$, $\delta V'$, $\delta S'$; mais la petitesse comparative de ces quantités permet de les négliger, et alors on tombe sur les formules

rapportées dans la page 282. Cependant, pour plus de clarté, il faudra les concevoir vraies, sous la condition qu'on supprime dans l'expression analytique de αu tous les termes multipliés par b^2; parceque ceux-ci produiraient dans $\delta\alpha' u'$, $\delta v'$, $\delta s'$ des termes multipliés par ib^4; c'est-à-dire des termes du même ordre que ceux qui entrent dans l'expression des quantités negligées $\delta A' U'$, $\delta V'$, $\delta S'$.

242. Imaginons maintenant, que par l'intégration directe des trois équations désignées par $[\delta u']$ dans le n.° 234 on ait obtenu

$$n't = v' - 2\,\varepsilon' \sin c' v' + \frac{3}{4}\varepsilon'^2 \sin 2c' v' + i\Psi(v'):$$

de sorte que $i\Psi(v')$ soit la partie de $n't$ due à la première puissance de la force perturbatrice. En faisant, pour un moment, $a = n't$;

$$F(v') = 2\,\varepsilon' \sin c' v' - \frac{3}{4}\varepsilon'^2 \sin 2c' v',$$

on a l'équation $v' = a + F(v') - i\Psi(v')$, qui, d'après la théorême de Lagrange donne

$$v' = a + \{F(a) - i\Psi(a)\} + \frac{1}{1.2}\frac{d.\{F(a) - i\Psi(a)\}^2}{da}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.\{F(a) - i\Psi(a)\}^3}{da^2}$$
$$+ \text{etc.};$$

donc en négligeant le carré de la fraction i, il est clair que nous avons

$$v' = a + F(a) + \frac{1}{1.2}\frac{d.\overline{F(a)}^2}{da} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.\overline{F(a)}^3}{da^2} + \text{etc.}$$
$$- i\Psi(a) - \frac{d.[F(a).i\Psi(a)]}{da} - \frac{1}{1.2}\frac{d^2.[\overline{F(a)}^2.i\Psi(a)]}{da^2} - \text{etc.}$$

La première ligne de cette expression étant la valeur de v' qui aurait lieu dans le cas du mouvement elliptique, on doit en conclure que la seconde ligne constitue la perturbation de v', et que par conséquent on a l'équation

$$\delta v' = -i\Psi(a) - \frac{d.[F(a).i\Psi(a)]}{da} - \frac{1}{1.2}\frac{d^2[\overline{F(a)}^2.i\Psi(a)]}{da^2} - \text{etc.}$$

Or il résulte de la série même de Lagrange, que l'équation $v' = a + F(v')$ donne

$$\int i\Psi(v')\,dv' = \int i\Psi(a)\,da + i\Psi(a).F(a) + \frac{1}{1.2}\frac{d.[\overline{F(a)}^2.i\Psi(a)]}{da} \text{ etc.}$$

Donc l'équation précédente revient à dire, que $-\int da.\delta v' = \int i\Psi(v')\,dv'$; ou, en d'autres termes, que

$$\delta v' = -i\Psi(v').\frac{dv'}{da}.$$

Et comme on néglige le carré de la force perturbatrice, on peut ici substituer pour $\frac{dv'}{da}$ la valeur fournie par l'équation $v' = a + F(v')$; et alors on obtient

$$\delta v' = -i\Psi(v').\left\{1 - \frac{d.F(v')}{dv'}\right\}^{-1}.$$

Donc en faisant, pour plus de simplicité

$$\theta(v,v') = (1 - 2\,\varepsilon' \cos c'v' + \tfrac{3}{2}\varepsilon'^2 \cos 2c'v' + \text{etc.}).\frac{a'u'}{au}.\sin(v-v')$$

l'expression de $n't$ sera celle-ci;

$$n't = v' - 2\,\varepsilon' \sin c'v' + \tfrac{3}{4}\varepsilon'^2 \sin 2c'v' - ib^2\theta(v,v').$$

Cela posé, si l'on représente par $nt = v + f(v)$ l'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie, on aura, par l'élimination de t entre ces deux équations;

$$mv + mf(v) = v' - 2\,\varepsilon' \sin c'v' + \tfrac{3}{4}\varepsilon'^2 \sin 2c'v' - ib^2\theta(v,v');$$

ou bien,

$$v' = mv + mf(v) + 2\,\varepsilon' \sin c'v' - \tfrac{3}{4}\varepsilon'^2 \sin 2c'v' + ib^2\theta(v,v').$$

Soit $v' = \Gamma(v)$ la valeur de v' en fonction explicite de v qu'on tirerait de cette équation, après y avoir fait $i = 0$. La valeur de v' qui satisfait à la même équation lorsqu'on tient compte du terme multiplié par i peut être représentée par $\Gamma(v) + \delta' v'$. Donc, en changeant v' en $v' + \delta' v'$ on doit avoir

$$\delta' v' = \delta' v'(2\,\varepsilon' \cos c'v' - \tfrac{3}{2}\varepsilon'^2 \cos 2c'v') + ib^2\theta(v,v') + ib^2\delta' v'\frac{d.\theta(v,v')}{dv'} + \text{etc.}$$

d'où l'on tire, en négligeant les termes multipliés par i^2;

$$\delta' v' = \frac{i b^2 \theta(v,v')}{1 - \frac{d \,.\, F(v')}{dv'}} = \delta v' \;;$$

Donc, en substituant ici pour $\theta(v,v')$ sa valeur posée plus haut, il viendra

$$\delta' v' = \delta v' = i b^2 \,.\, \frac{a'u'}{a u} \sin(v - v')$$

ce qui rend raison de la régle énoncée dans la page 282, pour tenir compte de la perturbation de la longitude de la Terre due à l'action de la Lune.

L'analyse que je viens d'exposer fait voir *a priori* à quoi tient l'avantage de la considération indirecte du mouvement du centre de gravité de la Terre et de la Lune dans la recherche des perturbations de la Terre dues à l'action de la Lune : c'est un artifice de calcul, par lequel on évite au lieu de surmonter l'obstacle. NEWTON avait senti cette moindre aberration du mouvement elliptique dans le mouvement du centre de gravité. Mais le peu de mots qu'on lit, à ce sujet, dans la Prop. 67. du I.er Livre des Principes ne me paroissent pas suffire pour en demeurer convaincu. Au reste, on doit, peut-être, à ce laconisme de NEWTON un intéressant Mémoire d'EULER publié en 1750 dans le I.er vol. des *Novi Com.i de S.t Pétersbourg*, où (Voyez p. 441), il trouve, par l'intégration directe des équations différentielles en x', y', z' une expression de $\delta v'$ *équivalente* à celle-ci ;

$$\delta v' = \frac{b^2 I(1 - 4m + 6m^2)}{(1 - 2m)(1 - m)^2} \sin(nt - n't) \;;$$

ce qui donne, $\delta v' = \frac{M}{M + M''} b^2 \left(1 + \frac{3}{2} m^2\right) . \sin(nt - n't)$, en développant le coefficient, et substituant pour I sa valeur $i\left(1 + \frac{1}{2} m^2\right)$. Si EULER avait tenu compte de la *variation* dans l'expression des coordonnées lunaires, il aurait obtenu $\frac{3}{2} m^2 - \frac{5}{16} m^2$ au lieu de $\frac{3}{2} m^2$, comme on le conclud aisément de la formule générale qne j'ai donnée plus haut (p. 288). Or, ce résultat ne diffère pas sensiblement de celui qui est fourni par la considération indirecte du mouvement du centre de gravité ; et il est assez singulier de voir, après cela, qu'EULER

infirmait par la phrase « *Unde patet considerationem centri gravitatis* « *effectum Lunae nimis parvum exhibere* » (Voyez p. 437) le principe de NEWTON, tandis qu'une simple transformation de son résultat en offre une démonstration. (*)

§ 4.

Développement des fonctions des coordonnées elliptiques de la Lune jusqu'aux quantités du cinquième ordre.

243. Pour développer ces fonctions, il est nécessaire, avant tout, de nous occuper du développement de la fonction

$$\{\sqrt{1+s_i^2}+e\cos(cv-\int\varpi dv)\}^{-m};$$

m désignant un nombre entier quelconque. D'après la transformation de $1+s_i^2$ déjà donnée dans le n.° 214, il est clair que si l'on fait pour plus de simplicité

$$x=\frac{\sqrt{(1+\gamma^2)}-1}{\sqrt{(1+\gamma^2)}+1}\,; \qquad a=\frac{2}{1+\sqrt{(1+\gamma^2)}}\,,$$

$$\varphi=2gv-2\int\theta dv; \qquad D=1-2x.\cos\varphi+x^2, \text{ l'on a}$$

$$\{\sqrt{1+s_i^2}+e\cos(cv-\int\varpi dv)\}^{-m}=a^m\{\sqrt{D}+ae\cos(cv-\int\varpi dv)\}^{-m}.$$

Donc, en développant le second membre de cette équation par la formule ordinaire du binome, et écrivant simplement cv au lieu de $cv-\int\varpi dv$, il viendra

$$[\sqrt{1+s_i^2}+e\cos cv]^{-m}=$$

$$a^m D^{-\frac{m}{2}}-ma^{m+1}D^{-\frac{(m+1)}{2}}e\cos cv+\frac{m(m+1)}{1.2}a^{m+2}D^{-\frac{(m+2)}{2}}e^2\cos^2 cv$$

$$-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}a^{m+3}D^{-\frac{(m+3)}{2}}e^3\cos^3 cv+\text{etc.}$$

Or l'on a, en général,

$$D^{-n}=A_0+2A_1xn\cos\varphi+2A_2x^2\frac{n(n+1)}{1.2}\cos 2\varphi+2A_3x^3\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cos 3\varphi+\text{etc.};$$

$$A_i=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+i}{i+1}x^2+\frac{n.n+1}{1.2}\cdot\frac{(n+i)(n+i+1)}{(i+1)(i+2)}x^4+\text{etc.}$$

(Voyez tome II, page 276 des Exercices de calcul intégral par M. *Legendre*). Ainsi l'on pourra développer sans difficulté chacun des termes de la série précédente.

244. Bornons nous à calculer ce développement, en négligeant les quantités qui passent le cinquième ordre par rapport aux puissances et les produits des deux constantes e et γ. Pour cela il suffit de prendre

(*) Voyez la fin du § 4 du 3.ième volume.

$$\sqrt{1+\gamma^2} = 1 + \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{8}\gamma^4; \qquad x = \tfrac{1}{4}\gamma^2 + \tfrac{1}{8}\gamma^4;$$

$$a^m = \left(1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \tfrac{1}{16}\gamma^4\right)^{-m} = 1 - \frac{m}{4}\gamma^2 + \frac{3m+m^2}{32}\gamma^4.$$

Cela posé, l'on trouve

$$[\sqrt{1+s_1^2} + e\cos cv]^{-m} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(1 - \frac{m}{4}\gamma^2 + \frac{6m+3m^2}{64}\gamma^4\right) + \left(\frac{m}{4} - \frac{2m+m^2}{16}\gamma^2\right)\gamma^2\cos\varphi \\ + \frac{m\cdot m+2}{64}\gamma^4\cos 2\varphi \end{array}\right\}$$

$$-m\,e\cos cv\left\{\begin{array}{l} \left(1 - \frac{(m+1)}{4}\gamma^2 + \frac{6(m+1)+3(m+1)^2}{64}\gamma^4\right) \\ + \left(\frac{m+1}{4} - \frac{2(m+1)+(m+1)^2}{16}\gamma^2\right)\gamma^2\cos\varphi + \frac{m+1\cdot m+3}{64}\gamma^4\cos 2\varphi \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{m\cdot m+1}{1\cdot 2}e^2\cos^2 cv\left\{\left(1 - \frac{m+2}{4}\gamma^2\right) + \frac{m+2}{4}\gamma^2\cos\varphi\right\}$$

$$- \frac{m\cdot m+1\cdot m+2}{1\cdot 2\cdot 3}e^3\cos^3 cv\left\{\left(1 - \frac{m+3}{4}\gamma^2\right) + \frac{m+3}{4}\gamma^2\cos\varphi\right\}$$

$$+ \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}e^4\cos^4 cv$$

$$- \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3\cdot m+4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}e^5\cos^5 cv.$$

Maintenant, si l'on substitue à la place des puissances de $\cos cv$ leurs valeurs exprimées par les *cosinus* des multiples de l'arc, on obtiendra la formule suivante :

$$\left\{\sqrt{1+\gamma^2\sin^2(gv - \int\theta dv)} + e\cos(cv - \int\varpi dv)\right\}^{-m} =$$

$$\cos 0v \quad \left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{m}{4}\gamma^2 + \frac{m\cdot m+1}{4}e^2 + \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{64}e^4 + \frac{6m+3m^2}{64}\gamma^4 \\ - \frac{m\cdot m+1\cdot m+2}{16}e^2\gamma^2 \end{array}\right.$$

$$\cos cv \quad e\left\{\begin{array}{l} -m + \frac{m\cdot m+1}{4}\gamma^2 - \frac{m\cdot m+1\cdot m+2}{8}e^2 - \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3\cdot m+4}{192}e^4 \\ \frac{-6m(m+1) - 3m(m+1)^2}{64}\gamma^4 + \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{32}e^2\gamma^2 \end{array}\right.$$

$$\cos 2cv \quad e^2 \left\{ -\frac{m\cdot m+1}{4} + \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{48} e^2 - \frac{m\cdot m+1\cdot m+2}{16}\gamma^2 \right.$$

$$\cos 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \frac{m}{4} + \frac{m\cdot m+1\cdot m+2}{16} e^2 - \frac{2m+m^2}{16}\gamma^2 \right.$$

$$\cos 3cv \quad e^3 \left\{ -\frac{m\cdot m+1\cdot m+2}{24} - \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3\cdot m+4}{384} e^2 + \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{96}\gamma^2 \right.$$

$$\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\frac{m\cdot m+1}{8} - \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{64} e^2 + \frac{2m(m+1)+m(m+1)^2}{32}\gamma^2 \right.$$

$$\cos 2gv-cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\frac{m\cdot m+1}{8} - \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{64} e^2 + \frac{2m(m+1)+m(m+1)^2}{32}\gamma^2 \right.$$

$$\cos 4cv \quad e^4 \left\{ \frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{192} \right.$$

$$\cos 4gv \quad \gamma^4 \left\{ \frac{m\cdot m+2}{64} \right.$$

$$\cos 2gv+2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{m\cdot m+1\cdot m+2}{32} \right.$$

$$\cos 2gv-2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{m\cdot m+1\cdot m+2}{32} \right.$$

$$\cos 2gv+3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ -\frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{192} \right.$$

$$\cos 2gv-3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ -\frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3}{192} \right.$$

$$\cos 5cv \quad e^5 \left\{ -\frac{m\cdot m+1\cdot m+2\cdot m+3\cdot m+4}{1920}. \right.$$

Il ne faut pas perdre de vue que, pour simplifier l'écriture de cette formule, nous avons remplacé $cv-\int \varpi dv$ par cv et $gv-\int \theta dv$ par gv: comme ce changement porte uniquement sur les argumens, sans affecter les coefficiens, on pourra toujours rétablir les formules que l'on aura ainsi formées dans leur état naturel en y écrivant

$$cv-\int \varpi dv \quad \text{au lieu de} \quad cv,$$

$$gv-\int \theta dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad gv.$$

Nous ferons souvent usage de cette abréviation.

245. En faisant $m=2$ dans la formule précédente, et retenant seulement le terme non périodique, c'est-à-dire le coefficient de $\cos 0v$,

on aura la quantité désignée par λ dans le n.° 213; de sorte que, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au cinquième, l'on a

$$\lambda = 1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{15}{8}e^4 + \frac{3}{8}\gamma^4 - \frac{3}{2}e^2\gamma^2;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{1}{8}\gamma^4;$$

$$\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{1}{3}} = 1 + e^2 + e^4 - \frac{1}{2}e^2\gamma^2;$$

$$\lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{4}{3}} = q = 1 + e^2 + \gamma^2 + e^4 + \frac{1}{2}e^2\gamma^2.$$

Réduisons l'expression de

$$u_{,} = \lambda^{\frac{2}{3}}(1+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{1+s_{,}^2} + e\cos cv\right\},$$

définie dans le n.° 216, à

$$u_{,} =$$

$$\begin{array}{lll}
\cos 0v & & \{\; 1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + e^4 - \frac{3}{64}\gamma^4 - \frac{1}{4}e^2\gamma^2 \\
\cos cv & e & \{\; 1 + e^2 + e^4 - \frac{1}{2}e^2\gamma^2 \\
\cos 2gv & \gamma^2 & \{ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{16}\gamma^2 \\
\cos 4gv & \gamma^4 & \{ -\frac{1}{64}.
\end{array}$$

En différentiant cette expression, et se rappelant que cv et gv tiennent respectivement la place de $cv - \int \varpi dv$ et $gv - \int \theta dv$, il viendra

$$-\frac{du_{,}}{dv} =$$

$$\begin{array}{lll}
\sin cv & e & \left\{ 1 + e^2 + e^4 - \frac{1}{2}e^2\gamma^2 \right\}\left(c - \frac{d\cdot\int\varpi dv}{dv}\right) \\
\sin 2gv & \gamma^2 & \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}\gamma^2 \right\}\left(g - \frac{d\cdot\int\theta dv}{dv}\right) \\
\sin 4gv & \gamma^4 & \left\{ -\frac{1}{16} \right\}\left(g - \frac{d\cdot\int\theta dv}{dv}\right).
\end{array}$$

246. Maintenant, si l'on développe les puissances négatives de $u_{,}$ à l'aide de la formule générale rapportée plus haut, l'on obtiendra sans difficulté les résultats suivans :

$$\cos 0v \quad \left\{ \; 1 - \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{9}{64}\gamma^4 + \tfrac{3}{8}e^2\gamma^2 \right.$$
$$\cos cv \quad e \left\{ -1 + \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4 - \tfrac{3}{8}\gamma^4 - \tfrac{1}{4}e^2\gamma^2 \right.$$
$$\cos 2cv \quad e^2 \left\{ \; \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{8}\gamma^2 \right.$$
$$\cos 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \; \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}\gamma^2 + \tfrac{1}{8}e^2 \right.$$
$$\cos 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \tfrac{1}{8}e^2 \right.$$
$$\cos 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \tfrac{1}{8}e^2 \right.$$
$$\cos 3cv \quad e^3 \left\{ -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \tfrac{1}{16}e^2 \right.$$
$$\cos 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \; \tfrac{3}{16} \right.$$
$$\cos 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \; \tfrac{3}{16} \right.$$
$$\cos 4cv \quad e^4 \left\{ \; \tfrac{1}{8} \right.$$
$$\cos 4gv \quad \gamma^4 \left\{ \; \tfrac{3}{64} \right.$$
$$\cos 2gv + 3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ -\tfrac{1}{8} \right.$$
$$\cos 2gv - 3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ -\tfrac{1}{8} \right.$$
$$\cos 5cv \quad e^5 \left\{ -\tfrac{1}{16} \right.$$
$$\cos 4gv + cv \quad e\gamma^4 \left\{ -\tfrac{1}{16} \right.$$
$$\cos 4gv - cv \quad e\gamma^4 \left\{ -\tfrac{1}{16}; \right.$$

$$\frac{q}{u_i^3} =$$

$$\cos 0v \quad \left\{ \; 1 + e^2 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \tfrac{3}{64}\gamma^4 - \tfrac{1}{4}e^2\gamma^2 + \tfrac{5}{8}e^4 \right.$$
$$\cos cv \quad e \left\{ -3 - \tfrac{3}{2}e^2 - \tfrac{3}{8}\gamma^4 + \tfrac{3}{4}e^2\gamma^2 - \tfrac{9}{8}e^4 \right.$$
$$\cos 2cv \quad e^2 \left\{ \; 3 + \tfrac{3}{2}e^2 - \tfrac{3}{4}\gamma^2 \right.$$
$$\cos 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \; \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{4}e^2 - \tfrac{3}{16}\gamma^2 \right.$$
$$\cos 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4}\gamma^2 - \tfrac{21}{8}e^2 \right.$$
$$\cos 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4}\gamma^2 - \tfrac{21}{8}e^2 \right.$$
$$\cos 3cv \quad e^3 \left\{ -\tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{4}\gamma^2 - \tfrac{25}{16}e^2 \right.$$

$+ \cos 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \quad \frac{15}{8} \right.$

$\cos 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \quad \frac{15}{8} \right.$

$\cos 4cv \quad e^4 \left\{ \quad \frac{15}{8} \right.$

$\cos 4gv \quad \gamma^4 \left\{ \quad \frac{15}{64} \right.$

$\cos 2gv + 3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ - \frac{15}{8} \right.$

$\cos 2gv - 3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ - \frac{15}{8} \right.$

$\cos 5cv \quad e^5 \left\{ - \frac{21}{16} \right.$

$\cos 4gv + cv \quad e\gamma^4 \left\{ - \frac{9}{16} \right.$

$\cos 4gv - cv \quad e\gamma^4 \left\{ - \frac{9}{16}; \right.$

$$\frac{q}{u_i^4} =$$

$\cos 0v \quad \left\{ \quad 1 + 2e^2 + \frac{1}{8}\gamma^4 - e^2\gamma^2 + \frac{9}{8}e^4 \right.$

$\cos cv \quad e \left\{ -4 - 3e^2 + \gamma^2 - \frac{25}{16}\gamma^4 - 2e^4 + \frac{9}{4}e^2\gamma^2 \right.$

$\cos 2cv \quad e^2 \left\{ \quad 5 - \frac{5}{2}\gamma^2 + \frac{5}{2}e^2 \right.$

$\cos 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \quad 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{9}{2}e^2 \right.$

$\cos 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ - \frac{5}{2} + \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{45}{8}e^2 \right.$

$\cos 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ - \frac{5}{2} + \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{45}{8}e^2 \right.$

$\cos 3cv \quad e^3 \left\{ -5 + \frac{15}{4}\gamma^2 - \frac{5}{2}e^2 \right.$

$\cos 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \quad \frac{15}{4} \right.$

$\cos 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \quad \frac{15}{4} \right.$

$\cos 4cv \quad e^4 \left\{ \quad \frac{35}{8} \right.$

$\cos 4gv \quad \gamma^4 \left\{ \quad \frac{3}{8} \right.$

$\cos 2gv + 3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ - \frac{35}{8} \right.$

$\cos 2gv - 3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ - \frac{35}{8} \right.$

$$
\begin{array}{lll}
+ \cos 5cv & e^5 & \{ -\frac{7}{2} \\
\cos 4gv + cv & e\gamma^4 & \{ -\frac{35}{32} \\
\cos 4gv - cv & e\gamma^4 & \{ -\frac{35}{32} ;
\end{array}
$$

$$\frac{q}{u_{\prime}^{5}} =$$

$$
\begin{array}{lll}
\cos 0v & & \{ \quad 1 + \frac{7}{2}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{9}{4}e^4 - \frac{21}{8}e^2\gamma^2 + \frac{25}{64}\gamma^4 \\
\cos cv & e & \{ -5 - \frac{25}{4}e^2 + \frac{5}{2}\gamma^2 \\
\cos 2cv & e^2 & \{ \quad \frac{15}{2} - \frac{45}{8}\gamma^2 + 5e^2 \\
\cos 2gv & \gamma^2 & \{ \quad \frac{5}{4} - \frac{15}{16}\gamma^2 + \frac{65}{8}e^2 \\
\cos 2gv + cv & e\gamma^2 & \{ -\frac{15}{4} \\
\cos 2gv - cv & e\gamma^2 & \{ -\frac{15}{4} \\
\cos 3cv & e^3 & \{ -\frac{35}{4} \\
\cos 2gv + 2cv & e^2\gamma^2 & \{ \quad \frac{105}{16} \\
\cos 2gv - 2cv & e^2\gamma^2 & \{ \quad \frac{105}{16} \\
\cos 4cv & e^4 & \{ \quad \frac{35}{4} \\
\cos 4gv & \gamma^4 & \{ \quad \frac{35}{64} ;
\end{array}
$$

$$\frac{qs_{\prime}^{2}}{u_{\prime}^{5}} =$$

$$
\begin{array}{lll}
\cos 0v & & \{ \quad \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{7}{4}e^2\gamma^2 - \frac{7}{16}\gamma^4 \\
\cos cv & e & \{ -\frac{5}{2}\gamma^2 \\
\cos 2cv & e^2 & \{ \quad \frac{15}{4}\gamma^2 \\
\cos 2gv & \gamma^2 & \{ -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}e^2 + \frac{3}{4}\gamma^2 \\
\cos 2gv + cv & e\gamma^2 & \{ \quad \frac{5}{4} \\
\cos 2gv - cv & e\gamma^2 & \{ \quad \frac{5}{4} \\
\cos 2gv + 2cv & e^2\gamma^2 & \{ -\frac{15}{8} \\
\cos 2gv - 2cv & e^2\gamma^2 & \{ -\frac{15}{8} \\
\cos 4gv & \gamma^4 & \{ -\frac{5}{16} ;
\end{array}
$$

$$\frac{q}{u_i^6} =$$

$\cos 0v$	$\left\{ 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{11}{2}e^2 \right.$
$\cos cv$	$e\left\{ -6 - 12e^2 + \frac{9}{2}\gamma^2 \right.$
$\cos 2cv$	$e^2\left\{ \quad \frac{21}{2} \right.$
$\cos 2gv$	$\gamma^2\left\{ \quad \frac{3}{2}. \right.$

Nous avons rejeté de cette dernière fonction tous les termes d'un ordre supérieur au second; et dans le développement des fonctions $\frac{q}{u_i^5}$, $\frac{qs_i^2}{u_i^5}$ on a négligé tous les termes d'un ordre supérieur au quatrième.

Cela suffit à cause des facteurs qui multiplient ces mêmes fonctions dans les équations différentielles.

§ 5.

Sur l'expression du tems, en fonction de la longitude vraie de la Lune, qui constitue la première *approximation relativement à cette troisième coordonnée de son orbite.*

247. D'après la conclusion établie dans le n.° 216 et de nouveau rappelée dans le n.° 221, il semble que, sur ce point, il n'y a pas lieu à un choix différent, et qu'il convient de s'en tenir à l'expression de nt fournie par l'équation

$$[nt] = v + \int \zeta dv + \frac{(1+\zeta)}{1+\Pi} \int \left(\frac{X}{\lambda} - 1\right) dv.$$

Mais, en développant la valeur de $\frac{X}{\lambda} - 1$ et exécutant ensuite l'intégration indiquée, l'on voit naître le terme ayant pour argument $2(gv - \int \theta dv) - 2(cv - \int \varpi dv)$ avec un coefficient dont l'ordre est abaissé de *deux* unités, en vertu du diviseur $2g - 2c - \frac{2d \cdot \int \theta dv}{dv} + \frac{2d \cdot \int \varpi dv}{dv}$ qu'il a acquis par cette opération.

Cependant on sait, par l'analyse exposée depuis le n.° 100 jusqu'au n.° 119, que l'addition de la perturbation δnt fait disparaître dans la somme $[nt] + \delta nt$ la partie du même coefficient qui est d'un ordre inférieur au quatrième. Ainsi, d'après cette considération, il est naturel d'*exclure* de l'intégrale $\int\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)dv$ le terme affecté de l'argument $2(gv - \int\theta dv) - 2(cv - \int\varpi dv)$, et d'en réserver le rétablissement au moment où l'on pourra le réunir à celui qui se trouvera dans l'expression de δnt. En effet ce moyen fort simple facilite une partie des premiers développemens des fonctions de la forme perturbatrice, en épargnant la peine de calculer plusieurs termes qui seraient ensuite détruits par les développemens ultérieurs.

A la rigueur on devrait employer un artifice semblable à l'égard du terme affecté de l'argument $2(gv - \int\theta dv) - cv + \int\varpi dv$, lequel a, dans l'intégrale $\int\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)dv$, un coefficient du *troisième* ordre, et reparaît dans δnt avec un coefficient du *même* ordre (Voyez plus bas n.° 248). Mais, comme ici, il s'opère une simple modification dans le coefficient numérique de $e\gamma^2$, sans altération relativement à l'ordre du terme principal, il devient beaucoup moins avantageux d'exclure ce terme de la valeur de $[nt]$. Néanmoins, s'il était question d'une définition précise, il faudrait dire que le caractère d'une véritable première approximation est celui, d'être composée uniquement de termes relatifs à des argumens qui reparaissent avec des coefficiens d'un ordre plus élevé dans les approximations successives. C'est ce qui a lieu à l'égard des fonctions $s_{,}$ et $\frac{u_{,}}{a}$ qui constituent, respectivement, la première approximation des deux coordonnées s, u.

248. Maintenant, si l'on fait $m = 2$ dans la formule générale trouvée dans le n.° 244, et si l'on multiplie le résultat par $\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{1}{8}\gamma^4$, l'on aura, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au cinquième,

$$-\frac{X}{\lambda} =$$

$\cos cv$		$\Big\{ -1$
$\cos cv$	e	$\Big\{ \; 2 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{13}{32}\gamma^4$
$\cos 2cv$	e^2	$\Big\{ -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\gamma^2 - \frac{1}{4}e^2$
$\cos 2gv$	γ^2	$\Big\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{3}{4}e^2$
$\cos 2gv - cv$	$e\gamma^2$	$\Big\{ \; \frac{3}{4} - \frac{9}{16}\gamma^2 + \frac{3}{4}e^2$
$\cos 2gv + cv$	$e\gamma^2$	$\Big\{ \; \frac{3}{4} - \frac{9}{16}\gamma^2 + \frac{3}{4}e^2$
$\cos 3cv$	e^3	$\Big\{ \; 1 - \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2$
$\cos 2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2$	$\Big\{ -\frac{3}{4}$
$\cos 2gv + 2cv$	$e^2\gamma^2$	$\Big\{ -\frac{3}{4}$
$\cos 4cv$	e^4	$\Big\{ -\frac{5}{8}$
$\cos 4gv$	γ^4	$\Big\{ -\frac{1}{8}$
$\cos 2gv - 3cv$	$e^3\gamma^2$	$\Big\{ \; \frac{5}{8}$
$\cos 2gv + 3cv$	$e^3\gamma^2$	$\Big\{ \; \frac{5}{8}$
$\cos 5cv$	e^5	$\Big\{ \; \frac{3}{8}$
$\cos 4gv - cv$	$e\gamma^4$	$\Big\{ \; \frac{15}{64}$
$\cos 4gv + cv$	$e\gamma^4$	$\Big\{ \; \frac{15}{64}.$

Donc, en intégrant et *écrivant* pour plus de simplicité dans les dénominateurs des coefficiens

$$c \text{ au lieu de } c - \frac{d\cdot\int\varpi dv}{dv},$$

$$g \;\ldots\ldots\; g - \frac{d\cdot\int\theta dv}{dv},$$

il viendra

$$(1+\text{II})\left\{\frac{[nt]-v-\int\zeta dv}{1+\zeta}\right\}=$$

$$\begin{array}{lll}
\sin cv & e & \left\{\dfrac{-2+\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{13}{32}\gamma^4}{c}\right. \\
\sin 2cv & e^2 & \left\{\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\gamma^2+\frac{1}{4}e^2}{2c}\right. \\
\sin 2gv & \gamma^2 & \left\{\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\gamma^2+\frac{3}{4}e^2}{2g}\right. \\
\sin 2gv-cv & e\gamma^2 & \left\{\dfrac{-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\gamma^2-\frac{3}{4}e^2}{2g-c}\right. \\
\sin 2gv+cv & e\gamma^2 & \left\{\dfrac{-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\gamma^2-\frac{3}{4}e^2}{2g+c}\right. \\
\sin 3cv & e^3 & \left\{\dfrac{-1+\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{3}{8}e^2}{3c}\right. \\
\sin 2gv-2cv & e^2\gamma^2 & \left\{\dfrac{\frac{3}{4}}{2g-2c}\right. \\
\sin 2gv+2cv & e^2\gamma^2 & \left\{\dfrac{\frac{3}{4}}{2g+2c}\right. \\
\sin 4cv & e^4 & \left\{\dfrac{5}{32\cdot c}\right. \\
\sin 4gv & \gamma^4 & \left\{\dfrac{1}{32\cdot g}\right. \\
\sin 2gv-3cv & e^3\gamma^2 & \left\{-\dfrac{\frac{5}{8}}{3g-3c}\right. \\
\sin 2gv+3cv & e^3\gamma^2 & \left\{-\dfrac{\frac{5}{8}}{2g+3c}\right. \\
\sin 5cv & e^5 & \left\{-\dfrac{3}{40\cdot c}\right. \\
\sin 4gv+cv & e\gamma^4 & \left\{-\dfrac{\frac{15}{64}}{4g+c}\right. \\
\sin 4gv-cv & e\gamma^4 & \left\{-\dfrac{\frac{15}{64}}{4g-c}.\right.
\end{array}$$

Cela posé, voici comment on peut démontrer assez facilement, par la considération directe des équations différentielles du second ordre, que la perturbation δnt détruit précisément le terme

$$\frac{3}{4} e^2 \gamma^2 \frac{\sin(2gv - 2cv)}{2g - 2c}$$

que l'on voit dans cette formule.

249. Comme il est question d'un argument indépendant de l'angle $v - v'$ et d'un coefficient du quatrième ordre indépendant de l'excentricité du Soleil, on reconnaîtra avec une légère réflexion qu'il suffit à notre objet :

1.° de conserver les termes suivans dans les équations différentielles (I)'', (II)'' posées dans le n.° 224; savoir

$$-\frac{d^2 \cdot \delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2}\mu^2\right)\delta s = (\mu^2 R_2 - P)\gamma \sin gv ,$$

$$-\frac{d^2 \cdot \delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2}\mu^2\right)\delta u = \mu^2 R_4 + \frac{3}{2}\mu^2\,\delta u - q\left(\frac{a}{a'}\right)\delta T - \frac{Q'q}{1 + \gamma^2}\, e \cos cv ;$$

2.° qu'il suffit de réduire à $\frac{2\delta u}{u_{\prime}}$ la valeur de Y donnée dans le n.° 215, et celle de $d \cdot \delta nt$ à

$$d \cdot \delta nt = -\frac{X}{\lambda}\, dv\, \frac{2\delta u}{u_{\prime}} ;$$

3.° qu'il suffit de faire dans ces équations

$$R_2 = R'' = \frac{3}{2} q \frac{(a'u')^3}{u_{\prime}^4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{q}{u_{\prime}^4} = \frac{3}{2} - 6 \cdot e \cos cv + \frac{15}{2} e^2 \cos 2cv ;$$

$$R_4 = R^{\text{IV}} + \delta R^{\text{V}} = q \frac{(a'u')^3}{u_{\prime}^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta u}{u_{\prime}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{u_{\prime}^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{q}{u_{\prime}^4}\,\delta u ;$$

$$R_4 + \frac{3}{2}\delta u = -\frac{3}{2} e \cos cv - \frac{3}{4} e\, \gamma^2 \cos(2gv - cv) ;$$

$$-q\left(\frac{a}{a'}\right)\delta T = 3\,\delta s \cdot \gamma \sin gv - \frac{3}{2}(\delta s)^2 ;$$

$$-\frac{X}{\lambda} = -1 + 2e \cos cv ;$$

$$\frac{Q'q}{1 + \gamma^2} = Q'.$$

Il suit de là que l'on a

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}\mu^2\right)\delta s=\left(\frac{3}{2}\mu^2-P\right)\gamma\sin gv$$
$$-3\mu^2 e\gamma\sin(gv-cv)+\frac{15}{4}\mu^2e^2\gamma\sin(gv-2cv);$$

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}\mu^2\right)\delta u=-\left(\frac{3}{2}\mu^2+Q'\right)e\cos cv$$
$$-\frac{3}{4}e\gamma^2\cos(2gv-cv)+3\delta s.\gamma\sin gv-\frac{3}{2}(\delta s)^2;$$

$$d.\delta nt=(-1+2e\cos cv)\frac{2\delta u}{u_{\prime}}dv.$$

Mais on sait que dans ces équations les quantités P et Q' doivent rendre nul le coefficient de $\gamma\sin gv$ et celui de $e\cos cv$; partant l'on a

$$\frac{3}{2}\mu^2-P=0;\qquad \frac{3}{2}\mu^2+Q'=0;$$

d'où l'on tire (Voyez n.° 216)

$$v-\int(1-\sqrt{1+P})dv=\int\sqrt{1+\tfrac{3}{2}\mu^2}\,dv=v(1+\tfrac{3}{4}\mu^2+\text{etc.});$$
$$v-\int(1-\sqrt{1+Q'})dv=\int\sqrt{1-\tfrac{3}{2}\mu^2}\,dv=v(1-\tfrac{3}{4}\mu^2+\text{etc.});$$

et par conséquent

$$g=1+\frac{3}{4}\mu^2;\qquad c=1-\frac{3}{4}\mu^2$$

pour la première valeur de g et c.

Actuellement, si l'on intègre l'équation différentielle en δs, il viendra

$$\delta s=-\frac{3\mu^2 e\gamma\sin(gv-cv)}{(g-c)^2-1-\frac{3}{2}\mu^2}+\frac{15}{4}\cdot\frac{\mu^2e^2\gamma\sin(gv-2cv)}{(g-2c)^2-1-\frac{3}{2}\mu^2}.$$

Mais nous venons de voir que l'on a $g=1+\frac{3}{4}\mu^2$, $c=1-\frac{3}{4}\mu^2$: donc, en substituant ces valeurs et développant ensuite les coefficiens, l'on aura, en retenant seulement le premier terme de chacun d'eux,

$$\delta s=\frac{5}{8}e^2\gamma\sin(2cv-gv)+3\mu^2e\gamma\sin(gv-cv).$$

Il suit de là que l'équation différentielle en δu donne

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}\mu^2\right)\delta u=\frac{15}{16}e^2\gamma^2\cos(2gv-2cv)-\frac{21}{4}\mu^2e\gamma^2\cos(2gv-cv),$$

et que par conséquent l'on a

$$\delta u=\frac{15}{16}e^2\gamma^2\frac{\cos(2gv-2cv)}{(2g-2c)^2-1+\frac{3}{2}\mu^2}-\frac{21}{4}\mu^2e\gamma^2\frac{\cos(2gv-cv)}{(2g-c)^2-1+\frac{3}{2}\mu^2};$$

ou bien, en développant les diviseurs et retenant seulement le premier terme,

$$\delta u = -\frac{7}{8} e\gamma^2 \cos(2gv - cv) - \frac{15}{16} e^2\gamma^2 \cos(2gv - 2cv).$$

En multipliant cette expression par $\frac{1}{u_1} = 1 - e\cos cv$, on obtient

$$\frac{\delta u}{u_1} = \frac{7}{8} e\gamma^2 \cos(2gv - cv) - \frac{1}{2} e^2\gamma^2 \cos(2gv - 2cv).$$

Ainsi nous avons

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = -\frac{7}{4} e\gamma^2 \cos(2gv - cv) - \frac{3}{4} e^2\gamma^2 \cos(2gv - 2cv);$$

d'où on tire, en intégrant;

$$\delta nt = \frac{7}{4} e\gamma^2 \frac{\sin(2gv - cv)}{2g - c} - \frac{3}{4} e^2\gamma^2 \frac{\sin(2gv - 2cv)}{2g - 2c}.$$

Donc dans la somme $[nt] + \delta nt$ on a

$$\left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) e\gamma^2 \frac{\sin(2gv - cv)}{2g - c} + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) e^2\gamma^2 \frac{\sin(2gv - 2cv)}{2g - 2c}.$$

Il est donc démontré, 1.° que dans la valeur *totale* de nt le coefficient de l'argument $2gv - 2cv$ doit être d'un ordre *supérieur au second*; 2.° que dans la même valeur totale le coefficient de l'argument $2gv - cv$ acquiert un signe *contraire* à celui qu'il a dans la valeur partielle $[nt]$.

250. En retenant dans $\frac{X}{\lambda}$ les termes du *sixième ordre* à l'égard de l'argument $2gv - 2cv$ seulement, on aurait trouvé dans $[nt]$ le terme

$$\frac{3}{4} e^2\gamma^2 (1 - \gamma^2 + e^2) \frac{\sin(2gv - 2cv)}{2g - 2c}:$$

mais les approximations ultérieures démontrent que l'expression de δnt détruit les trois termes de ce coefficient; de sorte que, en dernière analyse, le terme principal est de la forme

$$A e^2 \gamma^2 \sin(2gv - 2cv);$$

B désignant un coefficient numérique absolu. En attendant la démonstration complète de ce résultat, rien n'empêche d'en profiter

d'avance. En conséquence nous adopterons pour *première* approximation de nt l'expression suivante ; savoir

$$(nt)=v+\int\zeta\,dv+\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)\int\left\{\begin{array}{r}\frac{X}{\lambda}-1-\frac{3}{4}e^2\gamma^2(1-\gamma^2+e^2)\cos(2gv-2cv)\\ +\frac{7}{4}e\gamma^2\cos(2gv-cv)\end{array}\right\}dv.$$

Alors la valeur complète de nt sera telle que l'on a

$$nt=(nt)+\delta nt-\frac{7}{4}\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)e\gamma^2\frac{\sin(2gv-cv)}{2g-c}+\frac{3}{4}\left(\frac{1+\zeta}{1+\Pi}\right)e^2\gamma^2(1-\gamma^2+e^2)\frac{\sin(2gv-2cv)}{2g-2c}.$$

Et si l'on fait $\zeta=0$ et $\Pi=0$, *hors du signe intégral*, on aura, au moyen de la valeur de $[nt]$ donnée dans le n.° 248, (Voyez p. 314).

$$\begin{array}{lll}
(nt)=v+\int\zeta\,dv+ & \sin cv & e\left\{\frac{-2+\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{13}{32}\gamma^4}{c}\right.\\
 & \sin 2cv & e^2\left\{\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\gamma^2+\frac{1}{4}e^2}{2c}\right.\\
 & \sin 2gv & \gamma^2\left\{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\gamma^2+\frac{3}{4}e^2}{2g}\right.\\
 & \sin 3cv & e^3\left\{\frac{-1+\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{3}{8}e^2}{3c}\right.\\
 & \sin 2gv-cv & e\gamma^2\left\{\frac{1+\frac{9}{16}\gamma^2-\frac{3}{4}e^2}{2g-c}\right.\\
 & \sin 2gv+cv & e\gamma^2\left\{\frac{-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\gamma^2-\frac{8}{4}e^2}{2g+c}\right.\\
 & \sin 2gv+2cv & e^2\gamma^2\left\{\frac{\frac{3}{4}}{2g+2c}\right.\\
 & \sin 4cv & e^4\left\{\frac{5}{32.c}\right.\\
 & \sin 4gv & \gamma^4\left\{\frac{1}{32.g}\right.\\
 & \sin 2gv-3cv & e^3\gamma^2\left\{-\frac{\frac{5}{8}}{2g-3c}\right.\\
 & \sin 2gv+3cv & e^3\gamma^2\left\{-\frac{\frac{5}{8}}{2g+3c}\right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sin 5cv & e^5 & \left\{ -\dfrac{3}{40\cdot c} \right. \\ \sin 4gv + cv & e\gamma^4 & \left\{ -\dfrac{\frac{15}{64}}{4g+c} \right. \\ \sin 4gv - cv & e\gamma^4 & \left\{ -\dfrac{\frac{15}{64}}{4g-c} \right. . \end{array}$$

Telle est la formule propre à fournir la fonction de v qui a été désignée par $f'(v)$ dans le n.° 220. Ainsi nous pourrons maintenant développer ultérieurement la formule générale rapportée dans le n.° 219.

§ 6.

Développement préliminaire des fonctions des coordonnées elliptiques de l'orbite du Soleil.

251. L'expression de $\alpha' u'$ donnée dans le n.° 55 devient, en y faisant $\gamma' = 0$,

$$\alpha' u' = \frac{1}{1 - \varepsilon'\varepsilon'} \left\{ 1 + \varepsilon' \cos(c'v' - \varkappa') \right\}.$$

Cela posé, si l'on néglige les quantités d'un ordre supérieur au *cinquième*, il est facile d'obtenir les résultats suivans, où l'on a écrit pour plus de simplicité $c'v'$ au lieu de $c'v' - \varkappa_{{}_\prime}$:

$$(\alpha' u')^3 =$$

$$\begin{array}{lll} \cos 0v' & 1 & \left\{ 1 + \dfrac{9}{2}\varepsilon'^2 + \dfrac{21}{2}\varepsilon'^4 \right. \\ c'v' & \varepsilon' & \left\{ 3 + \dfrac{39}{4}\varepsilon'^2 + \dfrac{81}{4}\varepsilon'^4 \right. \\ 2c'v' & \varepsilon'^2 & \left\{ \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2}\varepsilon'^2 \right. \\ 3c'v' & \varepsilon'^3 & \left\{ \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\varepsilon'^2 ; \right. \end{array}$$

$$b^4(\alpha' u')^5 =$$

$$\begin{array}{lll} \cos 0v' & b^4 & \left\{ 1 \right. \\ c'v' & \varepsilon' b^4 & \left\{ 5 ; \right. \end{array}$$

$$(\alpha' u')^3 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2v - 2v') =$$

$$\begin{array}{lll}
\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\; 2v - 2v' & 1 & \left\{ 1 + \frac{9}{2}\varepsilon'^2 + \frac{21}{2}\varepsilon'^4 \right. \\
2v - 2v' + c'v' & \varepsilon' & \left\{ \frac{3}{2} + \frac{39}{8}\varepsilon'^2 + \frac{81}{8}\varepsilon'^4 \right. \\
2v - 2v' - c'v' & \varepsilon' & \left\{ \frac{3}{2} + \frac{39}{8}\varepsilon'^2 + \frac{81}{8}\varepsilon'^4 \right. \\
2v - 2v' + 2c'v' & \varepsilon'^2 & \left\{ \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\varepsilon'^2 \right. \\
2v - 2v' - 2c'v' & \varepsilon'^2 & \left\{ \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\varepsilon'^2 \right. \\
2v - 2v' + 3c'v' & \varepsilon'^3 & \left\{ \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\varepsilon'^2 \right. \\
2v - 2v' - 3c'v' & \varepsilon'^3 & \left\{ \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\varepsilon'^2 ; \right.
\end{array}$$

$$b^2(\alpha' u')^4 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(v - v') =$$

$$\begin{array}{lll}
\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\; v - v' & b^2 & \left\{ 1 + 7\varepsilon'^2 \right. \\
v - v' + c'v' & \varepsilon' b^2 & \left\{ 2 + \frac{19}{2}\varepsilon'^2 \right. \\
v - v' - c'v' & \varepsilon' b^2 & \left\{ 2 + \frac{19}{2}\varepsilon'^2 \right. \\
v - v' + 2c'v' & \varepsilon'^2 b^2 & \left\{ \frac{3}{2} \right. \\
v - v' - 2c'v' & \varepsilon'^2 b^2 & \left\{ \frac{3}{2} \right. \\
v - v' + 3c'v' & \varepsilon'^3 b^2 & \left\{ \frac{1}{2} \right. \\
v - v' - 3c'v' & \varepsilon'^3 b^2 & \left\{ \frac{1}{2} ; \right.
\end{array}$$

$$b^2(\alpha' u')^4 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3v - 3v') =$$

$$\begin{array}{lll}
\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\; 3v - 3v' & b^2 & \left\{ 1 + 7\varepsilon'^2 \right. \\
3v - 3v' + c'v' & \varepsilon' b^2 & \left\{ 2 + \frac{19}{2}\varepsilon'^2 \right. \\
3v - 3v' - c'v' & \varepsilon' b^2 & \left\{ 2 + \frac{19}{2}\varepsilon'^2 \right. \\
3v - 3v' + 2c'v' & \varepsilon'^2 b^2 & \left\{ \frac{3}{2} \right. \\
3v - 3v' - 2c'v' & \varepsilon'^2 b^2 & \left\{ \frac{3}{2} \right. \\
3v - 3v' + 3c'v' & \varepsilon'^3 b^2 & \left\{ \frac{1}{2} \right. \\
3v - 3v' - 3c'v' & \varepsilon'^3 b^2 & \left\{ \frac{1}{2} ; \right.
\end{array}$$

$$b^4(\alpha' u')^5 \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} (2v - 2v') =$$

$\begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}$ $2v - 2v'$	b^4	$\{ 1$
$2v - 2v' + c'v'$	$\varepsilon' b^4$	$\{ \frac{5}{2}$
$2v - 2v' - c'v'$	$\varepsilon' b^4$	$\{ \frac{5}{2}$;

$$b^4(\alpha' u')^5 \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} (4v - 4v') =$$

$\begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}$ $4v - 4v'$	b^4	$\{ 1$
$4v - 4v' + c'v'$	$\varepsilon' b^4$	$\{ \frac{5}{2}$
$4v - 4v' - c'v'$	$\varepsilon' b^4$	$\{ \frac{5}{2}$.

252. Pour éliminer de ces équations la longitude v' du Soleil, il faudra recourir à la formule générale donnée pour cet objet dans le n.° 219. Mais, afin de rendre cette élimination plus expéditive, et offrir en même tems un résultat propre à des recherches ultérieures dans cette théorie, il convient d'exécuter le développement indiqué dans le n.° 220, en prenant, conformément à l'expression de (nt) rapportée dans le n.° 250,

$$mf(v) =$$

$\sin cv$	$\frac{me}{c}$	$\{ -2 + \frac{1}{2}\gamma^2$
$2cv$	$\frac{me^2}{c}$	$\{ \frac{3}{4} - \frac{3}{8}\gamma^2 + \frac{1}{8}e^2$
$2gv$	$\frac{m\gamma^2}{g}$	$\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{9}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2$
$3cv$	$\frac{me^3}{c}$	$\{ -\frac{1}{3}$
$2gv - cv$	$\frac{me\gamma^2}{2g - c}$	$\{ 1$
$2gv + cv$	$\frac{me\gamma^2}{2g + c}$	$\{ -\frac{3}{4}$

$$
\begin{array}{lcl}
2gv + 2cv & \dfrac{me^2\gamma^2}{2g + 2c}\Big\{ & \dfrac{3}{4} \\
4cv & \dfrac{me^4}{c}\Big\{ & \dfrac{5}{32} \\
4gv & \dfrac{m\gamma^4}{g}\Big\{ & \dfrac{1}{32}.
\end{array}
$$

D'après cette valeur, on pourra former l'expression de

$$\begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix}\{i(v - v') + i'(c'v' - \varkappa')\}$$

en retenant tous les termes jusqu'au cinquième ordre inclusivement.

Nous supprimons ici les détails de ce calcul assez pénible : il suffit d'en rapporter le résultat final, en assurant qu'il a été vérifié avec assez de soin pour qu'il nous soit permis d'en garantir l'exactitude. En faisant pour plus de simplicité $E = 1 - m$, et écrivant, dans les argumens,

$$
\begin{array}{lll}
mv & \text{au lieu de} & \Lambda + mv + m\int\zeta dv, \\
c'mv & \ldots\ldots\ldots & c'\{\Lambda + mv + m\int\zeta dv\} - \varkappa', \\
cv & \ldots\ldots\ldots & cv - \int\varpi dv, \\
gv & \ldots\ldots\ldots & gv - \int\theta dv;
\end{array}
$$

dans les coefficiens

$$
\begin{array}{lll}
c & \text{au lieu de} & c - \dfrac{d\cdot\int\varpi dv}{dv} \\
g & \ldots\ldots\ldots & g - \dfrac{d\cdot\int\theta dv}{dv} \\
\beta & \ldots\ldots\ldots & i' - i,
\end{array}
$$

l'on a trouvé la formule suivante

$$\begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix}\{i(v - v') + i'(c'v' - \varkappa')\} =$$

$$
\begin{array}{lll}
\begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} iEv + i'c'mv & 1 & \Big\{ 1 - \beta^2\varepsilon'^2 - \beta^2\left(\dfrac{9}{64} - \dfrac{\beta^2}{4}\right)\varepsilon'^4 - \dfrac{\beta^2\cdot m^2e^2}{c^2} \\
iEv + (i' - 1)\,c'mv & \beta\varepsilon' & \Big\{ \begin{array}{l} -1 - \left(\frac{3}{8}(1-\beta) - \frac{1}{2}(1-\beta)^2\right)\varepsilon'^2 + \dfrac{(1-\beta)^2}{\beta}\cdot\dfrac{m^2e^2}{c^2} \\ -\left(\frac{1}{8}(1-\beta) - \frac{11}{192}(1-\beta)^2 - \frac{1}{8}(1-\beta)^3 + \frac{1}{12}(1-\beta)^4\right)\varepsilon'^4 \end{array}
\end{array}
$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\; iEv + (i'+1)c'mv \quad \beta\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{3}{8}(1+\beta) - \frac{1}{2}(1+\beta)^2\right)\varepsilon'^2 - \frac{(1+\beta)^2}{\beta}\cdot\frac{m^2e^2}{c^2} \\ + \left(\frac{1}{8}(1+\beta) - \frac{11}{192}(1+\beta)^2 - \frac{1}{8}(1+\beta)^3 + \frac{1}{12}(1+\beta)^4\right)\varepsilon'^4 \end{array}\right.$$

$$iEv + (i'-2)c'mv \quad \beta\varepsilon'^2 \left\{ \frac{3}{8} - \frac{1}{2}(2-\beta) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}(2-\beta) - \frac{3}{8}(2-\beta)^2 + \frac{1}{6}(2-\beta)^3\right)\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + (i'+2)c'mv \quad \beta\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{3}{8} + \frac{1}{2}(2+\beta) - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}(2+\beta) - \frac{3}{8}(2+\beta)^2 + \frac{1}{6}(2+\beta)^3\right)\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + i'c'mv - cv \quad \beta e\frac{m}{c} \left\{ 1 - \frac{\gamma^2}{4} + \frac{3\beta me^2}{8c} - \beta^2\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + i'c'mv + cv \quad \beta e\frac{m}{c} \left\{ -1 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{3\beta me^2}{8c} + \beta^2\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + (i'-3)c'mv \quad \beta\varepsilon'^3 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} + \frac{3}{8}(3-\beta) - \frac{1}{6}(3-\beta)^2 \\ -\left(\frac{1}{16} + \frac{(3-\beta)}{64} - \frac{91}{384}(3-\beta)^2 + \frac{3}{16}(3-\beta)^3 - \frac{1}{24}(3-\beta)^4\right)\varepsilon'^2 \end{array}\right.$$

$$iEv + (i'+3)c'mv \quad \beta\varepsilon'^3 \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{6} - \frac{3}{8}(3+\beta) + \frac{1}{6}(3+\beta)^2 \\ +\left(\frac{1}{16} + \frac{(3+\beta)}{64} - \frac{91}{384}(3+\beta)^2 + \frac{3}{16}(3+\beta)^3 - \frac{1}{24}(3+\beta)^4\right)\varepsilon'^2 \end{array}\right.$$

$$iEv + i'c'mv - 2cv \quad \beta e^2\frac{m}{c} \left\{ -\frac{3}{8} + \frac{\beta m}{2c} + \frac{3}{8}\beta^2\varepsilon'^2 - \frac{1}{16}e^2 + \frac{3}{16}\gamma^2 \right.$$

$$iEv + i'c'mv + 2cv \quad \beta e^2\frac{m}{c} \left\{ \frac{3}{8} + \frac{\beta m}{2c} - \frac{3}{8}\beta^2\varepsilon'^2 + \frac{1}{16}e^2 - \frac{3}{16}\gamma^2 \right.$$

$$iEv + i'c'mv - 2gv \quad \beta\gamma^2\frac{m}{g} \left\{ -\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\gamma^2 - \frac{3}{16}e^2 + \frac{1}{8}\beta^2\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + i'c'mv + 2gv \quad \beta\gamma^2\frac{m}{g} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{3}{16}e^2 - \frac{1}{8}\beta^2\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + (i'-1)c'mv + cv \quad \beta e\varepsilon'\frac{m}{c} \left\{ -(1-\beta) + (1-\beta)\frac{\gamma^2}{4} - \left(\frac{3}{8}(1-\beta)^2 - \frac{1}{2}(1-\beta)^3\right)\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + (i'-1)c'mv - cv \quad \beta e\varepsilon'\frac{m}{c} \left\{ (1-\beta) - (1-\beta)\frac{\gamma^2}{4} + \left(\frac{3}{8}(1-\beta)^2 - \frac{1}{2}(1-\beta)^3\right)\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + (i'+1)c'mv - cv \quad \beta e\varepsilon'\frac{m}{c} \left\{ (1+\beta) - (1+\beta)\frac{\gamma^2}{4} + \left(\frac{3}{8}(1+\beta)^2 - \frac{1}{2}(1+\beta)^3\right)\varepsilon'^2 \right.$$

$$iEv + (i'+1)c'mv + cv \quad \beta e\varepsilon'\frac{m}{c} \left\{ -(1+\beta) + (1+\beta)\frac{\gamma^2}{4} - \left(\frac{3}{8}(1+\beta)^2 - \frac{1}{2}(1+\beta)^3\right)\varepsilon'^2 \right.$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\ iEv + (i' - 4)\, c'mv \qquad \beta\varepsilon'^4 \left\{ \frac{5}{64} - \frac{91}{384}(4-\beta) + \frac{3}{16}(4-\beta)^2 - \frac{1}{24}(4-\beta)^3 \right.$$

$$iEv + (i' + 4)\, c'mv \qquad \beta\varepsilon'^4 \left\{ -\frac{5}{64} + \frac{91}{384}(4+\beta) + \frac{3}{16}(4+\beta)^2 - \frac{1}{24}(4+\beta)^3 \right.$$

$$iEv + i'c'mv - 3cv \qquad \beta e^3 \frac{m}{c} \left\{ \frac{1}{6} - \frac{3}{8}\beta\frac{m}{c} \right.$$

$$iEv + i'c'mv + 3cv \qquad \beta e^3 \frac{m}{c} \left\{ -\frac{1}{6} - \frac{3}{8}\beta\frac{m}{c} \right.$$

$$iEv + i'c'mv - 2gv + cv \qquad \beta e\gamma^2 \left\{ -\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2g-c} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\beta m^2}{cg} \right.$$

$$iEv + i'c'mv + 2gv - cv \qquad \beta e\gamma^2 \left\{ \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2g-c} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\beta m^2}{cg} \right.$$

$$iEv + i'c'mv - 2gv - cv \qquad \beta e\gamma^2 \left\{ \frac{3}{8}\cdot\frac{m}{2g+c} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\beta m^2}{cg} \right.$$

$$iEv + i'c'mv + 2gv + cv \qquad \beta e\gamma^2 \left\{ -\frac{3}{8}\cdot\frac{m}{2g+c} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\beta m^2}{cg} \right.$$

$$iEv + (i'-1)\,c'mv + 2cv \qquad \beta\varepsilon' e^2 \frac{m}{c} \left\{ \frac{3}{8}(1-\beta) - \frac{1}{2}(1-\beta)^2\frac{m}{c} \right.$$

$$iEv + (i'-1)\,c'mv - 2cv \qquad \beta\varepsilon' e^2 \frac{m}{c} \left\{ -\frac{3}{8}(1-\beta) - \frac{1}{2}(1-\beta)^2\frac{m}{c} \right.$$

$$iEv + (i'+1)\,c'mv - 2cv \qquad \beta\varepsilon' e^2 \frac{m}{c} \left\{ -\frac{3}{8}(1+\beta) + \frac{1}{2}(1+\beta)\frac{m}{c} \right.$$

$$iEv + (i'+1)\,c'mv + 2cv \qquad \beta\varepsilon' e^2 \frac{m}{c} \left\{ \frac{3}{8}(1+\beta) + \frac{1}{2}(1+\beta)\frac{m}{c} \right.$$

$$iEv + (i'-1)\,c'mv + 2gv \qquad \beta\varepsilon'\gamma^2 \frac{m}{g} \left\{ \frac{1}{8}(1-\beta) \right.$$

$$iEv + (i'-1)\,c'mv - 2gv \qquad \beta\varepsilon'\gamma^2 \frac{m}{g} \left\{ -\frac{1}{8}(1-\beta) \right.$$

$$iEv + (i'+1)\,c'mv - 2gv \qquad \beta\varepsilon'\gamma^2 \frac{m}{g} \left\{ -\frac{1}{8}(1+\beta) \right.$$

$$iEv + (i'+1)\,c'mv + 2gv \qquad \beta\varepsilon'\gamma^2 \frac{m}{g} \left\{ \frac{1}{8}(1+\beta) \right.$$

$$iEv + (i'-2)\,c'mv - cv \qquad \beta e\varepsilon'^2 \frac{m}{c} \left\{ -\frac{3}{8}(2-\beta) + \frac{1}{2}(2-\beta)^2 \right.$$

sin / cos	$iEv + (i'-2)\,c'mv + cv$	$\beta e \varepsilon'^2 \frac{m}{c} \left\{ \frac{3}{8}(2-\beta) - \frac{1}{2}(2-\beta)^2 \right.$
	$iEv + (i'+2)\,c'mv - cv$	$\beta e \varepsilon'^2 \frac{m}{c} \left\{ -\frac{3}{8}(2+\beta) + \frac{1}{2}(2+\beta)^2 \right.$
	$iEv + (i'+2)\,c'mv + cv$	$\beta e \varepsilon'^2 \frac{m}{c} \left\{ \frac{3}{8}(2+\beta) - \frac{1}{2}(2+\beta)^2 \right.$
	$iEv + (i'-5)\,c'mv$	$\beta \varepsilon'^5 \left\{ -\frac{3}{80} + \frac{9}{64}(5-\beta) - \frac{59}{384}(5-\beta)^2 + \frac{1}{16}(5-\beta)^3 - \frac{1}{120}(5-\beta)^4 \right.$
	$iEv + (i'+5)\,c'mv$	$\beta \varepsilon'^5 \left\{ \frac{3}{80} - \frac{9}{64}(5+\beta) + \frac{59}{384}(5+\beta)^2 - \frac{1}{16}(5+\beta)^3 + \frac{1}{120}(5+\beta)^4 \right.$
	$iEv + i'c'mv - 4cv$	$\beta \frac{m}{c} e^4 \left\{ -\frac{5}{64} \right.$
	$iEv + i'c'mv + 4cv$	$\beta \frac{m}{c} e^4 \left\{ \frac{5}{64} \right.$
	$iEv + i'c'mv - 4gv$	$\beta \frac{m}{c} \gamma^4 \left\{ -\frac{1}{64} \right.$
	$iEv + i'c'mv + 4gv$	$\beta \frac{m}{g} \gamma^4 \left\{ \frac{1}{64} \right.$
	$iEv + i'c'mv - 2gv - 2cv$	$\beta m e^2 \gamma^2 \left\{ -\frac{3}{16} \cdot \frac{1}{g+c} \right.$
	$iEv + i'c'mv + 2gv + 2cv$	$\beta m e^2 \gamma^2 \left\{ \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{g+c} \right.$
	$iEv + (i'-1)\,c'mv + 3cv$	$\beta m \varepsilon' e^3 \left\{ -\frac{1}{6} \cdot \frac{(1-\beta)}{c} \right.$
	$iEv + (i'-1)\,c'mv - 3cv$	$\beta m \varepsilon' e^3 \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{(1-\beta)}{c} \right.$
	$iEv + (i'+1)\,c'mv - 3cv$	$\beta m \varepsilon' e^3 \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{(1+\beta)}{c} \right.$
	$iEv + (i'+1)\,c'mv + 3cv$	$\beta m \varepsilon' e^3 \left\{ -\frac{1}{6} \cdot \frac{(1+\beta)}{c} \right.$
	$iEv + (i'-1)\,c'mv + 2gv - cv$	$\beta m e \varepsilon' \gamma^2 \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\beta)}{2g-c} \right.$
	$iEv + (i'-1)\,c'mv - 2gv + cv$	$\beta m e \varepsilon' \gamma^2 \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\beta)}{2g-c} \right.$

$\begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\ iEv + (i'-1)\,c'mv + 2gv + cv$	$\beta m e \varepsilon' \gamma^2$	$\left\{ -\frac{3}{8} \cdot \frac{(1-\beta)}{2g+c} \right.$
$iEv + (i'-1)\,c'mv - 2gv - cv$	$\beta m e \varepsilon' \gamma^2$	$\left\{ \frac{3}{8} \cdot \frac{(1-\beta)}{2g+c} \right.$
$iEv + (i'+1)\,c'mv - 2gv + cv$	$\beta m e \varepsilon' \gamma^2$	$\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\beta)}{2g-c} \right.$
$iEv + (i'+1)\,c'mv + 2gv - cv$	$\beta m e \varepsilon' \gamma^2$	$\left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\beta)}{2g-c} \right.$
$iEv + (i'+1)\,c'mv - 2gv - cv$	$\beta m e \varepsilon' \gamma^2$	$\left\{ \frac{3}{8} \cdot \frac{(1+\beta)}{2g+c} \right.$
$iEv + (i'+1)\,c'mv + 2gv + cv$	$\beta m e \varepsilon' \gamma^2$	$\left\{ -\frac{3}{8} \cdot \frac{(1+\beta)}{2g+c} \right.$
$iEv + (i'-2)\,c'mv + 2cv$	$\beta \frac{m}{c} e^2 \varepsilon'^2$	$\left\{ -\frac{9}{64}(2-\beta) + \frac{3}{16}(2-\beta)^2 \right.$
$iEv + (i'-2)\,c'mv - 2cv$	$\beta \frac{m}{c} e^2 \varepsilon'^2$	$\left\{ \frac{9}{64}(2-\beta) - \frac{3}{16}(2-\beta)^2 \right.$
$iEv + (i'+2)\,c'mv - 2cv$	$\beta \frac{m}{c} e^2 \varepsilon'^2$	$\left\{ \frac{9}{64}(2+\beta) - \frac{3}{16}(2+\beta)^2 \right.$
$iEv + (i'+2)\,c'mv + 2cv$	$\beta \frac{m}{c} e^2 \varepsilon'^2$	$\left\{ -\frac{9}{64}(2+\beta) + \frac{3}{16}(2+\beta)^2 \right.$
$iEv + (i'-2)\,c'mv + 2gv$	$\beta \frac{m}{g} \varepsilon'^2 \gamma^2$	$\left\{ -\frac{3}{64}(2-\beta) + \frac{1}{16}(2-\beta)^2 \right.$
$iEv + (i'-2)\,c'mv - 2gv$	$\beta \frac{m}{g} \varepsilon'^2 \gamma^2$	$\left\{ \frac{3}{64}(2-\beta) - \frac{1}{16}(2-\beta)^2 \right.$
$iEv + (i'+2)\,c'mv - 2gv$	$\beta \frac{m}{g} \varepsilon'^2 \gamma^2$	$\left\{ \frac{3}{64}(2+\beta) - \frac{1}{16}(2+\beta)^2 \right.$
$iEv + (i'+2)\,c'mv + 2gv$	$\beta \frac{m}{g} \varepsilon'^2 \gamma^2$	$\left\{ -\frac{3}{64}(2+\beta) + \frac{1}{16}(2+\beta)^2 \right.$
$iEv + (i'-3)\,c'mv + cv$	$\beta \frac{m}{c} e \varepsilon'^3$	$\left\{ -\frac{1}{6}(3-\beta) + \frac{3}{8}(3-\beta)^2 - \frac{1}{6}(3-\beta)^3 \right.$
$iEv + (i'-3)\,c'mv - cv$	$\beta \frac{m}{c} e \varepsilon'^3$	$\left\{ \frac{1}{6}(3-\beta) - \frac{3}{8}(3-\beta)^2 + \frac{1}{6}(3-\beta)^3 \right.$
$iEv + (i'+3)\,c'mv - cv$	$\beta \frac{m}{c} e \varepsilon'^3$	$\left\{ \frac{1}{6}(3+\beta) - \frac{3}{8}(3+\beta)^2 + \frac{1}{6}(3+\beta)^3 \right.$
$iEv + (i'+3)\,c'mv + cv$	$\beta \frac{m}{c} e \varepsilon'^3$	$\left\{ -\frac{1}{6}(3+\beta) + \frac{3}{8}(3+\beta)^2 - \frac{1}{6}(3+\beta)^3 \right.$

253. En supprimant les quantités qui passent le *quatrième* ordre, et appliquant ensuite cette formule générale aux différentes fonctions de v' données dans le n.° 251, l'on obtiendra les résultats suivans :

$$(\alpha' u')^3 =$$

$\cos\, 0v$	1	$\Big\{\ 1 + \frac{3}{2}\varepsilon'^2 + \frac{15}{8}\varepsilon'^4$
$c'mv$	ε'	$\Big\{\ 3 + \frac{27}{8}\varepsilon'^2$
$2c'mv$	ε'^2	$\Big\{\ \frac{9}{2} + \frac{7}{2}\varepsilon'^2$
$cv + c'mv$	$e\varepsilon'$	$\Big\{ -3\frac{m}{c}$
$cv - c'mv$	$e\varepsilon'$	$\Big\{\ 3\frac{m}{c}$
$3c'mv$	ε'^3	$\Big\{\ \frac{53}{8}$
$2cv + c'mv$	$\varepsilon' e^2$	$\Big\{\ \frac{9}{8}\cdot\frac{m}{c}$
$2cv - c'mv$	$\varepsilon' e^2$	$\Big\{ -\frac{9}{8}\cdot\frac{m}{c}$
$2gv + c'mv$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\Big\{\ \frac{3}{8}\cdot\frac{m}{g}$
$2gv - c'mv$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\Big\{ -\frac{3}{8}\cdot\frac{m}{g}$
$cv + 2c'mv$	$e\varepsilon'^2$	$\Big\{ -9\frac{m}{c}$
$cv - 2c'mv$	$e\varepsilon'^2$	$\Big\{\ 9\frac{m}{c}$
$4c'mv$	ε'^4	$\Big\{\ \frac{77}{8}$
$2cv - 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2$	$\Big\{ -\frac{27}{8}\cdot\frac{m}{c}$
$2gv - 2c'mv$	$\varepsilon'^2\gamma^2$	$\Big\{ -\frac{9}{8}\cdot\frac{m}{g}$;

$$(\alpha' u')^3 \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (2v - 2v') =$$

$\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}\ 2Ev$	1	$\left\{ 1 - \frac{5}{2}\varepsilon'^2 + \frac{13}{16}\varepsilon'^4 - 4e^2\frac{m^2}{c^2} \right.$
$2Ev + c'mv$	ε'	$\left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev - c'mv$	ε'	$\left\{ \frac{7}{2} - \frac{123}{16}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev + cv$	e	$\left\{ 2\frac{m}{c} - 5\varepsilon'^2\frac{m}{c} - \frac{1}{2}\gamma^2\frac{m}{c} \right.$
$2Ev - cv$	e	$\left\{ -2\frac{m}{c} + 5\varepsilon'^2\frac{m}{c} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{m}{c} \right.$
$2Ev - 2c'mv$	ε'^2	$\left\{ \frac{17}{2} - \frac{115}{6}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev + 2cv$	e^2	$\left\{ -\frac{3}{4}\cdot\frac{m}{c} + 2\frac{m^2}{c^2} \right.$
$2Ev - 2cv$	e^2	$\left\{ \frac{3}{4}\cdot\frac{m}{c} + 2\frac{m^2}{c^2} \right.$
$2Ev + 2gv$	γ^2	$\left\{ -\frac{1}{4}\cdot\frac{m}{g} \right.$
$2Ev - 2gv$	γ^2	$\left\{ \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{g} \right.$
$2Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{c} \right.$
$2Ev + c'mv + cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ -\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{c} \right.$
$2Ev - c'mv + cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ \frac{21}{2}\cdot\frac{m}{c} \right.$
$2Ev - c'mv - cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ -\frac{21}{2}\cdot\frac{m}{c} \right.$
$2Ev + 3c'mv$	ε'^3	$\left\{ \frac{1}{48} \right.$
$2Ev - 3c'mv$	ε'^3	$\left\{ \frac{845}{48} \right.$

sin cos	$2Ev + 3cv$	e^3	$\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{c} - \frac{3}{2}\cdot\frac{m^2}{c^2}$
	$2Ev - 3cv$	e^3	$-\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{c} - \frac{3}{2}\cdot\frac{m^2}{c^2}$
	$2Ev + 2gv - cv$	$e\gamma^2$	$-\frac{m}{2g-c} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{cg}$
	$2Ev - 2gv + cv$	$e\gamma^2$	$\frac{m}{2g-c} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{cg}$
	$2Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{m}{2g+c} - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{cg}$
	$2Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2$	$-\frac{3}{4}\cdot\frac{m}{2g+c} - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{cg}$
	$2Ev + c'mv - 2cv$	$\varepsilon' e^2$	$-\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c} - \frac{1}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2}$
	$2Ev + c'mv + 2cv$	$\varepsilon' e^2$	$\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c} - \frac{1}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2}$
	$2Ev - c'mv + 2cv$	$\varepsilon' e^2$	$-\frac{63}{16}\cdot\frac{m}{c} + \frac{63}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2}$
	$2Ev - c'mv - 2cv$	$\varepsilon' e^2$	$\frac{63}{16}\cdot\frac{m}{c} + \frac{63}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2}$
	$2Ev + c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2$	$-\frac{1}{16}\cdot\frac{m}{g}$
	$2Ev + c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\frac{1}{16}\cdot\frac{m}{g}$
	$2Ev - c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2$	$-\frac{21}{16}\cdot\frac{m}{g}$
	$2Ev - c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\frac{21}{16}\cdot\frac{m}{g}$
	$2Ev - 2c'mv + cv$	$e\,\varepsilon'^2$	$34\,\frac{m}{c}$
	$2Ev - 2c'mv - cv$	$e\,\varepsilon'^2$	$-34\,\frac{m}{c}$
	$2Ev + 4c'mv$	ε'^4	$\frac{1}{24}$
	$2Ev - 4c'mv$	ε'^4	$\frac{533}{16}$;

$$b^2 (\alpha' u')^4 \begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} (v - v') =$$

$\begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} Ev$	b^2	$1 + 2\varepsilon'^2$
$Ev - c'mv$	$\varepsilon' b^2$	3
$Ev + c'mv$	$\varepsilon' b^2$	1
$Ev + cv$	$e b^2$	$\frac{m}{c}$
$Ev - cv$	$e b^2$	$-\frac{m}{c}$
$Ev + 2c'mv$	$\varepsilon'^2 b^2$	$\frac{11}{8}$
$Ev - 2c'mv$	$\varepsilon'^2 b^2$	$\frac{53}{8}$
$Ev - c'mv + cv$	$e\varepsilon' b^2$	$6 \frac{m}{c}$
$Ev - c'mv - cv$	$e\varepsilon' b^2$	$-6 \frac{m}{c}$;

$$b^2 (\alpha' u')^4 \begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} (3v - 3v') =$$

$\begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} 3Ev$	b^2	$1 - 6\varepsilon'^2$
$3Ev - c'mv$	$\varepsilon' b^2$	5
$3Ev + c'mv$	$\varepsilon' b^2$	-1
$3Ev - cv$	$e b^2$	$-3 \frac{m}{c}$
$3Ev + cv$	$e b^2$	$3 \frac{m}{c}$
$3Ev - 2c'mv$	$\varepsilon'^2 b^2$	$\frac{127}{8}$
$3Ev + 2c'mv$	$\varepsilon'^2 b^2$	$\frac{1}{8}$
$3Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon' b^2$	$2 \frac{m}{c}$

254. Les formules données dans le numéro précédent sont particulièrement utiles pour développer les termes qui résultent de la substitution de $mv + m\delta nt$ à la place de mv, lorsqu'il s'agit de former les fonctions qui ont été définies dans les n.ºs 220 et 221. Il est clair en effet que par ce changement on obtient, en développant les *sinus* et les *cosinus*, des expressions de cette forme

$$\delta\left[(\alpha'u')^3 \,{}^{sin}_{cos}(2v - 2v')\right] = U \cdot m\delta nt + U' \cdot m^2(\delta nt)^2;$$

$$b^2\delta\left[(\alpha'u')^4 \,{}^{sin}_{cos}(v - v')\right] = U'' \cdot m\delta nt + U''' \cdot m^2(\delta nt)^2;$$

$$b^2\delta\left[(\alpha'u')^4 \,{}^{sin}_{cos}(3v - 3v')\right] = U^{IV} \cdot m\delta nt;$$

abstraction faite des termes multipliés par les autres puissances de δnt qui entrent dans les seconds membres de ces équations.

Mais la valeur de δnt étant exprimée par des *sinus*, et celle de $(\delta nt)^2$ par des *cosinus*, si l'on observe que l'on a, en général,

$$B \sin q \times 2A \,{}^{sin}_{cos} - p = AB \left\{ {}^{sin}_{cos}(p + q) - {}^{sin}_{cos}(p - q) \right\};$$

$$B \cos q \times 2A \,{}^{sin}_{cos}\;\; p = AB \left\{ {}^{sin}_{cos}(p + q) + {}^{sin}_{cos}(p - q) \right\},$$

on formera aisément les produits indiqués dans les trois formules précédentes en préparant les facteurs désignés par U, U', U'', U''', U^{IV}. Or il est facile de trouver, à l'aide des développemens consignés dans le numéro précédent, que l'on a

$$U =$$

$$\begin{array}{lll}
{}^{cos}_{sin} - (2Ev) & 1 & \left\{ -2 + 5\varepsilon'^2 + 8e^2\frac{m^2}{c^2} - \frac{13}{8}\varepsilon'^4 \right. \\
- (2Ev + c'mv) & \varepsilon' & \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\varepsilon'^2 \right. \\
- (2Ev - c'mv) & \varepsilon' & \left\{ -\frac{21}{2} + \frac{369}{16}\varepsilon'^2 \right. \\
- (2Ev + cv) & e & \left\{ -\frac{4m}{c} + 10 \cdot \varepsilon'^2\frac{m}{c} + \gamma^2\frac{m}{c} \right. \\
- (2Ev - cv) & e & \left\{ \frac{4m}{c} - 10 \cdot \varepsilon'^2\frac{m}{c} - \gamma^2\frac{m}{c} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
{}^{\cos}_{\sin} - (2Ev - 2c'mv) & \varepsilon'^2 & \left\{ -34 + \frac{230}{3}\varepsilon'^2 \right. \\
- (2Ev + 2cv) & e^2 & \left\{ \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{c} - \frac{4\cdot m^2}{c^2} \right. \\
- (2Ev - 2cv) & e^2 & \left\{ -\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{c} - \frac{4\cdot m^2}{c} \right. \\
- (2Ev + 2gv) & \gamma^2 & \left\{ \frac{m}{2g} \right. \\
- (2Ev - 2gv) & \gamma^2 & \left\{ -\frac{m}{2g} \right. \\
- (2Ev + c'mv - cv) & e\varepsilon' & \left\{ -\frac{m}{2c} \right. \\
- (2Ev + c'mv + cv) & e\varepsilon' & \left\{ \frac{m}{2c} \right. \\
- (2Ev - c'mv + cv) & e\varepsilon' & \left\{ -\frac{63}{2}\cdot\frac{m}{c} \right. \\
- (2Ev - c'mv - cv) & e\varepsilon' & \left\{ \frac{63}{2}\cdot\frac{m}{c} \right. \\
- (2Ev + 3c'mv) & \varepsilon'^3 & \left\{ \frac{1}{48} \right. \\
- (2Ev - 3c'mv) & \varepsilon'^3 & \left\{ -\frac{4225}{48} \right. \\
- (2Ev + 3cv) & e^3 & \left\{ -\frac{2}{3}\cdot\frac{m}{c} + \frac{3\cdot m^2}{c^2} \right. \\
- (2Ev - 3cv) & e^3 & \left\{ \frac{2}{3}\cdot\frac{m}{c} + \frac{3\cdot m^2}{c^2} \right. \\
- (2Ev + 2gv - cv) & e\gamma^2 & \left\{ \frac{2m}{2g - c} - \frac{m^2}{cg} \right. \\
- (2Ev - 2gv + cv) & e\gamma^2 & \left\{ -\frac{2m}{2g - c} - \frac{m^2}{cg} \right. \\
- (2Ev + 2gv + cv) & e\gamma^2 & \left\{ -\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{2g + c} + \frac{m^2}{cg} \right. \\
- (2Ev - 2gv - cv) & e\gamma^2 & \left\{ \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{2g + c} + \frac{m^2}{cg} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} & -(2Ev+c'mv-2cv) & \varepsilon'e^2 & \Big\{\ \frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c}+\frac{1}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2} \\
 & -(2Ev+c'mv+2cv) & \varepsilon'e^2 & \Big\{-\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c}+\frac{1}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2} \\
 & -(2Ev-c'mv+2cv) & \varepsilon'e^2 & \Big\{\ \frac{189}{16}\cdot\frac{m}{c}-\frac{189}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2} \\
 & -(2Ev-c'mv-2cv) & \varepsilon'e^2 & \Big\{-\frac{189}{16}\cdot\frac{m}{c}-\frac{189}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2} \\
 & -(2Ev+c'mv-2gv) & \varepsilon'\gamma^2 & \Big\{\ \frac{1}{16}\cdot\frac{m}{g} \\
 & -(2Ev+c'mv+2gv) & \varepsilon'\gamma^2 & \Big\{-\frac{1}{16}\cdot\frac{m}{g} \\
 & -(2Ev-c'mv+2gv) & \varepsilon'\gamma^2 & \Big\{\ \frac{63}{16}\cdot\frac{m}{g} \\
 & -(2Ev-c'mv-2gv) & \varepsilon'\gamma^2 & \Big\{-\frac{63}{16}\cdot\frac{m}{g} \\
 & -(2Ev-2c'mv+cv) & e\varepsilon'^2 & \Big\{-136\cdot\frac{m}{c} \\
 & -(2Ev-2c'mv-cv) & e\varepsilon'^2 & \Big\{\ 136\cdot\frac{m}{c} \\
 & -(2Ev+4c'mv) & \varepsilon'^4 & \Big\{\ \frac{1}{12} \\
 & -(2Ev-4c'mv) & \varepsilon'^4 & \Big\{-\frac{1599}{8};
\end{array}$$

$$U' =$$

$$\begin{array}{llll}
\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} & 2Ev & 1 & \Big\{-2+5\,\varepsilon'^2 \\
 & 2Ev+c'mv & \varepsilon' & \Big\{\ \frac{1}{4} \\
 & 2Ev-c'mv & \varepsilon' & \Big\{-\frac{63}{4} \\
 & 2Ev+cv & e & \Big\{-4\cdot\frac{m}{c} \\
 & 2Ev-cv & e & \Big\{\ 4\cdot\frac{m}{c}
\end{array}$$

$\frac{\sin}{\cos}$ $2Ev - 2c'mv$	ε'^2	$\{-68$
$2Ev + 2cv$	e^2	$\left\{\ \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$2Ev - 2cv$	e^2	$\left\{-\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$2Ev + 2gv$	γ^2	$\left\{\ \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{g}\right.$
$2Ev - 2gv$	γ^2	$\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{g}\right.$
$2Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$2Ev + c'mv + cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{\ \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$2Ev - c'mv + cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{-\frac{189}{4}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$2Ev - c'mv - cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{\ \frac{189}{4}\cdot\frac{m}{c};\right.$

$$U'' =$$

$\frac{\cos}{\sin}$ $-(Ev)$	b^2	$\{-1 - 2\varepsilon'^2$
$-(Ev - c'mv)$	$\varepsilon'b^2$	$\{-6 - \frac{11}{2}\varepsilon'^2$
$-(Ev - cv)$	eb^2	$\left\{\ \frac{m}{c}\right.$
$-(Ev + cv)$	eb^2	$\left\{-\frac{m}{c}\right.$
$-(Ev - 2c'mv)$	ε'^2b^2	$\{-\frac{159}{8}$
$-(Ev + 2c'mv)$	ε'^2b^2	$\{\ \frac{11}{8}$
$-(Ev - c'mv + cv)$	$e\varepsilon'b^2$	$\left\{-12\cdot\frac{m}{c}\right.$
$-(Ev - c'mv - cv)$	$e\varepsilon'b^2$	$\left\{\ 12\cdot\frac{m}{c};\right.$

$$U''' = \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\; Ev \qquad b^2 \left\{ -1-2\varepsilon'^2 ; \right.$$

$$\begin{aligned}
U^{IV} = \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} & -(3Ev) & b^2 & \left\{ -3+18\varepsilon'^2 \right. \\
& -(3Ev-c'mv) & \varepsilon' b^2 & \left\{ -20 \right. \\
& -(3Ev+c'mv) & \varepsilon' b^2 & \left\{ \;\; 2 \right. \\
& -(3Ev-cv) & e b^2 & \left\{ \;\; 9.\tfrac{m}{c} \right. \\
& -(3Ev+cv) & e b^2 & \left\{ -9.\tfrac{m}{c} \right. \\
& -(3Ev+2c'mv) & \varepsilon'^2 b^2 & \left\{ -\tfrac{1}{8} \right. \\
& -(3Ev-2c'mv) & \varepsilon'^2 b^2 & \left\{ -\tfrac{635}{8} \right. \\
& -(3Ev+c'mv-cv) & e\varepsilon' b^2 & \left\{ -4.\tfrac{m}{c}. \right.
\end{aligned}$$

§ 7.

Développement des fonctions des coordonnées elliptiques du Soleil et de la Lune.

255. Les différens termes qui composent les fonctions désignées par R', R'', . . . R^V (Voyez n.° 222) peuvent être développés à l'aide des résultats rapportés dans les deux paragraphes 4.ième et 6.ième de ce chapitre. Il est indispensable de former ces développemens pour obtenir la partie de chaque coefficient des inégalités lunaires qui dépend de la première puissance de la force perturbatrice. Mais, outre cela, il est nécessaire de les avoir préparés pour procéder à la recherche successive des termes qui naissent du carré et des puissances supérieures de la force perturbatrice. C'est ce qui devient évident par la simple inspection des valeurs des fonctions $\delta R'$, $\delta R''$, . . . δR^V, en observant qu'elles renferment comme facteurs les termes qui se trouvent, respectivement, dans l'expression analytique de R', R'', . . . R^V.

Nous allons donner ces développemens tels que nous les avons obtenus: c'est-à-dire, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au *cinquième* à l'égard de la principale de ces fonctions représentée

par R', et en bornant l'approximation aux quantités du *quatrième* ordre relativement aux trois fonctions

$$\frac{q}{2}\cdot\frac{(\alpha' u')^3}{u_{\prime}^3}, \quad \frac{3}{2}q\cdot\frac{(\alpha' u')^3}{u_{\prime}^4}, \quad \frac{3}{2}u_{\prime}-\frac{3}{2}q\cdot\frac{(\alpha' u')^3}{u_{\prime}^3}.$$

Il est vrai que nous pourrions simplifier ces développemens en supprimant plusieurs termes qui ne peuvent donner rien de sensible dans le résultat final des intégrations. Mais ce travail pénible ayant été exécuté avec toute la rigueur nécessaire, nous croyons utile d'en publier ici au moins le résultat. Cela aura d'ailleurs l'avantage de mettre le Lecteur en état de saisir d'un coup d'oeil, qu'en général les termes dus à la première puissance de la force perturbatrice sont fort petits parmi ceux d'un ordre un peu élevé, et qu'ils n'acquièrent pas des coefficiens numériques capables de les faire augmenter aussi sensiblement qu'on aura lieu de le remarquer à l'égard des termes du même ordre provenant des puissances supérieures de la force perturbatrice. Cela posé, voici les résultats trouvés, écrits avec les abréviations qui ont été déclarées au commencement du n.° 252 :

$$\frac{3}{2}q\cdot\frac{(\alpha' u')^3}{u_{\prime}^4}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2v-2v')=$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\ 2Ev \quad \Big\{\ \frac{3}{2}+\left(3-6.\frac{m^2}{c^2}\right)e^2-\frac{15}{4}\varepsilon'^2-\frac{15}{2}e^2\varepsilon'^2-\frac{3}{2}e^2\gamma^2+\frac{39}{32}\varepsilon'^4+\frac{3}{16}\gamma^4+\frac{27}{16}e^4$$

$$2Ev+c'mv \quad \varepsilon'\Big\{-\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}.\frac{m^2}{c^2}\right)e^2+\frac{3}{32}\varepsilon'^2+\frac{3}{16}e^2\varepsilon'^2+\frac{3}{4}e^2\gamma^2-\frac{5}{256}\varepsilon'^4-\frac{3}{32}\gamma^4-\frac{27}{32}e^4$$

$$2Ev-c'mv \quad \varepsilon'\Big\{\frac{21}{4}+\left(\frac{21}{2}-\frac{189}{4}.\frac{m^2}{c^2}\right)e^2-\frac{369}{32}\varepsilon'^2-\frac{369}{16}e^2\varepsilon'^2-\frac{21}{4}e^2\gamma^2+\frac{1467}{256}\varepsilon'^4+\frac{21}{32}\gamma^4+\frac{189}{32}e^4$$

$$2Ev+cv \quad e\left\{\begin{array}{l}-3+3\frac{m}{c}-\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{4}.\frac{m}{c}-\frac{33}{4}.\frac{m^2}{c^2}\right)e^2+\left(\frac{15}{2}-\frac{15}{2}.\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}.\frac{m}{c}\right)\gamma^2\\ +\frac{27}{16}e^2\gamma^2-\frac{15}{8}\varepsilon'^2\gamma^2+\frac{45}{8}e^2\varepsilon'^2-\frac{75}{64}\gamma^4-\frac{3}{2}e^4-\frac{39}{16}\varepsilon'^4\end{array}\right.$$

$$2Ev-cv \quad e\left\{\begin{array}{l}-3-3\frac{m}{c}-\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}.\frac{m}{c}-\frac{33}{4}.\frac{m^2}{c^2}\right)e^2+\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{2}.\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}.\frac{m}{c}\right)\gamma^2\\ +\frac{27}{16}e^2\gamma^2-\frac{15}{8}\varepsilon'^2\gamma^2+\frac{45}{8}e^2\varepsilon'^2-\frac{75}{64}\gamma^4-\frac{3}{2}e^4-\frac{39}{16}\varepsilon'^4\end{array}\right.$$

$$2Ev-2c'mv \quad \varepsilon'^2\Big\{\frac{51}{4}+\frac{51}{2}e^2-\frac{115}{4}\varepsilon'^2.$$

$$+\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix} 2Ev+2cv \quad e^2\left\{\frac{15}{4}-\frac{57}{8}\cdot\frac{m}{c}+\frac{3.m^2}{c^2}+\left(\frac{15}{8}-\frac{7}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)e^2-\left(\frac{75}{8}-\frac{285}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2-\left(\frac{15}{8}-\frac{57}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)\gamma^2\right.$$

$$2Ev-2cv \quad e^2\left\{\frac{15}{4}+\frac{57}{8}\cdot\frac{m}{c}+\frac{3.m^2}{c^2}+\left(\frac{15}{8}+\frac{7}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)e^2-\left(\frac{75}{8}+\frac{285}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2-\left(\frac{15}{8}+\frac{57}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)\gamma^2\right.$$

$$2Ev+2gv \quad \gamma^2\left\{\begin{aligned}&\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{m}{g}+\frac{27}{8}e^2-\left(\frac{15}{8}-\frac{15}{16}\cdot\frac{m}{g}\right)\varepsilon'^2-\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{g}\right)\gamma^2\\&-\left(\frac{21}{16}\cdot\frac{1}{g}-\frac{3}{2g-c}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2g+c}\right)me^2\end{aligned}\right.$$

$$2Ev-2gv \quad \gamma^2\left\{\begin{aligned}&\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{m}{g}+\frac{27}{8}e^2-\left(\frac{15}{8}+\frac{15}{16}\cdot\frac{m}{g}\right)\varepsilon'^2-\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{g}\right)\gamma^2\\&+\left(\frac{21}{16}\cdot\frac{1}{g}-\frac{3}{2g-c}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2g+c}\right)me^2\end{aligned}\right.$$

$$2Ev+c'mv+cv \quad e\varepsilon'\left\{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{m}{c}+\left(\frac{9}{8}-\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)e^2-\left(\frac{3}{16}-\frac{3}{32}\cdot\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2-\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)\gamma^2\right.$$

$$2Ev+c'mv-cv \quad e\varepsilon'\left\{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{m}{c}+\left(\frac{9}{8}+\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)e^2-\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{32}\cdot\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2-\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)\gamma^2\right.$$

$$2Ev-c'mv+cv \quad e\varepsilon'\left\{\begin{aligned}&-\frac{21}{2}+\frac{63}{4}\cdot\frac{m}{c}+\left(\frac{369}{16}-\frac{1107}{32}\cdot\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2-\left(\frac{63}{8}-\frac{63}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)e^2\\&+\left(\frac{21}{8}-\frac{63}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)\gamma^2\end{aligned}\right.$$

$$2Ev-c'mv-cv \quad e\varepsilon'\left\{\begin{aligned}&-\frac{21}{2}-\frac{63}{4}\cdot\frac{m}{c}+\left(\frac{369}{16}+\frac{1107}{32}\cdot\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2-\left(\frac{63}{8}+\frac{63}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)e^2\\&+\left(\frac{21}{8}+\frac{63}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)\gamma^2\end{aligned}\right.$$

$$2Ev+3c'mv \quad \varepsilon'^3\left\{\frac{1}{32}+\frac{1}{16}e^2+\frac{11}{512}\varepsilon'^2\right.$$

$$2Ev-3c'mv \quad \varepsilon'^3\left\{\frac{845}{32}+\frac{845}{16}e^2-\frac{32525}{512}\varepsilon'^2\right.$$

$$2Ev+3cv \quad e^3\left\{-\frac{15}{4}+\frac{41}{4}\cdot\frac{m}{c}-\frac{33}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2}-\frac{15}{8}e^2+\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{75}{8}\varepsilon'^2\right.$$

$$2Ev-3cv \quad e^3\left\{-\frac{15}{4}-\frac{41}{4}\cdot\frac{m}{c}-\frac{33}{4}\cdot\frac{m^2}{c^2}-\frac{15}{8}e^2+\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{75}{8}\varepsilon'^2\right.$$

$$+\,{}^{\sin}_{\cos}\,2Ev+2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{15}{8}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{g}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{c}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{2g+c}\right)m-\frac{3}{4}\cdot\frac{m^2}{cg}\\ -\frac{135}{32}e^2+\frac{45}{32}\gamma^2+\frac{75}{16}\varepsilon'^2\end{array}\right.$$

$$2Ev-2gv-cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{15}{8}-\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{g}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{c}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{2g+c}\right)m-\frac{3}{4}\cdot\frac{m^2}{cg}\\ -\frac{135}{32}e^2+\frac{45}{32}\gamma^2+\frac{75}{16}\varepsilon'^2\end{array}\right.$$

$$2Ev+2gv-cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{15}{8}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{g}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2g-c}\right)m+\frac{3}{4}\cdot\frac{m^2}{cg}\\ -\frac{135}{32}e^2+\frac{45}{32}\gamma^2+\frac{75}{16}\varepsilon'^2\end{array}\right.$$

$$2Ev-2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{15}{8}-\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{g}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2g-c}\right)m+\frac{3}{4}\cdot\frac{m^2}{cg}\\ -\frac{135}{32}e^2+\frac{45}{32}\gamma^2+\frac{75}{16}\varepsilon'^2\end{array}\right.$$

$$2Ev+c'mv+2cv \quad \varepsilon'e^2\left\{-\frac{15}{8}+\frac{57}{32}\cdot\frac{m}{c}-\frac{3}{8}\cdot\frac{m^2}{c^2}+\frac{15}{64}\varepsilon'^2+\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{15}{16}e^2\right.$$

$$2Ev+c'mv-2cv \quad \varepsilon'e^2\left\{-\frac{15}{8}-\frac{57}{32}\cdot\frac{m}{\varepsilon}-\frac{3}{8}\cdot\frac{m^2}{c^2}+\frac{15}{64}\varepsilon'^2+\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{15}{16}e^2\right.$$

$$2Ev-c'mv+2cv \quad \varepsilon'e^2\left\{\ \frac{105}{8}-\frac{1197}{32}\cdot\frac{m}{c}+\frac{189}{8}\cdot\frac{m^2}{\varepsilon^2}-\frac{1845}{64}\varepsilon'^2-\frac{105}{16}\gamma^2+\frac{105}{16}e^2\right.$$

$$2Ev-c'mv-2cv \quad \varepsilon'e^2\left\{\ \frac{105}{8}+\frac{1197}{32}\cdot\frac{m}{c}+\frac{189}{8}\cdot\frac{m^2}{c^2}-\frac{1845}{64}\varepsilon'^2-\frac{105}{16}\gamma^2+\frac{105}{16}e^2\right.$$

$$2Ev+c'mv+2gv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{-\frac{3}{8}+\frac{3}{32}\cdot\frac{m}{g}+\frac{3}{64}\varepsilon'^2+\frac{3}{16}\gamma^2-\frac{27}{16}e^2\right.$$

$$2Ev+c'mv-2gv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{-\frac{3}{8}-\frac{3}{32}\cdot\frac{m}{g}+\frac{3}{64}\varepsilon'^2+\frac{3}{16}\gamma^2-\frac{27}{16}e^2\right.$$

$$2Ev-c'mv+2gv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{\ \frac{21}{8}-\frac{63}{32}\cdot\frac{m}{g}-\frac{369}{64}\varepsilon'^2-\frac{21}{16}\gamma^2+\frac{189}{16}e^2\right.$$

$$2Ev-c'mv-2gv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{\ \frac{21}{8}+\frac{63}{32}\cdot\frac{m}{g}-\frac{369}{64}\varepsilon'^2-\frac{21}{16}\gamma^2+\frac{189}{16}e^2\right.$$

$$+\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \; 2Ev - 2c'mv + cv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{51}{2} + 51 \cdot \frac{m}{c} + \frac{115}{2}\varepsilon'^2 + \frac{51}{8}\gamma^2 - \frac{153}{8}e^2 \right.$$

$$2Ev - 2c'mv - cv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{51}{2} - 51 \cdot \frac{m}{c} + \frac{115}{2}\varepsilon'^2 + \frac{51}{8}\gamma^2 - \frac{153}{8}e^2 \right.$$

$$2Ev + 4c'mv \quad \varepsilon'^4 \left\{ \frac{1}{16} \right.$$

$$2Ev - 4c'mv \quad \varepsilon'^4 \left\{ \frac{1599}{32} \right.$$

$$2Ev + 4cv \quad e^4 \left\{ \frac{105}{32} - \frac{739}{94} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev - 4cv \quad e^4 \left\{ \frac{105}{32} + \frac{739}{64} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev + 4gv \quad \gamma^4 \left\{ \frac{9}{32} - \frac{15}{64} \cdot \frac{m}{g} \right.$$

$$2Ev - 4gv \quad \gamma^4 \left\{ \frac{9}{32} + \frac{15}{64} \cdot \frac{m}{g} \right.$$

$$2Ev + 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{45}{16} - \left(\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{g+c} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2g+c} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{g} + \frac{69}{16} \cdot \frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev - 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{45}{16} + \left(\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{g+c} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2g+c} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{g} + \frac{69}{16} \cdot \frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev + 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{45}{16} - \left(\frac{-3}{2g-c} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{g} - \frac{69}{16} \cdot \frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev - 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{45}{16} + \left(\frac{-3}{2g-c} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{g} - \frac{69}{16} \cdot \frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev + c'mv + 3cv \quad \varepsilon'e^3 \left\{ \frac{15}{8} - \frac{41}{16} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev + c'mv - 3cv \quad \varepsilon'e^3 \left\{ \frac{15}{8} + \frac{41}{16} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev - c'mv + 3cv \quad \varepsilon'e^3 \left\{ -\frac{105}{8} + \frac{861}{16} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev - c'mv - 3cv \quad \varepsilon'e^3 \left\{ -\frac{105}{8} - \frac{861}{16} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$+\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\, 2Ev - 2c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{255}{8} - \frac{969}{8}\cdot\frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev - 2c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{255}{8} + \frac{969}{8}\cdot\frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev - 2c'mv + 2gv \quad \varepsilon'^2\gamma^2 \left\{ \frac{51}{8} - \frac{51}{8}\cdot\frac{m}{g} \right.$$

$$2Ev - 2c'mv - 2gv \quad \varepsilon'^2\gamma^2 \left\{ \frac{51}{8} + \frac{51}{8}\cdot\frac{m}{g} \right.$$

$$2Ev + 3c'mv + cv \quad e\varepsilon'^3 \left\{ -\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cdot\frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev + 3c'mv - cv \quad e\varepsilon'^3 \left\{ -\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cdot\frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev - 3c'mv + cv \quad e\varepsilon'^3 \left\{ -\frac{845}{16} + \frac{4225}{32}\cdot\frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev - 3c'mv - cv \quad e\varepsilon'^3 \left\{ -\frac{845}{16} - \frac{4225}{32}\cdot\frac{m}{c} \right.$$

$$2Ev + c'mv + 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{15}{16} - \left(\frac{9}{32}\cdot\frac{1}{2g+c} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{g} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev + c'mv - 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{15}{16} + \left(\frac{9}{32}\cdot\frac{1}{2g+c} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{g} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev + c'mv + 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{15}{16} - \left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2g-c} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{g} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev + c'mv - 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{15}{16} + \left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2g-c} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{g} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev - c'mv + 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{105}{16} + \left(\frac{189}{32}\cdot\frac{1}{2g+c} + \frac{63}{16}\cdot\frac{1}{g} + \frac{63}{8}\cdot\frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev - c'mv - 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{105}{16} - \left(\frac{189}{32}\cdot\frac{1}{2g+c} + \frac{63}{16}\cdot\frac{1}{g} + \frac{63}{8}\cdot\frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev - c'mv + 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{105}{16} + \left(-\frac{63}{8}\cdot\frac{1}{2g-c} + \frac{63}{16}\cdot\frac{1}{g} - \frac{63}{8}\cdot\frac{1}{c} \right) m \right.$$

$$2Ev - c'mv - 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{105}{16} + \left(-\frac{63}{8}\cdot\frac{1}{2g-c} + \frac{63}{16}\cdot\frac{1}{g} - \frac{63}{8}\cdot\frac{1}{c} \right) m \right.$$

$+\frac{\sin}{\cos}$	$2Ev+5c'mv$	ε'^5	$\frac{243}{2560}$
	$2Ev-5c'mv$	ε'^5	$\frac{228347}{2560}$
	$2Ev+5cv$	e^5	$\frac{21}{8}$
	$2Ev-5cv$	e^5	$\frac{21}{8}$
	$2Ev+4c'mv+cv$	$e\varepsilon'^4$	$-\frac{1}{8}$
	$2Ev+4c'mv-cv$	$e\varepsilon'^4$	$-\frac{1}{8}$
	$2Ev-4c'mv+cv$	$e\varepsilon'^4$	$-\frac{1599}{16}$
	$2Ev-4c'mv-cv$	$e\varepsilon'^4$	$-\frac{1599}{16}$
	$2Ev+3c'mv+2cv$	$e^2\varepsilon'^3$	$\frac{5}{64}$
	$2Ev+3c'mv-2cv$	$e^2\varepsilon'^3$	$\frac{5}{64}$
	$2Ev-3c'mv+2cv$	$e^2\varepsilon'^3$	$\frac{4225}{64}$
	$2Ev-3c'mv-2cv$	$e^2\varepsilon'^3$	$\frac{4225}{64}$
	$2Ev+3c'mv+2gv$	$\gamma^2\varepsilon'^3$	$\frac{1}{64}$
	$2Ev+3c'mv-2gv$	$\gamma^2\varepsilon'^3$	$\frac{1}{64}$
	$2Ev-3c'mv+2gv$	$\gamma^2\varepsilon'^3$	$\frac{845}{64}$
	$2Ev-3c'mv-2gv$	$\gamma^2\varepsilon'^3$	$\frac{845}{64}$
	$2Ev-2c'mv+3cv$	$e^3\varepsilon'^2$	$-\frac{255}{8}$
	$2Ev-2c'mv-3cv$	$e^3\varepsilon'^2$	$-\frac{255}{8}$
	$2Ev+c'mv+4gv$	$\varepsilon'\gamma^4$	$-\frac{9}{64}$
	$2Ev+c'mv-4gv$	$\varepsilon'\gamma^4$	$-\frac{9}{64}$

$+ \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\; 2Ev - c'mv + 4gv$	$\varepsilon'\gamma^4 \Big\{$	$\frac{63}{64}$
$2Ev - c'mv - 4gv$	$\varepsilon'\gamma^4 \Big\{$	$\frac{63}{64}$
$2Ev + c'mv + 4cv$	$\varepsilon'e^4 \Big\{$	$-\frac{105}{64}$
$2Ev + c'mv - 4cv$	$\varepsilon'e^4 \Big\{$	$-\frac{105}{64}$
$2Ev - c'mv + 4cv$	$\varepsilon'e^4 \Big\{$	$\frac{735}{64}$
$2Ev - c'mv - 4cv$	$\varepsilon'e^4 \Big\{$	$\frac{735}{64}$
$2Ev + 4gv + cv$	$e\gamma^4 \Big\{$	$-\frac{105}{128}$
$2Ev + 4gv - cv$	$e\gamma^4 \Big\{$	$-\frac{105}{128}$
$2Ev - 4gv + cv$	$e\gamma^4 \Big\{$	$-\frac{105}{128}$
$2Ev - 4gv - cv$	$e\gamma^4 \Big\{$	$-\frac{105}{128}$
$2Ev + 2gv + 3cv$	$e^3\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{105}{32}$
$2Ev + 2gv - 3cv$	$e^3\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{105}{32}$
$2Ev - 2gv + 3cv$	$e^3\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{105}{32}$
$2Ev - 2gv - 3cv$	$e^3\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{105}{32}$
$2Ev - 2c'mv + 2gv + cv$	$e\varepsilon'^2\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{255}{16}$
$2Ev - 2c'mv + 2gv - cv$	$e\varepsilon'^2\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{255}{16}$
$2Ev - 2c'mv - 2gv + cv$	$e\varepsilon'^2\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{255}{16}$
$2Ev - 2c'mv - 2gv - cv$	$e\varepsilon'^2\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{255}{16}$
$2Ev + c'mv + 2gv + 2cv$	$\varepsilon'e^2\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{45}{32}$
$2Ev + c'mv - 2gv - 2cv$	$\varepsilon'e^2\gamma^2 \Big\{$	$-\frac{45}{32}$

$$+\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\; 2Ev + c'mv + 2gv - 2cv\;\; \varepsilon' e^2 \gamma^2 \left\{ -\frac{45}{32} \right.$$

$$2Ev + c'mv - 2gv + 2cv\;\; \varepsilon' e^2 \gamma^2 \left\{ -\frac{45}{32} \right.$$

$$2Ev - c'mv + 2gv + 2cv\;\; \varepsilon' e^2 \gamma^2 \left\{ \frac{315}{32} \right.$$

$$2Ev - c'mv - 2gv - 2cv\;\; \varepsilon' e^2 \gamma^2 \left\{ \frac{315}{32} \right.$$

$$2Ev - c'mv + 2gv - 2cv\;\; \varepsilon' e^2 \gamma^2 \left\{ \frac{315}{32} \right.$$

$$2Ev - c'mv - 2gv + 2cv\;\; \varepsilon' e^2 \gamma^2 \left\{ \frac{315}{32}; \right.$$

$$\frac{3}{8} b^2 q \frac{(a'u')^4}{u_i^5} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (v - v') =$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\; Ev \qquad b^2 \left\{ \frac{3}{8} + \frac{21}{16} e^2 + \frac{3}{4} \varepsilon'^2 - \frac{3}{32} \gamma^2 \right.$$

$$Ev + c'mv \qquad \varepsilon' b^2 \left\{ \frac{3}{8} + \frac{21}{16} e^2 + \frac{15}{16} \varepsilon'^2 - \frac{3}{32} \gamma^2 \right.$$

$$Ev - c'mv \qquad \varepsilon' b^2 \left\{ \frac{9}{8} + \frac{63}{16} e^2 + \frac{33}{32} \varepsilon'^2 - \frac{9}{32} \gamma^2 \right.$$

$$Ev + cv \qquad e b^2 \left\{ -\frac{15}{16} + \frac{3}{8} \cdot \frac{m}{c} - \frac{75}{64} e^2 - \frac{15}{8} \varepsilon'^2 + \frac{15}{32} \gamma^2 \right.$$

$$Ev - cv \qquad e b^2 \left\{ -\frac{15}{16} - \frac{3}{8} \cdot \frac{m}{c} - \frac{75}{64} e^2 - \frac{15}{8} \varepsilon'^2 + \frac{15}{32} \gamma^2 \right.$$

$$Ev + 2c'mv \quad \varepsilon'^2 b^2 \left\{ \frac{33}{64} \right.$$

$$Ev - 2c'mv \quad \varepsilon'^2 b^2 \left\{ \frac{159}{64} \right.$$

$$Ev + 2cv \qquad e^2 b^2 \left\{ \frac{45}{32} - \frac{69}{64} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$Ev - 2cv \qquad e^2 b^2 \left\{ \frac{45}{32} + \frac{69}{64} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$Ev + 2gv \qquad \gamma^2 b^2 \left\{ \frac{15}{64} - \frac{3}{64} \cdot \frac{m}{g} \right.$$

$$Ev - 2gv \qquad \gamma^2 b^2 \left\{ \frac{15}{64} + \frac{3}{64} \cdot \frac{m}{g} \right.$$

$+ {}^{\sin}_{\cos}\, Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{15}{16} - \frac{75}{64}e^2 - \frac{75}{32}\varepsilon'^2 + \frac{15}{32}\gamma^2 \right.$
$Ev + c'mv + cv$	$e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{15}{16} \right.$
$Ev - c'mv + cv$	$e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{45}{16} + \frac{9}{4}\cdot\frac{m}{c} \right.$
$Ev - c'mv - cv$	$e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{45}{16} - \frac{9}{4}\cdot\frac{m}{c} \right.$
$Ev + 3c'mv$	$\varepsilon'^3 b^2 \left\{ \frac{23}{32} \right.$
$Ev - 3c'mv$	$\varepsilon'^3 b^2 \left\{ \frac{77}{16} \right.$
$Ev + 3cv$	$e^3 b^2 \left\{ -\frac{105}{64} \right.$
$Ev - 3cv$	$e^3 b^2 \left\{ -\frac{105}{64} \right.$
$Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2 b^2 \left\{ -\frac{45}{64} \right.$
$Ev + 2gv - cv$	$e\gamma^2 b^2 \left\{ -\frac{45}{64} \right.$
$Ev - 2gv + cv$	$e\gamma^2 b^2 \left\{ -\frac{45}{64} \right.$
$Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2 b^2 \left\{ -\frac{45}{64} \right.$
$Ev + 2c'mv + cv$	$e\varepsilon'^2 b^2 \left\{ -\frac{165}{128} \right.$
$Ev + 2c'mv - cv$	$e\varepsilon'^2 b^2 \left\{ -\frac{165}{128} \right.$
$Ev - 2c'mv + cv$	$e\varepsilon'^2 b^2 \left\{ -\frac{795}{128} \right.$
$Ev - 2c'mv - cv$	$e\varepsilon'^2 b^2 \left\{ -\frac{795}{128} \right.$
$Ev + c'mv + 2cv$	$\varepsilon' e^2 b^2 \left\{ \frac{45}{32} \right.$
$Ev + c'mv - 2cv$	$\varepsilon' e^2 b^2 \left\{ \frac{45}{32} \right.$
$Ev - c'mv + 2cv$	$\varepsilon' e^2 b^2 \left\{ \frac{135}{32} \right.$
$Ev - c'mv - 2cv$	$\varepsilon' e^2 b^2 \left\{ \frac{135}{32} \right.$
$Ev + c'mv + 2gv$	$\varepsilon' \gamma^2 b^2 \left\{ \frac{15}{64} \right.$
$Ev + c'mv - 2gv$	$\varepsilon' \gamma^2 b^2 \left\{ \frac{15}{64} \right.$

$$+\begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}\; Ev - c'mv + 2gv \qquad \varepsilon'\gamma^2 b^2 \left\{ \frac{45}{64} \right.$$

$$Ev - c'mv - 2gv \qquad \varepsilon'\gamma^2 b^2 \left\{ \frac{45}{64} \right.$$

$$Ev + c'mv - 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 b^2 \left\{ -\frac{45}{64}; \right.$$

$$\frac{15}{8}\, b^2 q\, \frac{(\alpha' u')^4}{u_{,}^5}\, \begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix} (3v - 3v') =$$

$$\begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}\; 3Ev \qquad b^2 \left\{ \frac{15}{8} + \frac{105}{16} e^2 - \frac{45}{4} \varepsilon'^2 - \frac{15}{32} \gamma^2 \right.$$

$$3Ev + c'mv \qquad \varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{15}{8} - \frac{105}{16} e^2 + \frac{75}{32} \varepsilon'^2 + \frac{15}{32} \gamma^2 \right.$$

$$3Ev - c'mv \qquad \varepsilon' b^2 \left\{ \frac{75}{8} + \frac{525}{16} e^2 - \frac{165}{4} \varepsilon'^2 - \frac{75}{32} \gamma^2 \right.$$

$$3Ev + cv \qquad e b^2 \left\{ -\frac{75}{16} + \frac{45}{8} \cdot \frac{m}{c} - \frac{375}{64} e^2 + \frac{225}{8} \varepsilon'^2 + \frac{75}{32} \gamma^2 \right.$$

$$3Ev - cv \qquad e b^2 \left\{ -\frac{75}{16} - \frac{45}{8} \cdot \frac{m}{c} - \frac{375}{64} e^2 + \frac{225}{8} \varepsilon'^2 + \frac{75}{32} \gamma^2 \right.$$

$$3Ev + 2c'mv \qquad \varepsilon'^2 b^2 \left\{ \frac{15}{64} \right.$$

$$3Ev - 2c'mv \qquad \varepsilon'^2 b^2 \left\{ \frac{1905}{64} \right.$$

$$3Ev + 2cv \qquad e^2 b^2 \left\{ \frac{225}{32} - \frac{1035}{64} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$3Ev - 2cv \qquad e^2 b^2 \left\{ \frac{225}{32} + \frac{1035}{64} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$3Ev + 2gv \qquad \gamma^2 b^2 \left\{ \frac{75}{64} - \frac{45}{64} \cdot \frac{m}{g} \right.$$

$$3Ev - 2gv \qquad \gamma^2 b^2 \left\{ \frac{75}{64} + \frac{45}{64} \cdot \frac{m}{g} \right.$$

$$3Ev + c'mv + cv \qquad e\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{75}{16} - \frac{15}{4} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$3Ev + c'mv - cv \qquad e\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{75}{16} + \frac{15}{4} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$3Ev - c'mv + cv \qquad e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{375}{16} + \frac{75}{2} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$3Ev - c'mv - cv \qquad e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{375}{16} - \frac{75}{2} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$+\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}$	$3Ev - 3c'mv$	$\varepsilon'^3 b^2$	$\Big\{ -\frac{2445}{32}$
	$3Ev + 3cv$	$e^3 b^2$	$\Big\{ -\frac{525}{64}$
	$3Ev - 3cv$	$e^3 b^2$	$\Big\{ -\frac{525}{64}$
	$3Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{225}{64}$
	$3Ev + 2gv - cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{225}{64}$
	$3Ev - 2gv + cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{225}{64}$
	$3Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{225}{64}$
	$3Ev + 2c'mv + cv$	$e\varepsilon'^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{75}{128}$
	$3Ev + 2c'mv - cv$	$e\varepsilon'^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{75}{128}$
	$3Ev - 2c'mv + cv$	$e\varepsilon'^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{9525}{128}$
	$3Ev - 2c'mv - cv$	$e\varepsilon'^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{9525}{128}$
	$3Ev + c'mv + 2cv$	$\varepsilon' e^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{225}{32}$
	$3Ev + c'mv - 2cv$	$\varepsilon' e^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{225}{32}$
	$3Ev - c'mv + 2cv$	$\varepsilon' e^2 b^2$	$\Big\{ \quad \frac{1125}{32}$
	$3Ev - c'mv - 2cv$	$\varepsilon' e^2 b^2$	$\Big\{ \quad \frac{1125}{32}$
	$3Ev + c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{75}{64}$
	$3Ev + c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{75}{64}$
	$3Ev - c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\Big\{ \quad \frac{375}{64}$
	$3Ev - c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\Big\{ \quad \frac{375}{64}$;

$$-\frac{3}{2} b^2 q \cdot ss \frac{(a'u')^4}{u_1^5} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (v - v') =$$

$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}$	Ev	$\gamma^2 b^2$	$\Big\{ -\frac{3}{4}$
	$Ev + 2gv$	$\gamma^2 b^2$	$\Big\{ \quad \frac{3}{8}$
	$Ev - 2gv$	$\gamma^2 b^2$	$\Big\{ \quad \frac{3}{8}$

$+\frac{\sin}{\cos}\ Ev + cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\left\{ \frac{15}{8}\right.$
$Ev - cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\left\{ \frac{15}{8}\right.$
$Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\left\{ -\frac{15}{16}\right.$
$Ev + 2gv - cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\left\{ -\frac{15}{16}\right.$
$Ev - 2gv + cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\left\{ -\frac{15}{16}\right.$
$Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2 b^2$	$\left\{ -\frac{15}{16}\right.$
$Ev + c'mv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\left\{ -\frac{3}{4}\right.$
$Ev - c'mv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\left\{ -\frac{9}{4}\right.$
$Ev + c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\left\{ -\frac{3}{8}\right.$
$Ev + c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\left\{ \frac{3}{8}\right.$
$Ev - c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\left\{ \frac{9}{8}\right.$
$Ev - c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\left\{ \frac{9}{8}\right.$
$Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\left\{ \frac{15}{8}\right.$
$Ev + c'mv - 2gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma^2 b^2$	$\left\{ -\frac{15}{16}\right.$;

$$\frac{5}{8}\, b^4 q\, \frac{(a'u')^5}{u_{,}^6}\, \frac{\sin}{\cos}\,(2v - 2v') =$$

$\frac{\sin}{\cos}\ 2Ev$	b^4	$\left\{ \frac{5}{8}\right.$
$2Ev + cv$	eb^4	$\left\{ -\frac{15}{8}\right.$
$2Ev - cv$	eb^4	$\left\{ -\frac{15}{8}\right.$
$2Ev + c'mv$	$\varepsilon' b^4$	$\left\{ -\frac{35}{16}\right.$
$2Ev - c'mv$	$\varepsilon' b^4$	$\left\{ -\frac{15}{16}\right.$

$$\frac{35}{16} b^4 q \frac{(a'u')^5}{u_{\prime}^6} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (4v - 4v') =$$

$\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}$	$4Ev$	b^4	$\left\{ \frac{35}{16} \right.$
	$4Ev + cv$	eb^4	$\left\{ -\frac{105}{16} \right.$
	$4Ev - cv$	eb^4	$\left\{ -\frac{105}{16} \right.$
	$4Ev + c'mv$	$\varepsilon' b^4$	$\left\{ -\frac{455}{32} \right.$
	$4Ev - c'mv$	$\varepsilon' b^4$	$\left\{ \frac{105}{32} ; \right.$

$$\frac{q}{2} \left(\frac{a'u'}{u_{\prime}} \right)^3 =$$

cos	$0v$	1	$\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{4} \varepsilon'^2 + \frac{1}{8} \gamma^2 + \frac{5}{16} e^4 + \frac{3}{4} e^2 \varepsilon'^2 + \frac{15}{16} \varepsilon'^4 - \frac{1}{8} e^2 \gamma^2 + \frac{3}{16} \varepsilon'^2 \gamma^2 - \frac{3}{128} \gamma^4 \right.$
	cv	e	$\left\{ -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} e^2 - \frac{9}{4} \varepsilon'^2 - \frac{9}{16} e^4 - \frac{9}{8} e^2 \varepsilon'^2 - \frac{45}{16} \varepsilon'^4 - \frac{3}{16} \gamma^4 + \frac{3}{8} e^2 \gamma^2 \right.$
	$c'mv$	ε'	$\left\{ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} e^2 + \frac{27}{16} \varepsilon'^2 + \frac{3}{8} \gamma^2 \right.$
	$2cv$	e^2	$\left\{ \frac{3}{2} + \frac{3}{4} e^2 + \frac{9}{4} \varepsilon'^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 \right.$
	$2gv$	γ^2	$\left\{ \frac{3}{8} + \frac{9}{8} e^2 + \frac{9}{16} \varepsilon'^2 - \frac{3}{32} \gamma^2 \right.$
	$2c'mv$	ε'^2	$\left\{ \frac{9}{4} + \frac{9}{4} e^2 + \frac{7}{4} \varepsilon'^2 + \frac{9}{16} \gamma^2 \right.$
	$cv + c'mv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ -\frac{9}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{c} - \frac{9}{8} e^2 - \frac{81}{32} \varepsilon'^2 \right.$
	$cv - c'mv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ -\frac{9}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{c} - \frac{9}{8} e^2 - \frac{81}{32} \varepsilon'^2 \right.$
	$3cv$	e^3	$\left\{ -\frac{5}{4} \right.$
	$3c'mv$	ε'^3	$\left\{ \frac{53}{16} \right.$
	$2gv + cv$	$e\gamma^2$	$\left\{ -\frac{3}{4} - \frac{21}{16} e^2 - \frac{9}{8} \varepsilon'^2 + \frac{3}{8} \gamma^2 \right.$
	$2gv - cv$	$e\gamma^2$	$\left\{ -\frac{3}{4} - \frac{21}{16} e^2 - \frac{9}{8} \varepsilon'^2 + \frac{3}{8} \gamma^2 \right.$
	$2gv + c'mv$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ \frac{9}{16} + \frac{3}{16} \cdot \frac{m}{g} \right.$
	$2gv - c'mv$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ \frac{9}{16} - \frac{3}{16} \frac{m}{g} \right.$

$+\cos cv - 2c'mv$	$e\varepsilon'^2$	$\left\{-\frac{27}{8}+\frac{9}{2}\cdot\frac{m}{c}-\frac{27}{16}e^2-\frac{21}{8}\varepsilon'^2\right.$
$cv + 2c'mv$	$e\varepsilon'^2$	$\left\{-\frac{27}{8}-\frac{9}{2}\cdot\frac{m}{c}-\frac{27}{16}e^2-\frac{21}{8}\varepsilon'^2\right.$
$2cv + c'mv$	$\varepsilon' e^2$	$\left\{\frac{9}{4}+\frac{45}{16}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$2cv - c'mv$	$\varepsilon' e^2$	$\left\{\frac{9}{4}-\frac{45}{16}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$4c'mv$	ε'^4	$\left\{\frac{77}{16}\right.$
$4cv$	e^4	$\left\{\frac{15}{16}\right.$
$4gv$	γ^4	$\left\{\frac{15}{128}\right.$
$2gv + 2cv$	$e^2\gamma^2$	$\left\{\frac{15}{16}\right.$
$2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2$	$\left\{\frac{15}{16}\right.$
$cv + 3c'mv$	$e\varepsilon'^3$	$\left\{-\frac{159}{32}\right.$
$cv - 3c'mv$	$e\varepsilon'^3$	$\left\{-\frac{159}{32}\right.$
$2gv + 2c'mv$	$\varepsilon'^2\gamma^2$	$\left\{\frac{27}{32}+\frac{9}{16}\cdot\frac{m}{g}\right.$
$2gv - 2c'mv$	$\varepsilon'^2\gamma^2$	$\left\{\frac{27}{32}-\frac{9}{16}\cdot\frac{m}{g}\right.$
$2cv + 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2$	$\left\{\frac{27}{8}+\frac{135}{16}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$2cv - 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2$	$\left\{\frac{27}{8}-\frac{135}{16}\cdot\frac{m}{c}\right.$
$cv - 2gv - c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{-\frac{9}{8}\right.$
$cv - 2gv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{-\frac{9}{8}\right.$
$cv - 2gv + 2c'mv$	$e\varepsilon'^2\gamma^2$	$\left\{-\frac{27}{16}\right.$
$3cv - 2gv$	$e^3\gamma^2$	$\left\{-\frac{15}{16};\right.$

$$\frac{3}{2}u_{,} - \frac{3}{2}q\,\frac{(a'u')^3}{u_{,}^3} =$$

$$
\begin{array}{lll}
\cos\ 0v & 1 & \Big\{ -\frac{9}{4}\varepsilon'^2 - \frac{9}{4}e^2\varepsilon'^2 + \frac{9}{16}e^4 - \frac{45}{16}\varepsilon'^4 - \frac{9}{16}\varepsilon'^2\gamma^2 \\
cv & e & \Big\{ \ 6 + \frac{15}{4}e^2 + \frac{27}{4}\varepsilon'^2 \\
c'mv & \varepsilon' & \Big\{ -\frac{9}{2} - \frac{81}{16}\varepsilon'^2 - \frac{9}{2}e^2 - \frac{9}{8}\gamma^2 \\
2c'mv & \varepsilon'^2 & \Big\{ -\frac{27}{4} + \frac{27}{4}e^2 - \frac{21}{4}\varepsilon'^2 - \frac{27}{16}\gamma^2 \\
2gv & \gamma^2 & \Big\{ -\frac{3}{2} + \frac{15}{4}e^2 - \frac{27}{16}\varepsilon'^2 + \frac{3}{8}\gamma^2 \\
2cv & e^2 & \Big\{ -\frac{9}{2} - \frac{9}{4}e^2 - \frac{27}{4}\varepsilon'^2 + \frac{9}{8}\gamma^2 \\
cv + c'mv & e\varepsilon' & \Big\{ \ \frac{27}{4} + \frac{9}{2}\cdot\frac{m}{c} + \frac{27}{8}e^2 + \frac{243}{32}\varepsilon'^2 \\
cv - c'mv & e\varepsilon' & \Big\{ \ \frac{27}{4} - \frac{9}{2}\cdot\frac{m}{c} + \frac{27}{8}e^2 + \frac{243}{32}\varepsilon'^2 \\
3c'mv & \varepsilon'^3 & \Big\{ -\frac{159}{16} \\
3cv & e^3 & \Big\{ \ \frac{15}{4} \\
2gv + cv & e\gamma^2 & \Big\{ \ \frac{9}{4} \\
2gv - cv & e\gamma^2 & \Big\{ \ \frac{9}{4} \\
2gv + c'mv & \varepsilon'\gamma^2 & \Big\{ -\frac{27}{16} - \frac{9}{16}\cdot\frac{m}{g} \\
2gv - c'mv & \varepsilon'\gamma^2 & \Big\{ -\frac{27}{16} + \frac{9}{16}\cdot\frac{m}{g} \\
2cv + c'mv & \varepsilon'e^2 & \Big\{ -\frac{27}{4} - \frac{135}{16}\cdot\frac{m}{c} \\
2cv - c'mv & \varepsilon'e^2 & \Big\{ -\frac{27}{4} + \frac{135}{16}\cdot\frac{m}{c} \\
cv + 2c'mv & e\varepsilon'^2 & \Big\{ \ \frac{81}{8} + \frac{27}{2}\cdot\frac{m}{c} \\
cv - 2c'mv & e\varepsilon'^2 & \Big\{ \ \frac{81}{8} - \frac{27}{2}\cdot\frac{m}{c}
\end{array}
$$

$+\cos 4c'mv$	ε'^4	$\Big\{ -\frac{231}{16}$
$4cv$	e^4	$\Big\{ -\frac{45}{16}$
$4gv$	γ^4	$\Big\{ -\frac{3}{8}$
$2gv + 2cv$	$e^2\gamma^2$	$\Big\{ -\frac{45}{16}$
$2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2$	$\Big\{ -\frac{45}{16}$
$cv + 3c'mv$	$e\varepsilon'^3$	$\Big\{ \frac{477}{32}$
$cv - 3c'mv$	$e\varepsilon'^3$	$\Big\{ \frac{477}{32}$
$2gv + 2c'mv$	$\varepsilon'^2\gamma^2$	$\Big\{ -\frac{81}{32}$
$2gv - 2c'mv$	$\varepsilon'^2\gamma^2$	$\Big\{ -\frac{81}{32}$
$2cv + 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2$	$\Big\{ -\frac{81}{8}$
$2cv - 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2$	$\Big\{ -\frac{81}{8}$
$3cv + c'mv$	$\varepsilon' e^3$	$\Big\{ \frac{45}{8}$
$3cv - c'mv$	$\varepsilon' e^3$	$\Big\{ \frac{45}{8}$
$2gv + cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\Big\{ \frac{27}{8}$
$2gv - cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\Big\{ \frac{27}{8}$
$2gv - cv - c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\Big\{ \frac{27}{8}$
$2gv + cv - c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\Big\{ \frac{27}{8}$

$$\frac{3}{2}\, q\, \frac{(a'u')^3}{u_{,}^4} =$$

$\cos 0v$	1	$\Big\{ \frac{3}{2} + 3e^2 + \frac{9}{4}\varepsilon'^2 + \frac{3}{16}\gamma^4 - \frac{3}{2}e^2\gamma^2 + \frac{27}{16}e^4 + \frac{9}{2}e^2\varepsilon'^2 + \frac{45}{16}\varepsilon'^4$
cv	e	$\Big\{ -6 - \frac{9}{2}e^2 - 9\cdot\varepsilon'^2 + \frac{3}{2}\gamma^2$
$c'mv$	ε'	$\Big\{ \frac{9}{2} + 9\cdot e^2 + \frac{81}{16}\varepsilon'^2$
$2c'mv$	ε'^2	$\Big\{ \frac{27}{4} + \frac{27}{2}e^2 + \frac{21}{4}\varepsilon'^2$

$+\cos$	$cv + c'mv$	$e\varepsilon' \left\{ -9 - \frac{9}{2}\cdot\frac{m}{c} - \frac{27}{4}e^2 - \frac{81}{8}\varepsilon'^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 \right.$
	$cv - c'mv$	$e\varepsilon' \left\{ -9 + \frac{9}{2}\cdot\frac{m}{c} - \frac{27}{4}e^2 - \frac{81}{8}\varepsilon'^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 \right.$
	$2cv$	$e^2 \left\{ \frac{15}{2} + \frac{15}{4}e^2 + \frac{45}{4}\varepsilon'^2 - \frac{15}{4}\gamma^2 \right.$
	$2gv$	$\gamma^2 \left\{ \frac{3}{2} + \frac{27}{4}e^2 + \frac{9}{4}\varepsilon'^2 - \frac{3}{4}\gamma^2 \right.$
	$3c'mv$	$\varepsilon'^3 \left\{ \frac{159}{16} \right.$
	$3cv$	$e^3 \left\{ -\frac{15}{2} \right.$
	$cv + 2c'mv$	$e\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{27}{2} \right.$
	$cv - 2c'mv$	$e\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{27}{2} \right.$
	$2cv + c'mv$	$\varepsilon' e^2 \left\{ \frac{45}{4} \right.$
	$2cv - c'mv$	$\varepsilon' e^2 \left\{ \frac{45}{4} \right.$
	$2gv + c'mv$	$\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{4} \right.$
	$2gv - c'mv$	$\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{4} \right.$
	$2gv + cv$	$e\gamma^2 \left\{ -\frac{15}{4} \right.$
	$2gv - cv$	$e\gamma^2 \left\{ -\frac{15}{4} \right.$
	$2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2 \left\{ \frac{45}{8} \right.$
	$2gv + 2cv$	$e^2\gamma^2 \left\{ \frac{45}{8} \right.$
	$2cv - 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{135}{8} \right.$
	$2cv + 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{135}{8} \right.$
	$2gv - 2c'mv$	$\varepsilon'^2\gamma^2 \left\{ \frac{27}{8} \right.$
	$2gv + 2c'mv$	$\varepsilon'^2\gamma^2 \left\{ \frac{27}{8} \right.$

$+\cos 4c'mv$	ε'^4	$\left\{-\frac{231}{16}\right.$
$4cv$	e^4	$\left\{-\frac{105}{16}\right.$
$4gv$	γ^4	$\left\{\frac{9}{16}\right.$
$cv+3c'mv$	$e\varepsilon'^3$	$\left\{-\frac{159}{8}\right.$
$cv-3c'mv$	$e\varepsilon'^3$	$\left\{-\frac{159}{8}\right.$
$3cv+c'mv$	$\varepsilon'e^3$	$\left\{-\frac{45}{4}\right.$
$3cv-c'mv$	$\varepsilon'e^3$	$\left\{-\frac{45}{4}\right.$
$2gv+cv+c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{-\frac{45}{8}\right.$
$2gv+cv-c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{-\frac{45}{8}\right.$
$2gv-cv+c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{-\frac{45}{8}\right.$
$2gv-cv-c'mv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{-\frac{45}{8}\right.$.

256. Pour faciliter le calcul des termes donnés par la fonction R'' nous ajouterons ici les trois développemens suivans, exacts jusqu'aux quantités du *quatrième* ordre inclusivement :

$$\frac{3}{2}q\left(\frac{\alpha'u'}{u_1}\right)^3\cos(2v-2v')=$$

$$\cos 2Ev \quad 1\left\{\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}-6\frac{m^2}{c^2}\right)e^2+\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{15}{4}\varepsilon'^2-\frac{15}{4}e^2\varepsilon'^2+\frac{39}{32}\varepsilon'^4-\frac{3}{8}e^2\gamma^2-\frac{9}{128}\gamma^4+\frac{15}{16}e^4-\frac{15}{16}\varepsilon'^2\gamma^2+\frac{3}{8}\gamma^2\right.$$

$$2Ev+c'mv \quad \varepsilon'\left\{-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2+\frac{3}{32}\varepsilon'^2\right.$$

$$2Ev-c'mv \quad \varepsilon'\left\{\frac{21}{4}+\frac{21}{4}e^2+\frac{21}{16}\gamma^2-\frac{369}{32}\varepsilon'^2\right.$$

$$2Ev+cv \quad e\left\{-\frac{9}{4}+3\frac{m}{c}-\left(\frac{9}{8}-\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)e^2+\left(\frac{45}{8}-\frac{15}{2}\cdot\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2\right.$$

$$2Ev-cv \quad e\left\{-\frac{9}{4}-3\frac{m}{c}-\left(\frac{9}{8}+\frac{3}{16}\cdot\frac{m}{c}\right)e^2+\left(\frac{45}{8}+\frac{15}{2}\cdot\frac{m}{c}\right)\varepsilon'^2\right.$$

$+\cos 2Ev - 2c'mv$	ε'^2	$\left\{ \frac{51}{4} + \frac{51}{4}e^2 + \frac{51}{16}\gamma^2 - \frac{115}{4}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev + 2cv$	e^2	$\left\{ \frac{9}{4} - \frac{45}{8}\cdot\frac{m}{c} + 3\frac{m^2}{c^2} + \frac{9}{8}e^2 - \frac{9}{16}\gamma^2 - \frac{45}{8}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev - 2cv$	e^2	$\left\{ \frac{9}{4} + \frac{45}{8}\cdot\frac{m}{c} + 3\frac{m^2}{c^2} + \frac{9}{8}e^2 - \frac{9}{16}\gamma^2 - \frac{45}{8}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev + 2gv$	γ^2	$\left\{ \frac{9}{16} - \frac{3}{8}\cdot\frac{m}{g} + \frac{27}{16}e^2 - \frac{9}{64}\gamma^2 - \frac{45}{32}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev - 2gv$	γ^2	$\left\{ \frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cdot\frac{m}{g} + \frac{27}{16}e^2 - \frac{9}{64}\gamma^2 - \frac{45}{32}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev + c'mv + cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ \frac{9}{8} - \frac{3}{4}\cdot\frac{m}{c} + \frac{9}{16}e^2 - \frac{9}{64}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ \frac{9}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{m}{c} + \frac{9}{16}e^2 - \frac{9}{64}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev - c'mv + cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ -\frac{63}{8} + \frac{63}{4}\cdot\frac{m}{c} - \frac{63}{16}e^2 + \frac{1107}{64}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev - c'mv - cv$	$e\varepsilon'$	$\left\{ -\frac{63}{8} - \frac{63}{4}\cdot\frac{m}{c} - \frac{63}{16}e^2 + \frac{1107}{64}\varepsilon'^2 \right.$
$2Ev + 3c'mv$	ε'^3	$\left\{ \frac{1}{32} \right.$
$2Ev - 3c'mv$	ε'^3	$\left\{ \frac{845}{32} \right.$
$2Ev + 3cv$	e^3	$\left\{ -\frac{15}{8} + \frac{107}{16}\cdot\frac{m}{c} \right.$
$2Ev - 3cv$	e^3	$\left\{ -\frac{15}{8} - \frac{107}{16}\cdot\frac{m}{c} \right.$
$2Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2$	$\left\{ -\frac{9}{8} + \left(\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{g} + \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{c} + \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{2g+c}\right)m \right.$
$2Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2$	$\left\{ -\frac{9}{8} - \left(\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{g} + \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{c} + \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{2g+c}\right)m \right.$
$2Ev + 2gv - cv$	$e\gamma^2$	$\left\{ -\frac{9}{8} + \left(\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{g} - \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{c} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2g-c}\right)m \right.$
$2Ev - 2gv + cv$	$e\gamma^2$	$\left\{ -\frac{9}{8} - \left(\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{g} - \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{c} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2g-c}\right)m \right.$

$$+\cos\ 2Ev + c'mv + 2cv \quad \varepsilon'e^2\left\{-\frac{9}{8} + \frac{45}{32}\cdot\frac{m}{c}\right.$$

$$2Ev + c'mv - 2cv \quad \varepsilon'e^2\left\{-\frac{9}{8} - \frac{45}{32}\cdot\frac{m}{c}\right.$$

$$2Ev - c'mv + 2cv \quad \varepsilon'e^2\left\{\ \frac{63}{8} - \frac{945}{32}\cdot\frac{m}{c}\right.$$

$$2Ev - c'mv - 2cv \quad \varepsilon'e^2\left\{\ \frac{63}{8} + \frac{945}{32}\cdot\frac{m}{c}\right.$$

$$2Ev + c'mv + 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{-\frac{9}{32} + \frac{3}{32}\cdot\frac{m}{g}\right.$$

$$2Ev + c'mv - 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{-\frac{9}{32} - \frac{3}{32}\cdot\frac{m}{g}\right.$$

$$2Ev - c'mv + 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{\ \frac{63}{32} - \frac{63}{32}\cdot\frac{m}{g}\right.$$

$$2Ev - c'mv - 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{\ \frac{63}{32} + \frac{63}{32}\cdot\frac{m}{g}\right.$$

$$2Ev - 2c'mv + cv \quad e\varepsilon'^2\left\{-\frac{153}{8} + 51\cdot\frac{m}{c}\right.$$

$$2Ev - 2c'mv - cv \quad e\varepsilon'^2\left\{-\frac{153}{8} - 51\cdot\frac{m}{c}\right.$$

$$2Ev + 4c'mv \quad \varepsilon'^4\left\{\ \frac{1}{16}\right.$$

$$2Ev - 4c'mv \quad \varepsilon'^4\left\{\ \frac{1599}{32}\right.$$

$$2Ev + 4cv \quad e^4\left\{\ \frac{45}{32}\right.$$

$$2Ev - 4cv \quad e^4\left\{\ \frac{45}{32}\right.$$

$$2Ev + 4gv \quad \gamma^4\left\{\ \frac{45}{256}\right.$$

$$2Ev - 4gv \quad \gamma^4\left\{\ \frac{45}{256}\right.$$

$$2Ev + 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2\left\{\ \frac{45}{32}\right.$$

$$2Ev - 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2\left\{\ \frac{45}{32}\right.$$

$+ \cos$	$2Ev + 2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2$	$\left\{ \frac{45}{32} \right.$
	$2Ev - 2gv + 2cv$	$e^2\gamma^2$	$\left\{ \frac{45}{32} \right.$
	$2Ev + c'mv + 3cv$	$\varepsilon' e^3$	$\left\{ \frac{15}{16} \right.$
	$2Ev + c'mv - 3cv$	$\varepsilon' e^3$	$\left\{ \frac{15}{16} \right.$
	$2Ev - c'mv + 3cv$	$\varepsilon' e^3$	$\left\{ - \frac{105}{16} \right.$
	$2Ev - c'mv - 3cv$	$\varepsilon' e^3$	$\left\{ - \frac{105}{16} \right.$
	$2Ev - 2c'mv + 2cv$	$\varepsilon'^2 e^2$	$\left\{ \frac{153}{8} \right.$
	$2Ev - 2c'mv - 2cv$	$\varepsilon'^2 e^2$	$\left\{ \frac{153}{8} \right.$
	$2Ev - 2c'mv + 2gv$	$\varepsilon'^2 \gamma^2$	$\left\{ \frac{153}{32} \right.$
	$2Ev - 2c'mv - 2gv$	$\varepsilon'^2 \gamma^2$	$\left\{ \frac{153}{32} \right.$
	$2Ev + 3c'mv + cv$	$e\varepsilon'^3$	$\left\{ - \frac{3}{64} \right.$
	$2Ev + 3c'mv - cv$	$e\varepsilon'^3$	$\left\{ - \frac{3}{64} \right.$
	$2Ev - 3c'mv + cv$	$e\varepsilon'^3$	$\left\{ - \frac{2535}{64} \right.$
	$2Ev - 3c'mv - cv$	$e\varepsilon'^3$	$\left\{ - \frac{2535}{64} \right.$
	$2Ev + c'mv + 2gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ \frac{9}{16} \right.$
	$2Ev + c'mv - 2gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ \frac{9}{16} \right.$
	$2Ev + c'mv + 2gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ \frac{9}{16} \right.$
	$2Ev + c'mv - 2gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ \frac{9}{16} \right.$
	$2Ev - c'mv + 2gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ - \frac{63}{16} \right.$
	$2Ev - c'mv - 2gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ - \frac{63}{16} \right.$
	$2Ev - c'mv + 2gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ - \frac{63}{16} \right.$
	$2Ev - c'mv - 2gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{ - \frac{63}{16} \right.$;

$$\frac{9}{8} b^2 q \left(\frac{a'u'}{u_{,}}\right)^4 \cos(v - v') =$$

$\cos\ Ev$	b^2	$\left\{ \frac{9}{8} + \frac{9}{4} e^2 + \frac{9}{4} \varepsilon'^2 \right.$
$Ev + c'mv$	$\varepsilon' b^2$	$\left\{ \frac{9}{8} + \frac{9}{4} e^2 + \frac{45}{16} \varepsilon'^2 \right.$
$Ev - c'mv$	$\varepsilon' b^2$	$\left\{ \frac{27}{8} \right.$
$Ev + cv$	$e b^2$	$\left\{ - \frac{9}{4} + \frac{9}{8} \cdot \frac{m}{c} \right.$
$Ev - cv$	$e b^2$	$\left\{ - \frac{9}{4} - \frac{9}{8} \cdot \frac{m}{c} \right.$
$Ev + 2c'mv$	$\varepsilon'^2 b^2$	$\left\{ \frac{99}{64} \right.$
$Ev - 2c'mv$	$\varepsilon'^2 b^2$	$\left\{ \frac{477}{64} \right.$
$Ev + 2cv$	$e^2 b^2$	$\left\{ \frac{45}{16} \right.$
$Ev - 2cv$	$e^2 b^2$	$\left\{ \frac{45}{16} \right.$
$Ev + 2gv$	$\gamma^2 b^2$	$\left\{ \frac{9}{16} \right.$
$Ev - 2gv$	$\gamma^2 b^2$	$\left\{ \frac{9}{16} \right.$
$Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon' b^2$	$\left\{ - \frac{9}{4} \right.$
$Ev + c'mv + cv$	$e\varepsilon' b^2$	$\left\{ - \frac{9}{4} \right.$
$Ev - c'mv + cv$	$e\varepsilon' b^2$	$\left\{ - \frac{27}{4} \right.$
$Ev - c'mv - cv$	$e\varepsilon' b^2$	$\left\{ - \frac{27}{4} \right.$;

$$\frac{15}{8} b^2 q \left(\frac{a'u'}{u_{,}}\right)^4 \cos(3v - 3v') =$$

$\cos\ 3Ev$	b^2	$\left\{ \frac{15}{8} + \frac{15}{4} e^2 - \frac{45}{4} \varepsilon'^2 \right.$
$3Ev + c'mv$	$\varepsilon' b^2$	$\left\{ - \frac{15}{8} \right.$
$3Ev - c'mv$	$\varepsilon' b^2$	$\left\{ \frac{75}{8} \right.$

$$+ \cos\ 3Ev + cv \quad eb^2 \left\{ -\frac{15}{4} + \frac{45}{8} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$3Ev - cv \quad eb^2 \left\{ -\frac{15}{4} - \frac{45}{8} \cdot \frac{m}{c} \right.$$

$$3Ev + 2c'mv \quad \varepsilon'^2 b^2 \left\{ \frac{15}{64} \right.$$

$$3Ev - 2c'mv \quad \varepsilon'^2 b^2 \left\{ \frac{1905}{64} \right.$$

$$3Ev + 2cv \quad e^2 b^2 \left\{ \frac{75}{16} \right.$$

$$3Ev - 2cv \quad e^2 b^2 \left\{ \frac{75}{16} \right.$$

$$3Ev + 2gv \quad \gamma^2 b^2 \left\{ \frac{15}{16} \right.$$

$$3Ev - 2gv \quad \gamma^2 b^2 \left\{ \frac{15}{16} \right.$$

$$3Ev + c'mv + cv \quad e\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{15}{4} \right.$$

$$3Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{15}{4} \right.$$

$$3Ev - c'mv + cv \quad e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{75}{4} \right.$$

$$3Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{75}{4}. \right.$$

257. On peut actuellement entreprendre l'intégration des équations différentielles en procédant par une suite d'approximations successives. C'est ici que commence la partie la plus utile de notre théorie. Ce qui précède n'est en quelque sorte que la matière première d'un travail qui reste à faire entièrement. Le raisonnement seul, sans être accompagné de l'exécution, ne donnerait que des idées fort imparfaites sur la distance réelle qu'il y a entre les équations différentielles et le résultat explicite qu'elles peuvent fournir avec un degré d'approximation indéfini. Mais, même en demeurant loin de l'état idéal de la perfection, il est nécessaire de s'engager dans des calculs d'une longueur effrayante, si l'on veut atteindre la limite des quantités sensibles à l'observation. Et après avoir atteint ce but, on remarque que la simplicité des résultats définitifs forme un contraste frappant avec la

complication des calculs intermédiaires qu'il a fallu exécuter pour les obtenir. Il est vrai que, par fois, cette complication tient à l'imperfection de la méthode que l'on a suivie. Mais, sans contester l'existence future d'une méthode beaucoup plus expéditive, nous nous bornerons à présenter celle que nous avons jugée la plus sûre dans l'état actuel de l'analyse, pour conserver à la solution du problème la généralité dont elle est susceptible.

Nous avons aussi satisfait à la condition principale que l'on est en droit d'exiger dans toute méthode d'approximation; savoir, de n'être jamais absolument bornée et de préparer les moyens propres à franchir le pas qui suit immédiatement celui auquel on s'est arrêté. L'examen de nos résultats intermédiaires fera voir que, sous ce dernier rapport, ils ont une utilité assez importante pour justifier le parti que nous avons pris de les publier avec un détail, qui, au premier coup d'oeil, pourrait paraître fastidieux.

L'action du Soleil, celle des Planètes, et la figure elliptique de la Terre et de la Lune sont les seules forces productrices des inégalités observées jusqu'ici dans le mouvement du centre de gravité de la Lune. Nos équations différentielles renferment toutes les fonctions qu'il faut développer pour tirer de ces différentes sources les perturbations sensibles, et la véritable explication de celles qui demeurent insensibles par la nature des coefficiens qui les multiplient. Mais il faut convenir que l'exacte analyse de toutes les conséquences qui y sont implicitement renfermées est sujette à des difficultés d'un genre singulier, auquel on n'est pas habitué dans le cours ordinaire des autres applications de l'analyse mathématique aux questions de haute géométrie et de mécanique. D'après cette réflexion, il n'est pas surprenant, si plusieurs vérités que l'on pouvait dériver de ces équations différentielles ont échappé aux premières recherches des plus grands géomètres. On doit même applaudir aux vains efforts qu'ils ont fait, en considérant que ces travaux ont préparé et hâté des découvertes utiles. Heureusement les pas rétrogrades ont été évités. Un seul moment on douta, si l'attraction Newtonienne pouvait, seule, expliquer

le mouvement du périgée : mais cette innovation dangereuse fut dissipée, dés sa naissance, par celui-même qui l'avait proposée. Et *Clairaut* en fortifiant ainsi la loi de Newton a montré le premier la nécessité d'analyser avec soin les termes provenans du carré de la force perturbatrice. L'accélération observée dans le moyen mouvement de la Lune a égaré plus long-tems les géomètres ; mais enfin elle fut expliquée à l'aide du principe de la gravitation universelle.

Nous ne connaissons pas d'autres causes capables d'influer d'une manière sensible sur le mouvement de la Lune. Et c'est uniquement pour offrir un exemple de la généralité de nos formules qu'il a été question dans le n.° 228 de l'effet *indirect* produit par la résistance d'une matière éthérée. Le calcul de l'effet *direct* exigerait à la vérité de reprendre, sous ce point de vue, la considération des équations différentielles primitives du second ordre. Mais nous jugeons inutile une telle extension, puisque rien n'établit jusqu'à présent la possibilité d'une matière éthérée susceptible d'altérer le mouvement du globe de la Lune. En conséquence nous bornerons ici l'exposition purement théorique de tout ce qui concerne la formation des équations différentielles, et nous dirigerons dans le Volume suivant toutes nos recherches vers leur intégration, de manière à pouvoir obtenir les trois coordonnées exactes jusqu'aux quantités du cinquième ordre, inclusivement.

Dans le troisième Volume nous pousserons plus loin le développement des coefficiens, qui, eû égard à la lenteur de la convergence des séries par lesquelles ils sont exprimés, exigent la considération des quantités d'un ordre supérieur au cinquième.

Maintenant, nous supposerons connue l'expression analytique des inégalités Lunaires dues à l'action du Soleil; et en partant de cette donnée fondamentale, nous exposerons dans le Chapitre suivant les différentes recherches qui s'y rattachent. De cette manière, ce Volume renfermera tous les principaux résultats de la Théorie de la Lune, et on n'aura besoin de recourir aux deux autres que pour y étudier l'effrayant enchaînement qui existe entre les équations différentielles

et les résultats explicites que nous en avons tiré. On demeurera ainsi convaincu qu'il n'y a presque point de comparaison entre la difficulté et la longueur du calcul qu'exige le développement des inégalités Lunaires dues à l'action du Soleil, et tout ce qui tient au développement des autres causes perturbatrices. D'après cette réflexion, nous avons regardé le Chapitre suivant comme un simple complément de la Théorie de la Lune, et nous l'avons en quelque sorte isolé par son titre des autres Chapitres, afin de mieux faire sentir qu'il tient à cette Théorie sans en constituer la partie dominante. C'est ainsi que le point conjugué d'une courbe lui appartient intimément, sans être une partie essentielle dans la direction de son cours. Le Titre des paragraphes donne une idée des sujets que nous avons traité dans le Chapitre Complémentaire, et chacun d'eux est précédé d'une courte introduction, propre à fixer le but vers lequel sont dirigés les calculs qu'il renferme.

CHAPITRE COMPLÉMENTAIRE

RECHERCHES DIVERSES

QUI SUPPOSENT DÉJA CONNUE L'EXPRESSION ANALYTIQUE DES INÉGALITÉS LUNAIRES DUES A L'ACTION DU SOLEIL.

§ I.

Des inégalités dues à la figure elliptique de la Terre.

1. **P**our former les équations, desquelles dépend le développement de ces inégalités il n'est point nécessaire de changer la forme des trois équations différentielles (III), (I)″, (II)″ posées dans les pages 265, 276, 277 : il suffit d'introduire dans l'expression des fonctions désignées par $\mu^2 R_1$, $\mu^2 R_2$ . . $\mu^2 R_5$ les termes, que cette nouvelle cause perturbatrice leurs ajoute, respectivement. Les trois résultats trouvés dans la page 36 nous fournissent immédiatement ces termes : il faut d'abord y faire $K_{(3)} = 0$, pour n'avoir à considérer que l'effet dû à la figure elliptique de la Terre ; et ensuite, en ayant sous les yeux l'analyse exposée dans les pages 264-267, on voit aussitôt, que après avoir fait, pour plus de simplicité ; $v+\varphi=fv=$ *longitude vraie de la Lune par rapport au point mobile de l'équinoxe du printemps* ;

$$\mu'^2=\left(\frac{D}{\mathrm{a}}\right)^2(K_{(2)}-\Psi)\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1}\right)=\left(\frac{D}{a}\right)^2(K_{(2)}-\Psi)\left(\frac{a}{\mathrm{a}}\right)^2\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1}\right),$$

on a ;

$$R_1 = \quad q\frac{\mu'^2}{\mu^2}\cdot\frac{au}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\sin 2\omega . s . \cos fv + \sin^2\omega . \sin 2fv\right\};$$

$$R_2 = \quad q\frac{\mu'^2}{\mu^2}(2-3\sin^2\omega)\frac{au}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}};$$

$$R_3 = \quad q\frac{\mu'^2}{\mu^2}\cdot\frac{au}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left\{\sin 2\omega . \left(\frac{1-ss}{s}\right)\sin fv + \sin^2\omega . \cos 2fv\right\};$$

$$R_4 = -q\frac{\mu'^2}{\mu^2}\cdot\frac{(au)^2}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\omega\right)-(4-6\sin^2\omega)s^2\right\};$$

$$R_5 = \quad q\frac{\mu'^2}{\mu^2}\cdot\frac{(au)^2}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}\left\{\sin 2\omega . (4-s^2)s . \sin fv - \left(\frac{3}{2}-s^2\right)\sin^2\omega . \cos 2fv\right\}.$$

Cela posé, on doit imaginer ces termes ajoutés aux valeurs correspondantes de R_1, R_2 . . R_5 données dans les pages 265, 266 et reprendre sous ce nouveau point de vue la considération des équations différentielles pour analyser les termes auxquels ils donnent naissance dans l'expression des coordonnées Lunaires. On ne doit pas perdre de vue dans cette recherche, que, arithmétiquement parlant, le facteur μ'^2 est au-dessous de la *cinquième* puissance du rapport m des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune; et qu'en conséquence on ne doit rien attendre de considérable, en général, d'une aussi petite force perturbatrice; mais seulement quelques termes capables de devenir sensibles en vertu des facteurs qu'ils acquièrent par l'intégration. Les développemens doivent être dirigés d'après cette idée, et d'après le principe, qui, indépendamment de l'intégration, détermine les facteurs qui sont inhérens à la forme même des argumens. Alors, on donne aussitôt l'exclusion à une foule d'argumens dont l'existence incontestable est, en quelque sorte, détruite par l'excessive petitesse des facteurs qui les multiplient. Et par un effet contraire on voit l'origine des inégalités sensibles dans l'espèce de transformation, que l'intégration imprime à certains termes de la force perturbatrice, qui, par leur petitesse cachent à

une analyse moins scrutatrice les graves conséquences de leur existence dans les équations différentielles.

2. Rémarquons avant tout, que la fonction $\mu^2 R_2 . s$ introduit dans le second membre de l'équation $(I)''$ le terme $\mu'^2 (2 - 3 \sin^2 \omega) \gamma \sin gv$: et que, par conséquent, il faut ajouter la quantité $\mu'^2 (2 - 3 \sin^2 \omega)$ à l'expression de P. De sorte que, d'après la formule posée dans la page 36 du second volume, on a $g = \mu'^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \omega \right)$, pour la partie principale que la figure elliptique de la Terre ajoute au coefficient du mouvement du noeud de l'orbite de la Lune. La même cause augmente d'une égale quantité le mouvement du périgée : car, en considérant la fonction $\mu^2 R_4$, et faisant dans son expression $au = 1 + e \cos cv$, on voit naître le terme $-2 \mu'^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \omega \right) e \cos cv$ dans le second membre de l'équation différentielle $(II)''$; ce qui ajoute à la valeur de Q' le terme $Q' = -2 \mu'^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \omega \right)$; et par conséquent la quantité $-\mu'^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \omega \right)$ à la valeur de c (Voyez pour plus de clarté les pages 69 et 73 du second volume). Tel est le principal effet des deux fonctions R_2, R_4 : en partant de ce point nous les regarderons comme nulles. Et pour simplifier davantage cette recherche nous aurons d'abord égard seulement aux termes multipliés par $\sin 2\omega$; c'est-à-dire qu'en posant, pour plus de simplicité, $A' = \frac{\mu'^2}{\mu^2} \sin 2\omega$, la question sera réduite à discuter les termes que la figure elliptique de la Terre ajoute à l'action du Soleil lorsqu'on introduit dans les équations différentielles les trois fonctions

$$R_1 = \frac{A' q . s . au . \cos fv}{(1 + ss)^{\frac{5}{2}}} ; \qquad s R_3 = \frac{A' q . (1 - ss) au . \sin fv}{(1 + ss)^{\frac{5}{2}}} .$$

$$R_5 = \frac{A' q (4 - ss) s . (au)^2 . \sin fv}{(1 + ss)^{\frac{7}{2}}} ;$$

Elles sont la source des inégalités Lunaires formées par des combinaisons de l'angle simple fv avec les argumens dûs à la figure sphérique de la Terre et à l'action du Soleil.

Je préviens le Lecteur, une fois pour toutes, que dans cette discussion, j'estimerai l'ordre de grandeur des coefficiens, comme si l'on avait $A'=1$; quoique dans le fait la valeur de A' soit à-peu-près de l'ordre de m^4. Par cette convention on rend plus simple la désignation de l'ordre des quantités multipliées par A'.

3. Cela posé, il est d'abord évident que $A' \sin fv$, est le principal terme de sR_3; et que les fonctions $-R_1 \frac{ds}{dv}$, $-2\left(\frac{d^2 \delta s}{dv^2}+\delta s\right)\int R_1 dv$ donneraient des termes d'un ordre supérieur à celui-ci. Donc, en prenant seulement la partie principale dans cette première approximation, on aura

$$-\frac{d^2 . \delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}\mu^2\right)\delta s = A' \mu^2 \sin fv;$$

d'où l'on tire en intégrant, et observant qu'on peut (dans les coefficiens) faire $f=1$, sans erreur sensible;

$$\delta s = -\frac{2}{3} A' \sin fv.$$

En multipliant ce terme par $3s_1 = 3\gamma \sin gv$, on a

$$3s_1 \delta s = -A' \gamma \cos gv - fv + A' \gamma \cos gv + fv.$$

Mais, le principal terme de l'expression précédente de R_1 est

$$A' s_1 \cos fv = \frac{A'}{2} \gamma \sin gv - fv + \frac{A'}{2} \gamma \sin gv + fv.$$

Donc, en omettant l'argument $gv+fv$, dont le coefficient demeure du troisième ordre dans la valeur de l'intégrale $-m^2 \int R_1 dv$, on aura

$$R_1 = \frac{A'}{2} \gamma \sin gv - fv;$$

$$-\int R_1 dv = \frac{A'}{2(g-1)} \gamma \cos gv - fv = \frac{2}{3} \cdot \frac{A'\gamma}{m^2} \cos gv - fv;$$

ce qui revient à prendre $g = 1 + \frac{3}{4} m^2$.

Il suit de là qu'on a ;

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}\mu^2\right)\delta u= 3s_1\delta s-2\mu^2\int R_1 dv= \frac{1}{3}A'\gamma\cos gv-fv$$
$$+ A'\gamma\cos gv+fv.$$

Intégrant cette équation, et faisant dans cette première approximation;

$$(g-f)^2-1+\frac{3}{2}\mu^2=-1\ ;\quad (g+f)^2-1+\frac{3}{2}\mu^2=3$$

on obtient

$$\delta u=-\frac{1}{3}A'\gamma\cos gv-fv+\frac{1}{3}A'\gamma\cos gv+fv.$$

Maintenant, si l'on pose l'équation, $\frac{d.\delta nt}{dv}=-2\delta u+\mu^2\int R_1 dv$, il est clair qu'on a ;

$$\frac{d.\delta nt}{dv}= A'\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)\gamma\cos gv-fv-\frac{2}{3}A'\gamma\cos gv+fv.$$

d'où l'on tire en intégrant ;

$$\delta nt=-\frac{1}{3}A'\gamma.\sin gv+fv.$$

On voit par là, que le terme de l'ordre -1, qui constitue le premier terme du coefficient de l'argument $gv-fv$ se réduit à zéro. Les quantités qui suivent immédiatement cet ordre étant celles de l'ordre zéro, on ne saurait regarder comme résultat de la première approximation le terme donné par l'équation $\delta nt=-\frac{1}{3}A'\gamma.\sin gv+fv$, puisqu'il est du premier ordre. De là nous concluons, que les résultats qui constituent la véritable première approximation, sont,

$$\delta s=-\frac{2}{3}A'\sin fv;\ \delta u=-\frac{A'\gamma}{3}\cos gv-fv+\frac{A'\gamma}{3}\cos gv+fv;\ \delta nt=A'\gamma \overset{-2}{m}(0)\sin gv-fv.$$

4. Cherchons maintenant les termes qui appartiennent à l'approximation suivante. Pour cela, il faut combiner les termes dûs à l'action

du Soleil avec ceux de la figure elliptique de la Terre. En effet ; si l'on réduit l'équation différentielle en δs (Voyez p. 276) à

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}\mu^2\right)\delta s=\frac{3}{2}\mu^2\left(\delta s\cos 2Ev-\frac{d.\delta s}{dv}\sin 2Ev\right);$$

elle donnera $\delta s=-\frac{mA'}{4}.\sin 2Ev-fv$, en y faisant $\delta s=-\frac{2}{3}A'\sin fv$ dans le second membre et intégrant à la manière ordinaire.

Ce terme n'est pas le seul, du premier ordre, qui fait partie de l'expression de δs : car il donne lui même :

$$\delta s\cos 2Ev-\frac{d.\delta s}{dv}\sin 2Ev=\frac{m.A'}{4}\sin fv.$$

Ainsi, en considérant ce seul argument on a l'équation

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s=A'\left(m^2+\frac{3}{8}m^3\right)\sin fv,$$

laquelle étant intégrée donne

$$\delta s=-A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m\right)\sin fv.$$

En réunissant les parties de δs trouvées jusqu'ici nous avons

$$\delta s=-A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m\right)\sin fv-\frac{mA'}{4}\sin 2Ev-fv.$$

Et il est aisé de voir, que cette expression est exacte jusqu'aux quantités du premier ordre inclusivement.

Voici, par anticipation, deux autres termes de δs, dont nous allons avoir besoin : on les obtient, en prenant

$$sR_3=A'e\cos cv.\sin fv=\frac{A'e}{2}(\sin cv+fv-\sin cv-fv),$$

$$R_2\delta s=-6e\cos cv\times-\frac{2}{3}A'\sin fv=2A'e(\sin cv+fv-\sin cv-fv),$$

et considérant ces deux seuls argumens dans l'équation différentielle en δs. Alors on a l'équation

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s=\frac{5}{2}m^2A'e\left\{\sin cv+fv-\sin cv-fv\right\},$$

qui donne en l'intégrant ;

$$\delta s=A'm^2e\left\{\frac{5}{6}\sin cv+fv+\frac{5}{2}\sin cv-fv\right\}.$$

5. Cherchons actuellement les termes du second ordre qui doivent entrer dans l'expression de δu.

En multipliant par $3s_1=3\gamma\sin gv$ les quatre termes précédens qui font partie de l'expression de δs, on a ;

$$\begin{aligned}3s_1\delta s=&-\frac{3}{8}A'm\gamma\left\{\cos gv-fv-\cos gv+fv\right\}\\&-\frac{3}{8}A'm\gamma\left\{\cos 2Ev-gv-fv-\cos 2Ev+gv-fv\right\}\\&+A'm^2e\gamma\left\{\frac{5}{4}\cos gv-cv+fv+\frac{15}{4}\cos gv-cv+fv-\frac{15}{4}\cos gv+cv-fv\right\}.\end{aligned}$$

En prenant

$$\delta s=-\frac{2}{3}A'\sin fv+\frac{3}{8}m\gamma.\sin 2Ev-gv+3m^2e\gamma.\sin gv-cv-m^2e\gamma.\sin gv+cv$$

et faisant le carré, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}(\delta s)^2=&-\frac{3}{8}A'm\gamma\left\{\cos 2Ev-gv-fv-\cos 2Ev-gv+fv\right\}\\&+A'm^2e\gamma\left\{3\cos gv-cv+fv-3\cos gv-cv-fv+\cos gv+cv-fv\right\}.\end{aligned}$$

Il suit de là, que nous avons

$$(1)\ \ldots -q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T=3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2=$$

$$\begin{aligned}&A'\left(1+\frac{3}{8}m\right)\gamma\left\{\cos gv+fv-\cos gv-fv\right\}\\&+A'm^2e\gamma\left\{\frac{27}{4}\cos gv-cv+fv-\frac{11}{4}\cos gv+cv-fv-\frac{7}{4}\cos gv-cv-fv\right\}\\&+\frac{3}{8}A'm\gamma\left\{\cos 2Ev+gv-fv+\cos 2Ev-gv+fv-2.\cos 2Ev-gv-fv\right\}.\end{aligned}$$

En réduisant l'expression de R_5, posée dans le n.° 2, à

$$R_5 = 4A'\,s.(au)^2 \sin fv,$$

et prenant $(au)^2 = 1 + 2e\cos cv$, $s = \gamma \sin gv$; il viendra

$$(2)\ldots R_5 = 2A'e\gamma\left\{\cos gv+cv-fv - \cos gv-cv+fv + \cos gv-cv-fv\right\}.$$

La fonction $R_1 = A'.s.au\cos fv$, donne de la même manière;

$$R_1 = \frac{A'\gamma}{2}\left\{\sin gv-fv + \sin gv+fv\right\}$$
$$+\frac{A'e\gamma}{4}\left\{\sin gv+cv-fv + \sin gv-cv-fv + \sin gv-cv+fv\right\}.$$

Maintenant, si l'on fait le produit de R_1 par $-\frac{du_1}{dv} = e\sin cv$, on a;

$$(3)\ldots -R_1\frac{du_1}{dv} = \frac{A'e\gamma}{4}\left\{\cos gv-cv-fv - \cos gv+cv-fv + \cos gv-cv+fv\right\}.$$

En intégrant l'expression précédente de R_1, et remarquant qu'on doit ici prendre $(g-f)^{-1} = \frac{4}{3m^2}\left(1+\frac{3}{8}m\right)$, on aura

$$(4)\ldots -\int R_1 dv = \frac{A'\gamma}{2}\left(\frac{4}{3}.m^{-2} + \frac{1}{2}.m^{-1}\right)\cos gv-fv$$
$$+\frac{A'e\gamma}{4}\left\{\cos gv+cv-fv - \cos gv-cv-fv + \cos gv-cv+fv\right\}.$$

En multipliant cette fonction par

$$-\frac{2Q'q}{1+\gamma^2}e\cos cv = 2e\cos cv\left(\frac{3}{2}m^2\right)\ldots.$$ (Voyez p. 245 du Vol. 2)

on aura

$$(5)\ldots \frac{2Q'q}{1+\gamma^2}e\cos cv.\int R_1 dv = A'e\gamma\left\{\cos gv+cv-fv + \cos gv-cv-fv.\right\}$$

6. Pour avoir la totalité des termes du second ordre multipliés par A', il faut aussi considérer ceux qui naissent des termes dûs à l'action du Soleil. A cet effet, il est nécessaire d'avoir une valeur provisoire de δu, laquelle est fournie par l'équation

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=\frac{3}{8}A'm\gamma\left\{\cos 2Ev+gv-fv+\cos 2Ev-gv+fv\right\}$$

dont le second membre est formé par deux termes appartenans à la fonction désignée plus haut, par (1).

En intégrant cette équation on obtient

$$\delta u=\frac{A'm\gamma}{8}\left\{\cos 2Ev+gv-fv+\cos 2Ev-gv+fv\right\}.$$

Cela posé; en multipliant cette expression par $-6\sin 2Ev$, on aura

$$-6.\sin 2Ev.\delta u=\delta R'=-A'\gamma.\sin 2Ev-gv-fv+A'm\gamma\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}=0\right)\sin gv-fv.$$

d'où l'on tire, en intégrant

$$(4)' \ \ldots\ -\int\delta R'.dv=-\frac{A'\gamma}{2}.m^{-1}.\cos 2Ev-gv-fv.$$

En prenant; $\delta R^{IV}+\frac{3}{2}\delta u=6e\cos cv\times\delta u$ (Voyez p. 274, 277, et 350)

$$\delta u=\frac{A'\gamma}{3}\left\{\cos gv+fv-\cos gv-fv\right\};$$

on aura

$$(6)\ldots\delta R^{IV}+\frac{3}{2}\delta u=A'\gamma\left\{\cos gv-cv+fv-\cos gv-cv-fv-\cos gv+cv-fv\right\}.$$

La réunion des termes compris dans la fonction

$$(1)+m^2.\left\{(2)+(3)+2.(4)+(5)+2.(4)'+(6)\right\}$$

fournira cette équation différentielle en δu; savoir

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\begin{array}{ll}
\cos gv-fv & A'\gamma\left\{\left(\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}\right)m\right\} \\
\cos gv+fv & A'\gamma\left(1+\frac{3}{8}m\right) \\
\cos gv+cv-fv & A'e\gamma\left\{2-\frac{11}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1-1=-\frac{1}{2}\right\}m^2 \\
\cos gv-cv-fv & A'e\gamma\left\{2-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1-1=0\right\}m^2 \\
\cos gv-cv+fv & A'e\gamma\left\{\frac{27}{4}-2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{13}{2}\right\}m^2 \\
\cos 2Ev-gv-fv & A'\gamma\left\{1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\right\}m \\
\cos 2Ev+gv-fv & A'\gamma\left(\frac{3}{8}m\right) \\
\cos 2Ev-gv+fv & A'\gamma\left(\frac{3}{8}m\right).
\end{array}$$

En intégrant cette équation, et rejetant toute quantité d'un ordre supérieur au second, on aura;

$$\delta u=$$

$$\begin{array}{l}
\cos gv-fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m\right)+\cos gv+fv \quad A'\gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}m\right) \\
+\cos gv+cv-fv \quad A'e\gamma\left(-\frac{1}{3}\right)+\cos gv-cv+fv \quad A'e\gamma\left(\frac{13}{9}\right) \\
+\cos 2Ev-gv-fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{4}m\right)+\cos 2Ev+gv-fv \quad A'\gamma\left(\frac{1}{8}m\right) \\
+\cos 2Ev-gv+fv \quad A'\gamma\left(\frac{1}{8}m\right).
\end{array}$$

Telle est la valeur de δu, exacte jusqu'aux quantités du second ordre, inclusivement. De là, et de l'équation (4) on conclut, que, en considérant le seul argument $gv-fv$, on a;

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=-2\delta u+m^2\int R_1\,dv=A'\gamma\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\right)m\right\}\cos gv-fv.$$

Ainsi, il est nécessaire de passer à l'approximation suivante, pour avoir dans δnt le premier terme du coefficient de l'argument $gv-fv$. Cette approximation devant fournir tous les termes du premier ordre de δnt qui sont multipliés par A', il faut avoir en δu et $m^2 \int R_1 dv$: 1.° tous les termes du second ordre qui perdent un ordre par l'intégration ; 2.° tous les termes du troisième ordre, qui, par la même opération, en perdent deux. C'est vers ce but que nous allons diriger nos calculs.

7. Commençons par chercher tous les termes du second ordre, qui doivent entrer dans l'expression de δs. Réduisons la fonction sR_3, posée dans le n.° 2 à ;

$$sR_3 = A' q \left(1 - \frac{7}{2} . ss\right) . au . \sin fv .$$

En y faisant ; $q = 1 + e^2 + \gamma^2$; $s^2 = \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} \cos 2gv$;

$$au = 1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + e \cos cv - \frac{1}{4}\gamma^2 \cos 2gv ,$$

$$q . au = 1 + 2e^2 + \frac{5}{4}\gamma^2 + e \cos cv - \frac{1}{4}\gamma^2 \cos 2gv ,$$

il suffit, pour l'objet actuel, de prendre

$$q\, au . \sin fv = \left(1 + 2e^2 + \frac{5}{4}\gamma^2\right) \sin fv + \frac{1}{8}\gamma^2 \sin 2gv - fv ;$$

$$-q . \frac{7}{2} s^2 . \sin fv = -\frac{7}{4}\gamma^2 \sin fv - \frac{7}{8}\gamma^2 \sin 2gv - fv ;$$

et par conséquent

$$sR_3 = A' \left(1 + 2e^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\right) \sin fv - \frac{3}{4} A' \gamma^2 \sin 2gv - fv .$$

La valeur de R_1 trouvée dans le n.° 5 peut être réduite à

$$R_1 = \frac{A'\gamma}{2} \left\{ \sin gv - fv + \sin gv + fv \right\} .$$

Donc, en multipliant cette valeur par $\frac{ds_1}{dv} = \gamma \cos gv$, on a

$$-R_1 \frac{ds_1}{dv} = -\frac{1}{4} A' \gamma^2 \sin 2gv - fv.$$

Maintenant, si l'on fait le produit du terme

$$-\int R_1 dv = \frac{2}{3} \cdot A' \gamma \cdot m^{-2} \cdot \cos gv - fv \text{ par } -2P \sin gv = -2 \cdot \frac{3}{2} m^2 \gamma \sin gv,$$

on aura

$$2P\gamma \sin gv \cdot \int R_1 dv = -A' \gamma^2 \cdot \{ \sin fv + \sin 2gv - fv \}.$$

Donc, en réunissant ces termes, il viendra ;

$$[1] \ldots s R_3 - R_1 \frac{ds_1}{dv} + 2P \sin gv \cdot \int R_1 dv = A' \left(1 + 2e^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\right) \sin fv$$
$$- 2A' \gamma^2 \sin 2gv - fv.$$

8. Il faut maintenant chercher les termes produits par l'effet de la réaction. Et pour cela, nous devons, avant tout, calculer le second terme du coefficient de l'argument $2Ev - fv$, n'ayant donné que le premier dans le n.° 4. En faisant :

$$R_1 = \frac{3}{2} \sin 2Ev \; ; \quad R_3 = \frac{3}{2} \cos 2Ev \; ;$$

$$\delta s = -A' \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} m\right) \sin fv \; ; \quad -\frac{d.\delta s}{dv} = A' \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} m\right) \cos fv$$

on obtient ;

$$-R_1 \frac{d.\delta s}{dv} = A' \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16} m\right) \sin 2Ev - fv \; ;$$
$$R_3 \, \delta s = A' \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16} m\right) \sin 2Ev - fv.$$

Donc, en considérant ce seul argument, on a l'équation

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2} m^2\right) \delta s = A' \left(m^2 + \frac{3}{8} m^3\right) \sin 2Ev - fv \; ,$$

qui étant intégrée donne, après avoir développé le coefficient ;

$$\delta s = -\frac{A'}{4}(m+m^2)\sin 2Ev - fv.$$

9. Le produit des deux fonctions $R_3 = -3m^2 + \frac{3}{2}\cos 2Ev$;

$$\delta s = -A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m\right)\sin fv - \frac{A'}{4}m(1+m)\sin 2Ev - fv$$

donne

$$[2]\ldots R_3\delta s = A'\left\{\left(\frac{3}{16}m+\frac{35}{16}m^2\right)\sin fv + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}m\right)\sin 2Ev - fv - \frac{1}{2}\sin 2Ev + fv\right\};$$

et celui de

$$R_1 = \frac{3}{2}\sin 2Ev \text{ par } -\frac{d.\delta s}{dv} = A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m\right)\cos fv + A'\left(\frac{1}{4}m - \frac{1}{4}m^2\right)\cos 2Ev - fv,$$

donne

$$[3]\ldots -R_1\frac{d.\delta s}{dv} = A'\left\{\left(\frac{3}{16}m - \frac{3}{16}m^2\right)\sin fv + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}m\right)\sin 2Ev - fv + \frac{1}{2}\sin 2Ev + fv\right\}.$$

En multipliant

$$-\int R_1 dv = \frac{3}{4}\cos 2Ev \text{ par } \frac{d^2.\delta s}{dv^2} + \delta s = -A'm^2\sin 2Ev - fv, \text{ on obtient};$$

$$[4]\ \ldots\ldots -2\left(\frac{d^2.\delta s}{dv^2}+\delta s\right)\int R_1 dv = \frac{3}{4}A'm^2\sin fv.$$

Maintenant, si l'on prend

$$R_2 - \frac{3}{2} = 3e^2 + \frac{9}{4}e'^2 - 6e\cos cv + \frac{15}{2}e^2\cos 2cv + \frac{3}{2}\gamma^2\cos 2gv - 6.\delta u;$$

$$\delta u = \frac{A'\gamma}{3}\left\{\cos gv + fv - \cos gv - fv\right\};$$

$$\delta s = -\frac{2}{3}A'\sin fv;$$

on aura

$$-6.s_1.\delta u = A'\gamma^2 \left\{ 2.\sin fv + \sin 2gv - fv \right\};$$

$$\delta s\left(\frac{15}{2}e^2\cos 2cv + \frac{3}{2}\gamma^2\cos 2gv\right) = A'\left(\frac{\gamma^2}{2}\sin 2gv - fv + \frac{5}{2}e^2\sin 2cv - fv\right);$$

et par conséquent

$$[5] \ldots \left(R_2 - \frac{3}{2}\right)\left(s_1 + \delta s\right) =$$

$$A'\left\{\left(2\gamma^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}\varepsilon'^2\right)\sin fv + \frac{3}{2}\gamma^2\sin 2gv - fv + \frac{5}{2}e^2\sin 2cv - fv\right\}.$$

En réunissant les termes compris dans la fonction

$$m^2\left\{[1]+[2]+[3]+[4]+[5]\right\}$$

on aura

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2}m^2\right)\delta s =$$

$$\sin fv \quad A'\left\{\begin{array}{l} m^2 + \left(\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}\right)m^3 + \left(\frac{35}{16}-\frac{3}{16}+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}\right)m^4 - \frac{3}{2}m^2\varepsilon'^2 \\ + \left(2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\right)m^2\gamma^2 + \left(2-2=0\right)m^2e^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2gv - fv \quad A'\gamma^2\left\{-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\right\}m^2,$$

$$\sin 2cv - fv \quad Ae^2\left(\frac{5}{2}m^2\right)$$

$$\sin 2Ev - fv \quad A'\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\right)m^2 + \left(\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}\right)m^3\right\}.$$

En intégrant cette équation, et rejetant toutes les quantités qui passent le second ordre, il viendra

$$\delta s = \sin fv \quad A'\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}m - \frac{11}{6}m^2 + \varepsilon'^2 - \frac{1}{3}\gamma^2 + 0.e^2\right)$$

$$\sin 2gv - fv \quad A'\gamma^2\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\sin 2cv - fv \quad A'e^2\left(-\frac{5}{9}\right)$$

$$\sin 2Ev - fv \quad A'\left(-\frac{1}{4}m - \frac{1}{4}m^2\right).$$

Cette valeur de δs est exacte jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement, en se rappellant, que nous avons, plus haut, fait la convention, d'estimer l'ordre de ces coefficiens, en supposant $A'=1$.

10. Cherchons maintenant les deux termes, de la forme

$$A'B\gamma.\cos gv-fv + A'B'e^2\gamma.\cos 2cv-gv-fv,$$

qui entrent dans l'expression de δu; de manière que, le coefficient B soit exact jusqu'aux quantités du second ordre, et le coefficient B' jusqu'aux quantités de l'ordre zéro, inclusivement.

Réduisons la fonction $-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T$, à

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T=\left(3+\frac{3}{2}m^2+3.e^2-\frac{3}{4}\gamma^2\right)s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2+\frac{15}{4}.\gamma^2\cos 2gv.s_1\delta s;$$

ce qui est facile, d'après la valeur de δT donnée dans la page 275 et en observant qu'il suffit de faire $\frac{a}{a_1}=1+\frac{1}{2}m^2$; $q=1+e^2+\gamma^2$ (Voyez p. 278). Cela posé, il est d'abord clair qu'on a;

$$\frac{15}{4}\gamma^2\cos 2gv.s_1\delta s=\frac{5}{8}A'\gamma^3\cos gv-fv,$$

$$s_1\delta s=A'\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m-\frac{11}{12}m^2+\frac{1}{2}\varepsilon'^2-\frac{1}{3}\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv-\frac{5}{18}A'e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv;$$

et par conséquent

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T=\frac{3}{2}(\delta s)^2-\frac{5}{6}A'e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv$$
$$+A'\left(-1-\frac{3}{8}m-\frac{13}{4}m^2+\frac{3}{2}\varepsilon'^2-e^2-\frac{1}{8}\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv.$$

Pour avoir les termes donnés par le carré de δs, remarquons, que, en vertu de l'action du Soleil et de la figure elliptique de la Terre, on a

$$\delta s=-A'\left\{\frac{2}{3}\sin fv+\frac{1}{4}m\sin 2Ev-fv\right\}-\frac{5}{8}e^2\gamma\sin gv-2cv+\frac{3}{8}m\gamma\sin 2Ev-gv;$$

et que de là on tire

$$\frac{3}{2}(\delta s)^2 = -A'\left\{\frac{9}{64}m^2\gamma.\cos gv-fv+\frac{5}{8}e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv\right\}.$$

De sorte que, nous avons

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = A'\left(-1-\frac{3}{8}m-\frac{217}{64}m^2+\frac{3}{2}\varepsilon'^2-e^2-\frac{1}{8}\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv$$
$$-A'\frac{35}{24}e^2\gamma.\cos 2cv-gv-fv.$$

La fonction R_5 donne le terme

$$R_5 = 4A'q.s.(au)^3\sin fv = 2A'\gamma\cos gv-fv.$$

Reprenons maintenant la fonction $R_1 = \frac{A'qs.au.\cos fv}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}$, et remarquons, que la substitution de $s_1+\delta s$ au lieu de s, donne

$$s.\cos fv = \frac{1}{2}\gamma\sin gv-fv+\frac{1}{2}\gamma\sin gv+fv+\frac{5}{16}e^2\gamma\sin 2cv-gv-fv.$$

Mais $\frac{qau}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}} = 1+2e^2+e\cos cv+\gamma^2\cos 2gv$; partant

$$R_1 = A'\left(\frac{1}{2}+e^2-\frac{1}{4}\gamma^2\right)\gamma\sin gv-fv+\frac{5}{16}A'e^2\gamma.\sin 2cv-gv-fv;$$

$$-\int R_1 dv = \frac{A'\left(\frac{1}{2}+e^2-\frac{1}{4}\gamma^2\right)}{g-1}.\gamma\cos gv-fv+\frac{5}{16}.\frac{A'e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv}{2c-g-1}.$$

Notre expression analytique de g (Voyez p. 36 du second Vol.) donne

$$(g-1)^{-1} = \frac{4}{3m^2}\left(1-\frac{3}{8}m-\frac{91}{32}m^2+2.e^2+\frac{3}{2}\varepsilon'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)^{-1} = \frac{4}{3m^2}\left(1+\frac{3}{8}m+\frac{191}{64}m^2-2.e^2-\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{1}{2}\gamma^2\right);$$

et il est clair qu'il suffit ici de prendre $2c-g-1 = -\frac{9}{4}m^2$. Donc on a;

$$-m^2\int R_1 dv = A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m+\frac{191}{96}m^2-\varepsilon'^2+0.e^2+0.\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv$$
$$-A'\frac{5}{36}e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv.$$

En multipliant cette expression par $2q\left(1-\frac{3}{4}\gamma^2\right)= 2\left(1+e^2+\frac{1}{4}\gamma^2\right)$, on aura

$$-2q\left(1-\frac{3}{4}\gamma^2\right)m^2\int R_1 dv = \cos gv-fv\ A'\gamma\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}m+\frac{191}{48}m^2-2.\varepsilon'^2+\frac{4}{3}e^2+\frac{1}{3}\gamma^2\right)$$
$$+\cos 2cv-gv-fv\ A'e^2\gamma\left(-\frac{5}{18}\right).$$

La réunion des trois fonctions que nous venons de développer, donne

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T+m^2R_5-2q\left(1-\frac{3}{4}\gamma^2\right)m^2\int R_1 dv=$$
$$A'\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}m+\frac{497}{192}m^2-\frac{\varepsilon'^2}{2}+\frac{1}{3}e^2+\frac{5}{24}\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv-\frac{125}{72}A'e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv.$$

11. Pour calculer les termes, qui, par l'effet de la réaction sont donnés par la fonction $\delta R'$, la valeur de δu trouvée dans la page 372 ne suffit pas: il est nécessaire d'avoir les coefficiens des deux argumens $2Ev-gv+fv$, $2Ev+gv-fv$ exacts, jusqu'aux quantités du troisième ordre inclusivement. A cet effet, nous prendrons d'abord $\delta s=-A'\left(\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m^2\right)\sin 2Ev-fv$ (Voyez p. 375); et en multipliant par $3s_1=3\gamma\sin gv$;

$$3s_1\delta s= A'\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{8}m^2\right)\gamma\cos 2Ev+gv-fv.$$

Ensuite, nous prendrons

$$\delta s=-A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m\right)\sin fv+\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{32}m^2\right)\gamma\sin 2Ev-gv,$$

pour en tirer, $(\delta s)^2= A'\left(\frac{1}{4}m+\frac{5}{32}m^2\right)\gamma\cos 2Ev-gv+fv.$

Il suit de là, que

$$3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2= A'\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{8}m^2\right)\gamma\cos 2Ev+gv-fv$$
$$+A'\left(\frac{3}{8}m+\frac{15}{64}m^2\right)\gamma\cos 2Ev-gv+fv.$$

En prenant $\delta u = -\frac{A'}{3}\gamma \cos gv - fv$, l'on obtient;

$$\delta R' = -6 \sin 2Ev . \delta u = A'\gamma \left\{ \sin 2Ev + gv - fv + \sin 2Ev - gv + fv \right\};$$

$$\delta R^{v} = -\frac{9}{2} \cos 2Ev . \delta u = \frac{3}{4} A'\gamma \left\{ \cos 2Ev + gv - fv + \cos 2Ev - gv + fv \right\};$$

$$-\int \delta R' . dv = \frac{A'\gamma}{2} \left\{ \cos 2Ev + gv - fv + \cos 2Ev - gv + fv \right\}.$$

Maintenant, si l'on fait le produit des deux fonctions

$$-\int R_{,} dv = \frac{3}{4} \cos 2Ev + \frac{2}{3} A' m^{-1} . \gamma \cos gv - fv;$$

$$\frac{d^2 . \delta u}{d v^2} + \delta u = -3 m^2 \cos 2Ev - \frac{A'}{3} \gamma \cos gv - fv,$$

on aura

$$-2 \left(\frac{d^2 . \delta u}{dv^2} + \delta u \right) \int R_{,} dv = -\frac{9}{4} A' \gamma \left\{ \cos 2Ev + gv - fv + \cos 2Ev - gv + fv \right\}.$$

Cela posé il est facile de former cette équation différentielle en δu; savoir

$$-\frac{d^2 . \delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2} m^2 \right) \delta u =$$

$$\cos 2Ev + gv - fv \quad A'\gamma \left\{ \frac{3}{8} m + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + 1 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{8} \right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev - gv + fv \quad A'\gamma \left\{ \frac{3}{8} m + \left(\frac{15}{64} + \frac{3}{4} + 1 - \frac{9}{4} = -\frac{17}{64} \right) m^2 \right\};$$

laquelle étant intégrée donne

$$\delta u = A' \left(\frac{1}{8} m + \frac{7}{24} m^2 \right) \gamma \cos 2Ev + gv - fv + A' \left(\frac{1}{8} m + \frac{47}{192} m^2 \right) \gamma \cos 2Ev - gv + fv,$$

lorsqu'on néglige les quantités d'un ordre supérieur au troisième.

12. D'après cette expression de δu, il est clair qu'on a;

$$\delta R' = -6 \sin 2Ev . \delta u = A' \left\{ \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 0 \right) m + \left(\frac{7}{8} - \frac{47}{64} = \frac{9}{64} \right) m^2 \right\} \gamma \sin gv - fv.$$

La partie de cette fonction qui serait donnée par le carré de δu se réduit à zéro. En effet ; l'équation

$$\delta u = m^2 \cos 2Ev - \frac{A'\gamma}{3} \cos gv - fv \ ,$$

donne

$$(\delta u)^2 = -\frac{A'm^2\gamma}{3}\left\{\cos 2Ev + gv - fv + \cos 2Ev - gv + fv\right\} \ ;$$

et par conséquent

$$15 . \sin 2Ev . (\delta u)^2 = m^2 A'\gamma \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0\right) \sin gv - fv.$$

On verra plus bas (N.° 16) que le terme donné par la fonction $-3m\delta nt . \cos 2Ev$ se réduit aussi à zéro. Ainsi la réaction donne le seul terme

$$-2m^2 \int \delta R' dv = 2 . \frac{9}{64} A' . \frac{m^4 \gamma \cos gv - fv}{g-1} = \frac{3}{8} A' m^2 \gamma \cos gv - fv.$$

En le réunissant aux deux autres posés à la fin du n.° 10 on aura l'équation

$$-\frac{d^2 . \delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2} m^2\right) \delta u =$$

$$A'\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{8} m + \frac{569}{192} m^2 - \frac{\varepsilon'^2}{2} + \frac{1}{3} e^2 + \frac{5}{24} \gamma^2\right\} \gamma \cos gv - fv - \frac{125}{72} A e^2 \gamma \cos 2cv - gv - fv ;$$

de laquelle on tire, en intégrant ;

$$\delta u = A'\left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{8} m - \left(\frac{569}{192} + \frac{1}{2} = \frac{665}{192}\right) m^2 + \frac{\varepsilon'^2}{2} - \frac{1}{3} e^2 - \frac{5}{24} \gamma^2\right\} \gamma \cos gv - fv$$
$$+ \frac{125}{72} A' e^2 \gamma \cos 2cv - gv - fv.$$

En réunissant les termes des deux fonctions $-m^2 \int R_1 dv$, δu développés jusqu'ici , nous aurons ;

$$-m^2\int R_1 dv = \quad A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m+\frac{209}{96}m^2-\varepsilon'^2+0.e^2+0.\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv$$

$$+A'\frac{5}{36}e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv+A'm\gamma\cos 2Ev-gv-fv$$

$$+\frac{A'm^2e\gamma}{4}\left\{\cos gv+cv-fv-\cos gv-cv-fv+\cos gv-cv+fv\right\}$$

$$+\frac{A'm^2\gamma}{2}\left\{\cos 2Ev+gv-fv+\cos 2Ev-gv+fv\right\};$$

$$\delta u = \quad A'\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m-\frac{665}{192}m^2+\frac{\varepsilon'^2}{2}-\frac{1}{3}e^2-\frac{5}{24}\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv$$

$$+A'\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}m\right)\gamma\cos gv+fv-\frac{A'}{3}e\gamma\cos gv+cv-fv$$

$$+A'.\frac{13}{9}.e\gamma\cos gv-cv+fv+\frac{125}{72}.A'e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv$$

$$+A'm\gamma\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}\cos 2Ev-gv-fv+\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{24}m\right)\cos 2Ev+gv-fv\\ +\left(\frac{1}{8}+\frac{47}{192}m\right)\cos 2Ev-gv+fv\end{array}\right\}$$

Cela posé, si l'on forme la fonction $-2\delta u+m^2\int R_1 dv$, et que l'on ait seulement égard à l'argument $gv-fv$, on aura

$$-2\delta u+m^2\int R_1 dv = A'\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\right)m\\ +\left(\frac{665}{96}-\frac{209}{96}=\frac{19}{4}\right)m^2\\ +\left(1-1=0\right)\varepsilon'^2+\frac{2}{3}e^2+\frac{5}{12}\gamma^2\end{array}\right\}\gamma\cos gv-fv.$$

Cependant, on ne saurait considérer ce coefficient comme exact relativement à la fonction $\frac{d.\delta nt}{dv}$. Cette dernière renferme d'autres termes multipliés par $e^2\gamma$ et γ^3 qui détruisent la partie $A'\left(\frac{2}{3}e^2\gamma+\frac{5}{12}\gamma^3\right)$. Nous allons démontrer cette destruction, et former en même temps une valeur de δnt qu'on puisse considérer comme mathématiquement exacte jusqu'aux quantités du premier ordre inclusivement.

13. Nous avons (Voyez p. 308)

$$\frac{\delta u}{u_1} = \delta u \left\{ 1 - \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 - e\cos cv + \frac{1}{2}e^2\cos 2cv + \frac{1}{4}\gamma^2\cos 2gv \right\}.$$

D'après la valeur de δu posée dans la page 372, on obtient;

$$-e\cos cv.\delta u = \quad A'e^2\gamma\left\{\frac{1}{6}\cos gv - fv - \frac{13}{18}\cos 2cv - gv - fv\right\}$$

$$+\frac{1}{6}A'e\gamma\left\{\cos gv + cv - fv + \cos gv - cv - fv - \cos gv - cv + fv\right\};$$

$$\frac{1}{2}e^2\cos 2cv.\delta u = \frac{1}{12}A'e^2\gamma\cos 2cv - gv - fv;$$

$$\frac{1}{4}\gamma^2\cos 2gv.\delta u = \frac{1}{24}A'\gamma^3\cos gv - fv;$$

$$-\left(\frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2\right)\delta u = \quad A'\left(\frac{\gamma^2}{12} + \frac{e^2}{6}\right)\gamma\cos gv - fv;$$

$$\frac{\delta u}{u_1} =$$

$$A'\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{3} - \frac{1}{8}m - \frac{665}{192}m^2 + \frac{1}{2}\varepsilon'^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 0\right)e^2 \\ + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \frac{5}{24} = -\frac{1}{12}\right)\gamma^2 \end{matrix}\right\}\gamma\cos gv - fv$$

$$+\frac{A'}{3}\gamma\cos gv + fv + A'\left(\frac{1}{12} - \frac{13}{18} + \frac{125}{72} = \frac{79}{72}\right)e^2\gamma\cos 2cv - gv - fv$$

$$+A'e\gamma\left\{\frac{1}{6}\cos gv - cv - fv - \frac{1}{6}\cos gv + cv - fv + \left(\frac{13}{9} - \frac{1}{6} = \frac{23}{18}\right)\cos gv - cv + fv\right\}$$

$$-\frac{A'm\gamma}{4}\cos 2Ev - gv - fv.$$

Maintenant, si l'on fait la somme $-2\frac{\delta u}{u_1} + m^2\int R_1 dv = -Y$, on aura

$$-Y = \quad A'\left(0.m^0 + 0.m + \frac{19}{4}m^2 + 0.\varepsilon'^2 + 0.e^2 + \frac{1}{6}\gamma^2\right)\gamma\cos gv - fv$$

$$-\frac{2}{3}A'\gamma\cos gv + fv - A'\left(\frac{79}{36} - \frac{5}{36} = \frac{37}{18}\right)e^2\gamma\cos 2cv - gv - fv$$

$$+Ae\gamma\left\{\frac{1}{3}\cos gv + cv - fv - \frac{1}{3}\cos gv - cv - fv - \frac{23}{9}\cos gv - cv + fv\right\}$$

$$+A'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\right)m\gamma\cos 2Ev - gv - fv.$$

En multipliant cette fonction par (Voyez p. 313)

$$-\left(1-\frac{X}{\lambda}\right)=-2\,e\cos cv+\frac{3}{2}e^2\cos 2cv+\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2gv$$

on a les termes

$$\left(1-\frac{X}{\lambda}\right)Y=-\frac{A'}{3}e^2\gamma\cos gv-fv+\frac{A'}{3}e^2\gamma\cos gv-fv$$

$$+A'\left(\frac{23}{9}-\frac{1}{2}\right)e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv-\frac{1}{6}A'\gamma^3\cos gv-fv;$$

lesquels étant réunis avec la valeur précédente de $-Y$ donnent, en conservant seulement les termes affectés des argumens $gv-fv$, $gv+fv$; $2cv-gv-fv$;

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=$$

$$A'\left\{0.m^0+0.m+\frac{19}{4}m^2+0.\varepsilon'^2+0.e^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0\right)\gamma^2\right\}\gamma\cos gv-fv$$

$$-\frac{2}{3}A'\gamma\cos gv+fv+A'\left\{\frac{23}{9}-\frac{1}{2}-\frac{37}{18}=0\right\}e^2\gamma\cos 2cv-gv-fv\ ;$$

et par conséquent ;

$$\delta nt=\frac{A'.\frac{19}{4}.m^2}{g-1}.\gamma\sin gv-fv-\frac{2}{3}.\frac{A'\gamma\sin gv+fv}{g+1}.$$

Et comme il suffit ici de prendre $g-1=\frac{3}{4}m^2$; $g+1=2$ il est clair qu'on a ;

$$\delta nt=\frac{19}{3}A'.\gamma\sin gv-fv-\frac{1}{3}A'.\gamma\sin gv+fv.$$

Telle est la valeur mathématiquement exacte de δnt, lorsqu'on convient de négliger toutes les quantités d'un ordre supérieur au premier. Il est remarquable que ces deux termes, chacun du même ordre, aient deux coefficiens aussi différens dans leur grandeur absolue. Sans cette circonstance, qui tient uniquement aux coefficiens

numériques $\frac{19}{3}$ et $\frac{1}{3}$, il n'y aurait aucun motif pour regarder l'inégalité ayant pour argument $gv-fv$ comme moins importante que l'inégalité dont l'argument est $gv+fv$.

14. Pour nous assurer que le *second* terme, de la forme $\frac{A'Km^3\gamma}{g-1}$, qui affecte l'argument $gv-fv$ dans l'expression de δnt n'est pas fort considérable, nous allons entreprendre les développemens qui conduisent à la connoissance effective de ce second terme.

Cherchons d'abord les seuls termes du troisième ordre, qui se trouvent multipliés par m^3 dans l'expression de δs. Pour cela, il est permis de réduire l'expression de sR_3, posée dans le n.° 2, à celle-ci:

$$sR_3 = A'au.\sin fv = A'u_1\left(1+\frac{\delta u}{u_1}\right)\sin fv.$$

Donc, en prenant $\frac{\delta u}{u_1} = m^2 \cos 2Ev$ (ce qui suffit pour l'objet actuel) on aura ;

$$(a) \; .\;.\;.\;.\; sR_3 = A'\sin fv - \frac{A'}{2}m^2 \sin 2Ev - fv.$$

Pour abréger l'exposition de ce calcul, nous admettrons, que, par une opération préparatoire, uniquement relative à l'argument $2Ev-fv$, on a trouvé

$$\delta s = -A'\left(\frac{1}{4}m + \frac{1}{4}m^2 + \frac{7}{32}m^3\right)\sin 2Ev - fv.$$

D'après cela, si l'on prend $R_1 = \frac{3}{2}\sin 2Ev$;

$$-\frac{d.\delta s}{dv} = A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m+\frac{11}{6}m^2\right)\cos fv + A'\left(\frac{1}{4}m - \frac{1}{4}m^2 - \frac{9}{32}m^3\right)\cos 2Ev - fv,$$

on obtiendra, en faisant le produit ;

$$(b) \ldots -R_1\frac{d.\delta s}{dv} = A'\left(\frac{3}{16}m - \frac{3}{16}m^2 - \frac{27}{128}m^3\right)\sin fv + \frac{3}{16}A'm\sin 4Ev - fv$$
$$+ A'\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}m+\frac{11}{8}m^2\right)\sin 2Ev - fv + A'\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}m\right)\sin 2Ev + fv.$$

En multipliant $-\int R_1 dv = \left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}m\right)\cos 2Ev$ par

$$\frac{d^2.\delta s}{dv^2}+\delta s = A'\left\{-m^2+\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}=0\right)m^3\right\}\sin 2Ev-fv$$

on aura

$$(c) \; \ldots \; -2\left(\frac{d^2.\delta s}{dv^2}+\delta s\right)\int R_1 dv = A'\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3\right)\sin fv.$$

Les valeurs de $R_2-\frac{3}{2}$, R_3, dues à l'action du Soleil peuvent être réduites, dans le cas actuel, à celles-ci;

$$R_2-\frac{3}{2}=-6m^2.\cos 2Ev\,; \quad R_3=-3m^2-\frac{185}{16}m^3+\frac{3}{2}\cos 2Ev: \quad (*)$$

de sorte que, on a;

$$R_2+R_3-\frac{3}{2}=-\left(3.m^2+\frac{185}{16}m^3\right)\cos 0v+\left(\frac{3}{2}-6.m^2\right)\cos 2Ev.$$

Donc, en multipliant cette fonction par

$$\delta s=-A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m+\frac{11}{6}m^2\right)\sin fv - A'\left(\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m^2+\frac{7}{32}m^3\right)\sin 2Ev-fv$$

il viendra

$$(d) \; \ldots \; \left(R_2+R_3-\frac{3}{2}\right)\delta s=$$

$$\begin{array}{ll}
\sin fv & A'\left\{\frac{3}{16}m+\left(2+\frac{3}{16}=\frac{35}{16}\right)m^2+\left(\frac{203}{24}-\frac{75}{128}=\frac{3023}{384}\right)m^3\right\} \\
\sin 2Ev-fv & A'\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}m-\frac{5}{8}m^2\right) \\
\sin 2Ev+fv & A'\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{16}m\right) \\
\sin 4Ev-fv & A'\left(-\frac{3}{16}m\right).
\end{array}$$

(*) Pour connoître l'origine des termes $-3m^2-\left(\frac{19}{2}+\frac{33}{16}=\frac{185}{16}\right)m^3$, consultez les pages 229, 232 du second volume.

Cela posé, si l'on fait la réunion des termes compris dans les fonctions (a), (b), (c), (d) on formera l'équation

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s=$$

$$\sin fv.\ A'\left\{m^2+\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}\right)m^3+\left(\frac{35}{16}+\frac{3}{4}-\frac{3}{16}=\frac{11}{4}\right)m^4+\left(\frac{3023}{384}+\frac{3}{4}-\frac{27}{128}=\frac{1615}{192}\right)m^5\right\}$$

$$\sin 2Ev-fv\ \ A'\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\right)m^2+\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}\right)m^3+\left(\frac{11}{8}-\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\right)m^4\right\}$$

$$\sin 2Ev+fv\ \ A'\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\right)m^2+\left(\frac{3}{16}-\frac{3}{16}=0\right)m^3\right\}$$

$$\sin 4Ev-fv\ \ A'\left\{\frac{3}{16}-\frac{3}{16}=0\right\}m^3;$$

laquelle étant intégrée donne, en développant les diviseurs;

$$\delta s=\sin fv\qquad A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m-\frac{11}{6}m^2-\frac{1615}{288}m^3\right)$$

$$\sin 2Ev-fv\ \ A'\left(-\frac{1}{4}m-\frac{1}{4}m^2-\frac{7}{32}m^3\right).$$

15. Considérons de nouveau l'équation différentielle en δu, et cherchons le terme multiplié par $m^3\gamma$ qui appartient au coefficient de l'argument $gv-fv$. Pour cela, il est nécessaire d'avoir les termes correspondans des coefficiens des deux argumens $2Ev+gv-fv$, $2Ev-gv+fv$ appartenans à δu et $m\delta nt$. Voici ce calcul préliminaire.

L'expression de δs donne

$$3s_{,}\delta s=\cos 2Ev+gv-fv\ \ A'\gamma\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{8}m^2+\frac{21}{64}m^3\right).$$

Le carré des deux termes

$$\delta s=\sin fv\, A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m-\frac{11}{6}m^2\right)+\sin 2Ev-gv\ \ \gamma\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{32}m^2-\frac{273}{512}m^3\right)$$

donne

$$(\delta s)^2=\cos 2Ev-gv+fv\ \ A'\gamma\left(\frac{1}{4}m+\frac{5}{32}m^2+\frac{91}{256}m^3\right).$$

Ainsi nous avons, après avoir multiplié par $\frac{a}{a_1} = 1 + \frac{1}{2}m^2$;

$$(a') \; \ldots \; -q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = \left(1+\frac{1}{2}m^2\right)\left(3s_1\delta s + \frac{3}{2}(\delta s)^2\right) =$$

$$A'\left(\frac{3}{8}m + \frac{3}{8}m^2 + \frac{33}{64}m^3\right)\gamma \cos 2Ev + gv - fv$$
$$+ A'\left(\frac{3}{8}m + \frac{15}{64}m^2 + \frac{369}{512}m^3\right)\gamma \cos 2Ev - gv + fv.$$

L'expression de R_1 posée dans le n.° 2 donne;

$$R_1 = A'.\delta s.\cos fv = \frac{3}{16}A' m\gamma \sin 2Ev - gv + fv.$$

En réduisant l'expression de $\delta R'$ (Voyez p. 273) à

$$\delta R' = -6 \sin 2Ev.\delta u - 3\, m\, \delta nt.\cos 2Ev\,;$$

et prenant;

$$\delta u = -A'\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}m\right)\gamma \cos gv - fv\,; \qquad \delta nt = \frac{19}{3}A'\gamma \sin gv - fv\,,$$

on trouvera, que la réunion de ces deux parties de la fonction R_1, donne;

$$R_1 = A'\left(1 - \frac{73}{8}m\right)\gamma \sin 2Ev + gv - fv + A'\left(1+\frac{161}{16}m\right)\gamma \sin 2Ev - gv + fv.$$

En intégrant cette expression et développant les diviseurs on aura;

$$(b') \; \ldots \; -\int R_1 dv = A'\left(\frac{1}{2} - \frac{65}{16}m\right)\gamma \cos 2Ev + gv - fv$$
$$+ A'\left(\frac{1}{2} + \frac{177}{32}m\right)\gamma \cos 2Ev - gv + fv.$$

En ajoutant à cette intégrale les termes

$$A'\left(\frac{2}{3}.m^{-2} + \frac{1}{4}.m^{-1}\right)\gamma \cos gv - fv + \left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}m\right)\cos 2Ev$$

et faisant ensuite le produit par

$$\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u= A'\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m\right)\gamma \cos gv-fv-\left(3.m^2+\frac{3}{2}m^3\right)\cos 2Ev$$

on obtiendra ;

$$(c')\ldots -2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1\, dv= \quad A'\left(-\frac{9}{4}-\frac{67}{32}m\right)\gamma \cos 2Ev+gv-fv$$
$$+A'\left(-\frac{9}{4}-\frac{67}{32}m\right)\gamma \cos 2Ev-gv+fv.$$

On calcule de la même manière les deux termes donnés par la fonction R_5. En effet ; la valeur de R_5 du n.° 2 , donne

$$R_5= 4A'\delta s \sin fv=-\frac{3}{4}A' m\gamma \cos 2Ev-gv+fv.$$

En réduisant la valeur de δR^v posée dans la page 273 à

$$\delta R^v=-\frac{9}{2}\cos 2Ev.\delta u+3m\delta nt.\sin 2Ev$$

on aura , par la réunion de ces deux parties ,

$$(d')\ldots R_5=A'\left(\frac{3}{4}-\frac{195}{32}m\right)\gamma \cos 2Ev+gv-fv+A'\left(\frac{3}{4}+\frac{289}{32}m\right)\gamma \cos 2Ev-gv+fv.$$

Donc en faisant la somme des termes compris dans la fonction $m^2\{(a')+2.(b')+(c')+(d')\}$, on aura ;

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\cos 2Ev+gv-fv \quad A'\gamma\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{8}m+\left(\frac{3}{8}+1-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{8}\right)m^2\\ +\left(\frac{33}{64}-\frac{65}{8}-\frac{67}{32}-\frac{295}{32}=-\frac{1211}{64}\right)m^3\end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev-gv+fv \quad A'\gamma\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{8}m+\left(\frac{15}{64}+1-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{17}{64}\right)m^2\\ +\left(\frac{369}{512}+\frac{177}{16}-\frac{67}{32}+\frac{289}{32}=\frac{9585}{512}\right)m^3\end{array}\right\}$$

Si l'on remarque maintenant, que les facteurs propres à l'intégration de cette équation, sont

$$\left\{(2E+g-1)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1}= \frac{1}{3}\left(1+\frac{8}{3}m+\frac{77}{18}m^2\right),$$

$$\left\{(2E-g+1)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1}= \frac{1}{3}\left(1+\frac{8}{3}m+\frac{113}{18}m^2\right),$$

on trouvera ;

$$\delta u= \cos 2Ev+gv-fv A' \;\gamma\left(\frac{1}{8}m+\frac{7}{24}m^2-\frac{3389}{576}m^3\right)$$
$$\cos 2Ev-gv+fv A' \;\gamma\left(\frac{1}{8}m+\frac{47}{192}m^2+\frac{31283}{4608}m^3\right).$$

Pour avoir les termes correspondans qui entrent dans la fonction $(\delta u)^2$ on prendra

$$\delta u= A'\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m\right)\gamma \cos gv-fv+\left(m^2+\frac{19}{6}m^3\right)\cos 2Ev\;;$$

ce qui donne, en faisant le carré ;

$$(\delta u)^2=-A'\left(\frac{m^2}{3}+\frac{85}{36}m^3\right)\gamma \cos 2Ev+gv-fv-A'\left(\frac{m^2}{3}+\frac{85}{36}m^3\right)\gamma \cos 2Ev-gv+fv.$$

Il suit de là que (en excluant les termes multipliés par m^3)

$$A=2\,\delta u-3\,(\delta u)^2= \quad A'\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{m}{4}+\frac{19}{12}m^2\right)\cos 2Ev+gv-fv\\ +\left(\frac{m}{4}+\frac{143}{96}m^2\right)\cos 2Ev-gv+fv\end{array}\right\}.$$

En prenant $-m^2\int R_1\,dv=\frac{2}{3}A'\gamma \cos gv-fv+\frac{3}{4}m^2\cos 2Ev$, et faisant le carré on obtient ;

$$\frac{3}{2}m^4\left(\int R_1\,dv\right)^2=\frac{3}{4}A'm^2\gamma\left\{\cos 2Ev+gv-fv+\cos 2Ev-gv+fv\right\}.$$

D'après cette équation et celle désignée, plus haut, par (b') il est clair qu'on a ;

$$-B = -m^2\int R_1 dv - \frac{3}{2}m^4\left(\int R_1 dv\right)^2 = \cos 2Ev+gv-fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$\cos 2Ev-gv+fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{4}\right).$$

En faisant le produit des deux fonctions

$$A = \quad 2\delta u \quad = -\frac{2}{3}A'\gamma\cos gv-fv + 2m^2\cos 2Ev$$
$$B = m^2\int R_1 dv = -\frac{2}{3}A'\gamma\cos gv-fv - \frac{3}{4}m^2\cos 2Ev$$

on aura ;

$$-AB = \frac{5}{12}A'm^2\gamma\left\{\cos 2Ev+gv-fv + \cos 2Ev-gv+fv\right\}.$$

Donc

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = B - A - AB = \cos 2Ev+gv-fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{4}m - \frac{11}{12}m^2\right)$$
$$\cos 2Ev-gv+fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{4}m - \frac{79}{96}m^2\right);$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\delta nt = \sin 2Ev+gv-fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{8}m - \frac{7}{12}m^2\right)$$
$$\sin 2Ev-gv+fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{8}m - \frac{103}{192}m^2\right).$$

16. Revenons maintenant à l'équation différentielle en δu et occupons nous spécialement du terme de la forme $Km^3\gamma\cos gv-fv$.

L'expression de δs donne $3s_1\delta s = -\frac{1615}{192}A'm^3\gamma\cos gv-fv$. Et en faisant le carré des deux termes

$$\delta s = -A'\left(\frac{1}{4}m + \frac{1}{4}m^2\right)\sin 2Ev-fv + \left(\frac{3}{8}m + \frac{3}{32}m^2\right)\gamma\sin 2Ev-gv$$

on obtient ; $(\delta s)^2 = -\frac{15}{128}A'm^3\gamma\cos gv-fv$. Il suit de là que,

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = \left(1+\frac{1}{2}m^2\right)\left(3s_1\delta s + \frac{3}{2}(\delta s)^2\right) = -A'\left(\frac{45}{256} + \frac{1615}{192} + \frac{3}{16} = \frac{6739}{768}\right)\gamma\cos gv-fv.$$

Parmi les termes renfermés dans la valeur de $\delta R'$ posée dans la page 273 nous retiendrons ceux-ci ;

$$\delta R' = -6 \sin 2Ev.\delta u + 15.\sin 2Ev.(\delta u)^2 - 3 m\delta nt.\cos 2Ev + 12.m\delta nt.\delta u.\cos 2Ev.$$

L'expression de δu trouvée dans le n.° précédent, donne

$$-6 \sin 2Ev.\delta u = \sin gv - fv.\ A'\gamma \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 0\right) m + \left(\frac{7}{8} - \frac{47}{64} = \frac{9}{64}\right) m^2 \\ - \left(\frac{3389}{192} + \frac{31283}{1536} = \frac{19465}{512}\right) m^3 \end{array} \right\}.$$

En multipliant par $15.\sin 2Ev$ les deux termes de $(\delta u)^2$ posés plus haut, il est évident, que le coefficient de $\cos gv - fv$, qui en résulte est égal à zéro.

Pour former la valeur du produit $12.m\delta nt.\delta u \cos 2Ev$ qui convient à l'objet actuel, il suffit de prendre

$$2 \cos 2Ev.\delta u = m^2 - \frac{1}{3} A'\gamma \left\{ \cos 2Ev + gv - fv + \cos 2Ev - gv + fv \right\},$$

$$m\delta nt = -\frac{11}{8} m^3 \sin 2Ev + \frac{19}{3} A' m\gamma \sin gv - fv;$$

et de là on conclut

$$12.m\delta nt.\delta u.\cos 2Ev = 38.A' m^3 \gamma \sin gv - fv.$$

En multipliant par $-3m \cos 2Ev$ les deux termes de δnt trouvés à la fin du n.° précédent, on obtient ;

$$-3m\delta nt.\cos 2Ev = A' \left\{ \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0\right) m^2 + \left(\frac{7}{8} - \frac{103}{128} = \frac{9}{128}\right) m^3 \right\} \gamma \sin gv - fv.$$

On voit par là, que le terme multiplié par $m^2\gamma$ est nul dans ce produit, ainsi que nous l'avons annoncé dans la page 381.

Les quatre parties de $\delta R'$ donnent, d'après cela ;

$$\delta R' = A'\left\{0.m + \frac{9}{64}m^2 + \left(\frac{9}{128} + 38 - \frac{19465}{512} = \frac{27}{512}\right)m^3\right\}\gamma \sin \overline{gv - fv}.$$

Réduisons la valeur de R_1 posée dans le n.° 2, à

$$R_1 = \frac{A'\gamma}{2}.\sin \overline{gv - fv} + A'.\delta u.\delta s.\cos fv.$$

Actuellement, si l'on fait ici; $\delta s = \frac{3}{8} m\gamma \sin \overline{2Ev - gv}$, $\delta u = m^2 \cos 2Ev$, on aura

$$R_1 = A'\left\{\frac{1}{2} - \frac{3}{32}m^3\right\}\gamma \sin \overline{gv - fv}.$$

Donc en réunissant ce terme avec le précédent de $\delta R'$, il viendra, pour la valeur compléte de R_1;

$$R_1 = A'\left\{\frac{1}{2} + \frac{9}{64}m^2 - \frac{21}{512}m^3\right\}\gamma \sin \overline{gv - fv}.$$

En intégrant ce terme, et remarquant, que l'expression analytique de g trouvée dans la page 183 du second volume, donne;

$$(g-1)^{-1} = \frac{4}{3m^2}\left(1 + \frac{3}{8}m + \frac{191}{64}m^2 + \frac{6577}{768}m^3\right)$$

on aura

$$-B = -m^2\int R_1 dv = A'\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}m + \frac{209}{96}m^2 + \left(\frac{9}{128} - \frac{7}{128} + \frac{6577}{1152} = \frac{6595}{1152}\right)m^3\right\}\gamma \cos \overline{gv - fv}.$$

En multipliant $R_1 = \frac{3}{2}\sin 2Ev$ par

$$-\frac{d.\delta u}{dv} = \frac{A'm\gamma}{4}\left\{\sin \overline{2Ev + gv - fv} + \sin \overline{2Ev - gv + fv}\right\},$$

on obtient, $\quad -R_1\frac{d.\delta u}{dv} = \frac{3}{8}A' m\gamma \cos \overline{gv - fv}$:

Et en multipliant $-\int R_1 dv = \frac{3}{4}\cos 2Ev$ par

$$\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u=-\frac{3}{8}A'm\gamma\left\{\cos 2Ev+gv-fv+\cos 2Ev-gv+fv\right\},$$

on aura

$$-2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1\,dv=-\frac{9}{16}.A'm\gamma\cos gv-fv.$$

Enfin la fonction δR^V donne le terme

$$\delta R^V=-\frac{9}{2}\cos 2Ev\times\delta u=-\frac{9}{16}A'm\gamma\cos gv-fv.$$

Cela posé, la réunion de ces différentes parties donnera l'équation

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$A'\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}m+\frac{569}{292}m^2+\left(-\frac{6739}{768}-\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{3}{8}+\frac{6595}{576}=\frac{4435}{2304}\right)m^3\right\}\gamma\cos gv-fv,$$

de laquelle on tire, en multipliant par $\left\{(g-1)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1}=-1-\frac{3}{2}m^2$;

$$\delta u=A'\left\{-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m-\frac{665}{192}m^2-\left(\frac{4435}{2304}+\frac{3}{16}=\frac{4867}{2304}\right)m^3\right\}\gamma\cos gv-fv.$$

En faisant le carré de

$$\delta u=m^2\cos 2Ev+\frac{A'm\gamma}{8}\left\{\cos 2Ev+gv-fv+\cos 2Ev-gv+fv\right\}$$

on obtient le terme, $(\delta u)^2=\frac{A'm^3}{4}\gamma\cos gv-fv$; partant on a;

$$A=2\delta u-3(\delta u)^2=A'\left\{-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m-\frac{665}{96}m^2-\left(\frac{4867}{1152}+\frac{3}{4}=\frac{5731}{1152}\right)m^3\right\}\gamma\cos gv-fv.$$

En multipliant $m^2\int R_1\,dv=-\frac{3}{4}m^2\cos 2Ev$ par

$$2\,\delta u=\frac{A'm\gamma}{4}\left\{\cos 2Ev+gv-fv+\cos 2Ev-gv+fv\right\},$$

on a le terme $AB = -\frac{3}{16} A' m^3 \gamma \cos gv - fv$. Donc en réunissant les termes précédens on aura

$$\frac{d.\delta nt}{dt} = -Y = -(A - B + AB) =$$

$$\cos gv - fv \; A'\gamma \left\{ 0.m^0 + 0.m + \frac{19}{4} m^2 + \left(\frac{3}{16} + \frac{5731}{1152} - \frac{6595}{1152} = -\frac{9}{16} \right) m^3 \right\};$$

d'où l'on tire en intégrant ;

$$\delta nt = \frac{A'\left(\frac{19}{4} m^2 - \frac{9}{16} m^3\right)}{g - 1} \gamma \sin gv - fv \; ;$$

ou bien , en faisant $(g - 1)^{-1} = \frac{4}{3m^2}\left(1 + \frac{3}{8} m\right)$;

$$\delta nt = A' \left\{ \frac{19}{3} + \left(\frac{19}{8} - \frac{3}{4} = \frac{13}{8} \right) m \right\} \gamma \sin gv - fv.$$

Tel est le résultat (annoncé dans la page 189) qu'il s'agissait de trouver. On voit par cette analyse qu'il exige , comme auxiliaires , la considération des termes affectés des argumens $2Ev + gv - fv$, $2Ev - gv + fv$; et que les coefficiens qui les multiplient, dans δu et δnt, sont précisément ceux employés par anticipation dans la page 156.

17. L'expression précédente de δnt devient en y remplacant A' par sa valeur (Voyez p. 363 , 365), et faisant $\frac{a}{a_1} = 1$, $\mu^2 = m^2$;

$$\delta nt = \frac{\left(\frac{D}{a}\right)^2 (K_{(2)} - \Psi) \left(\frac{19}{2} - \frac{9}{8} m \right) \sin \omega . \cos \omega}{g - 1} . \gamma \sin gv - fv.$$

Ainsi , il n'est pas vrai , que le *second* terme du facteur $\frac{19}{2} - \frac{9}{8} m$ soit *nul* , comme on serait tenté de le croire , d'après la conclusion que *Laplace* tire de son analyse exposée dans le Vol. *de la Con.^e des Tems* pour l'année 1824 (Voyez p. 304). Il est vrai que , depuis, il a Lui-même changé d'avis sur ce point: car, conformément

au résultat qu'il a publié dans le Livre XVI de sa Mécanique Céleste (Voyez p. 400 du 5.ième Volume), on devrait avoir $\frac{19}{2}+\frac{3}{8}m$, au lieu de $\frac{19}{2}-\frac{9}{8}m=\frac{19}{2}+\left(\frac{3}{8}+\frac{5731}{576}-\frac{6595}{576}\right)m$, comme nous venons de le trouver. De sorte que, *Laplace*, ne trouve pas, par son analyse, les deux parties $\frac{5731}{576}-\frac{6595}{576}=-\frac{3}{2}$, dont le calcul est assez compliqué ainsi qu'on vient de le voir.

Pour confirmer, à l'aide des calculs précédens, ce que j'ai déjà dit sur ce point dans les pages 157 et 188 remarquons d'abord que, d'après nos dénominations la lettre k' de *Laplace* (Voyez p. 397 du 6.ième Vol. de la Mécanique Céleste) est égale à $-\frac{m^2A'}{2}$. Ainsi, la valeur de R qu'il pose dans la page 395 revient à celle-ci;

$$R=-\frac{m^2}{4}r^2\left\{1-3s^2+3(1-s^2)\cos(2v-2v')\right\}+\frac{m^2A'}{2}\gamma\cos gv-fv;$$

et comme $r^2=\frac{1+s^2}{u^2}$, il est clair qu'on a;

$$(L)\;\ldots\; R=-\frac{m^2}{4.u^2}\left\{1-2s^2+3\cos(2v-2v')\right\}+\frac{m^2A'}{2}\gamma\cos gv-fv.$$

Maintenant, si l'on change dans cette expression; u en $1+\delta u$, et s en $s_1+\delta s$, on aura, après avoir fait $2v-2v'=2v-2mv=2Ev$;

$$R+\delta R=\frac{m^2}{2}\delta u(1+3\cos 2Ev)+\frac{m^2}{3}\left\{3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2\right\}+\frac{m^2A'}{2}\gamma\cos gv-fv;$$

où les deux premiers termes répondent à la quantité que *Laplace* représente par $\delta.r^2Q'$. Or nous avons

$$\frac{m^2}{2}\delta u=\frac{m^2A'}{2}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m\right)\gamma\cos gv-fv \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Voyez p. 382)};$$

$$\frac{3}{4}m^2\delta u.2\cos 2Ev=\frac{3}{4}m^3A'\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\right)\gamma\cos gv-fv \;\ldots\; \text{(Voyez p. 390)};$$

$$\frac{m^2}{3}\left\{3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2\right\}=\frac{m^2A'}{3}\left(-1-\frac{3}{8}m\right)\gamma\cos gv-fv \;\ldots\; \text{(Voyez p. 378)}.$$

Donc, il est manifeste, que la réunion de ces parties donne l'équation identique

$$R+\delta R = m^2 A' \left\{ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=0\right)+\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=0\right) m \right\} \gamma \cos g v - f v = 0,$$

immédiatement employée par *Laplace* pour former sa valeur de $2\delta . r\left(\frac{dR}{dr}\right)$. Mais cela ne prouve pas qu'on doive avoir aussi l'équation $\int d' R = 0$; $d' R$ indiquant la différentielle de la fonction R prise par rapport aux coordonnées de la Lune seulement. Car l'équation précédente désignée par (L) fait voir, que dR étant la différentielle complète de R, on a ;

$$d' R = dR + \frac{3}{2} m^2 \frac{dv' \sin(2v-2v')}{u^2};$$

et par conséquent

$$\int d' R = R + \frac{3}{2} m^2 \int dv' \frac{\sin(2v-2v')}{u^2}.$$

Or, il faut bien remarquer, que pour tirer de là le terme en question on doit changer, à la fois ; u en $1+\delta u$; s en $s_1+\delta s$; et v' en $mv+m\delta nt$. Le changement de v' en $mv+m\delta nt$ ne donnerait que des termes multipliés par m^4 dans l'expression de $R+\delta R$; et voilà pourquoi nous ne l'avons point considéré en formant l'expression précédente de $R+\delta R=0$. Mais il devient indispensable, lorsqu'on veut obtenir la valeur de l'intégrale

$$\int d' R = \frac{3}{2} m^2 \int m dv \left\{-2\delta u + 3(\delta u)^2\right\} \sin 2Ev$$
$$+\frac{3}{2} m^2 \int m dv . \frac{d.\delta nt}{dv} \sin 2Ev - \frac{3}{2} m^2 \int m dv . 2\, m\delta nt . \cos 2Ev,$$

en tenant compte de la totalité des termes qui demeurent multipliés par $A' m^3 \gamma \cos gv - fv$, après l'intégration. Alors cette valeur de $\int d' R$, donne, comme dans la page 156 ;

$$\int d'R = \frac{3}{2} m^3 A' \int m dv \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0 \right) m + \left(\frac{19}{24} - \frac{143}{192} + \frac{11}{24} - \frac{79}{192} = \frac{3}{32} \right) m^2 \right\} \gamma \sin gv - fv:$$

c'est-à-dire ;

$$-\int d'R = \frac{9}{64} \frac{m^5 . A' . \gamma \cos gv - fv}{g - 1} = \frac{3}{16} A' m^3 \gamma \cos gv - fv.$$

18. Le Mémoire sur les inégalités Lunaires dues à l'aplatissement de la Terre, que *Laplace* a publié dans le Vol. de la *Con.^e des Tems pour l'année* 1823 (Voyez pages 219-225) ayant un rapport plus direct avec la méthode exposée dans ce paragraphe, je vais entrer, à ce sujet, dans quelques détails. On verra, par des rapprochemens convenables, quelles sont les inexactitudes échappées à *Laplace*, et on jugera par-là combien elles sont difficiles à découvrir dans une théorie aussi compliquée dans ses effets qu'elle est simple dans sa cause.

Nous supposons que l'on a sous les yeux le Mémoire qu'on vient de citer, ainsi que la théorie de la Lune de *Laplace*. En admettant exact, pour un moment, le rapprochement des deux argumens $gv - \theta$, fv, par lequel *Laplace* parvient à trouver, d'un coup, le coefficient de ce dernier dans l'expression de la tangente de la latitude de la Lune, il ne suffit pas, de changer g en f dans le coefficient du terme multiplié par $\gamma \sin gv - \theta$, que l'on voit dans l'équation (L'') de la page 222 du Tome 3. de la Mécanique Céleste: il faut, en outre, modifier, conformément à ce changement, la valeur du coefficient $B_1^{(0)}$, donnée par l'équation qui se trouve au commencement de la page 225. En effet ; réduisons cette équation à celle-ci ;

$$0 = \left\{ 1 - (2 - 2m - g)^2 \right\} B_1^{(0)} - \frac{3}{4} m^2 \left\{ 1 + g - 2 B_1^{(0)} \right\} ;$$

ce qui est suffisant pour la discussion du terme multiplié par m^2. En y faisant $-\frac{3}{4} m^2 (1 + g) = -\frac{3}{2} m^2$, et $2 - 2m - g = 1 - 2m - \frac{3}{4} m^2$, on aura

$$B_1^{(0)} = \frac{3m}{8\left(1-\frac{1}{4}m\right)} = \frac{3}{8}m\left(1+\frac{1}{4}m\right).$$

Mais en faisant $g=f=1$; la même équation donnerait

$$B_1^{(0)} = \frac{3m}{8\left(1-\frac{5}{8}m\right)} = \frac{3}{8}m\left(1+\frac{5}{8}m\right).$$

Donc ces deux valeurs de $B_1^{(0)}$ ne sauraient coïncider jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement ; ce qui empêche que le coefficient de $H \sin fv$ soit égal à g^2-1, au-de-là des quantités du troisième ordre; et que l'on puisse en conséquence regarder comme exact jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement le coefficient H, que *Laplace* (suivant nos dénominations) détermine par cette équation (*Voyez p. 224 de la Con.^e des Tems pour* 1823)

$$H = -\frac{A'm^2\left(1+2.e^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)}{g^2-1}.$$

En développant la fraction $(g^2-1)^{-1}$, à l'aide de notre expression analytique de g^2-1, posée dans la page 194 du troisième Vol., on obtient

$$(g^2-1)^{-1} = \frac{2}{3m^2}\left(1+\frac{3}{8}m+\frac{167}{64}m^2-2.e^2-\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\overset{(*)}{\frac{6577}{768}}m^3\right);$$

partant on a ;

$$H = A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m-\frac{167}{96}m^2+\varepsilon'^2+0.e^2+0\,\gamma^2\right),$$

tandis que notre analyse a donné (Voyez p. 376) ;

$$H = A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m-\frac{11}{6}m^2+\varepsilon'^2+0.e^2-\frac{1}{3}\gamma^2\right).$$

(*) On aura besoin de ce terme ci-après.

Ainsi, la formule de *Laplace* est inexacte à l'égard des coefficiens numériques qui multiplient m^2 et γ^2. Relativement au coefficient de m^2, nous avons déjà indiqué plus haut la cause radicale de cette discordance ; mais afin d'en accroître le degré d'évidence, nous allons montrer qu'en introduisant dans la formule de *Laplace* la valeur convenable de $B_1^{(0)}$ l'on tombe sur notre résultat. En effet ; nommons $B_1'^{(0)}$ ce que devient $B_1^{(0)}$ par le changement de g en $f=1$: en comparant les deux valeurs de $B_1^{(0)}$ données plus haut, il est clair qu'on a ; $B_1'^{(0)} = B_1^{(0)} + \frac{9}{64}m^2$. Donc il faudra, au lieu de g^2-1, employer $g^2-1-\frac{3}{2}m^2 \times \frac{9}{64}m^2 = g^2-1-\frac{27}{128}m^4$. Or, il est évident que cela revient à multiplier par

$$\left(1-\frac{27.m^4}{128(g^2-1)}\right)^{-1} = \left(1-\frac{9}{64}m^2\right)^{-1} = 1+\frac{9}{64}m^2$$

le coefficient H de *Laplace* ; et alors le coefficient de m^2 devient $-\frac{167}{96}-\frac{2}{3}\times\frac{9}{64}=-\frac{11}{6}$; ce qui s'accorde avec notre résultat.

Pour rendre raison de la discordance à l'égard du coefficient numérique de γ^2, il faut, avant tout, observer : que, dans le rapprochement des deux argumens $gv-\theta$, fv, *Laplace* n'a pas remarqué, que le produit que nous désignons par

$$R_2.\gamma \sin gv = \frac{3}{2}q.\frac{(a'u')^3}{(au)^4}.\gamma \sin gv + \text{etc.}$$

(Voyez pages 266 et 276) donne naissance au terme

$$\frac{3}{2}\gamma^2 \cos 2gv \times \gamma \sin gv = -\frac{3}{4}\gamma^3 \sin gv$$

(Voyez p. 352), en vertu d'une combinaison qui donnerait, au lieu de l'argument gv, l'argument $2gv-fv$, lorsqu'on remplace s par $H \sin fv$. Ainsi, pour rendre ce rapprochement exact, il est nécessaire d'exclure ce terme, en prenant $g^2-1+\frac{3}{4}m^2\gamma^2$ au lieu de g^2-1.

Cette correction peut se faire aisément, en multipliant la valeur de H de *Laplace* par

$$\left(1+\frac{3m^2\gamma^2}{4(g^2-1)}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\right)^{-1} = 1-\frac{1}{2}\gamma^2\,;$$

ce qui la change en celle-ci :

$$H=-\frac{A'm^2(1+2.e^2-\gamma^2)}{g^2-1}.$$

Mais cela ne suffit pas : dans le calcul que *Laplace* expose dans la page 224 (*Con.e des Tems pour* 1823) il lui est échappé le terme $-A'\gamma^2.\sin f v$ donné par le produit des deux fonctions

$$\int R_1 dv \times 2P\gamma \sin gv$$

(Voyez p. 374): de sorte que on doit changer la valeur précédente de H en celle-ci ;

$$H=-\frac{A'm^2(1+2.e^2-\gamma^2+\gamma^2)}{g^2-1}.$$

Alors tout étant corrigé l'on obtient dans la valeur développée de H notre terme $-\frac{1}{3}A'\gamma^2$.

19. Dans cette discussion, les quantités prises en considération dans l'expression de g^2-1 n'ont jamais dépassé le quatrième ordre, et jusque là, ce que nous avons avancé à l'égard des termes du second ordre du coefficient H nous paraît démontré d'une manière incontestable. Mais, afin de prévenir les objections nous allons faire une réflexion sur la correction dont *Laplace* parle dans la page 224.

En diminuant, comme il le prescrit, g^2-1 de la quantité du cinquième ordre

$$\frac{(g^2-1)(g-1)(1-3m)}{2(1-m)}B_1^{(0)}$$

on aurait (abstraction faite des termes multipliés par e^2 ou par γ^2)

$$H = -\frac{A' m^2}{(g^2 - 1)\left\{1 - \frac{(g-1)(1-3m)}{2(1-m)} B_1^{(0)}\right\}}.$$

Or en prenant $g - 1 = \frac{3}{4} m^2$, $B_1^{(0)} = \frac{3}{8} m$, on a

$$\frac{(g-1)(1-3m)}{2(1-m)} B_1^{(0)} = \frac{9}{64} m^3,$$

lorsqu'on rejette toute quantité d'un ordre supérieur au troisième. Donc en remplacant le facteur $(g^2 - 1)^{-1}$ par son développement donné plus haut, il viendra

$$H = A'\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4} m - \frac{167}{96} m^2 - \frac{6577}{1152} m^3\right)\left(1 + \frac{9}{64} m^3\right);$$

ou bien

$$H = A'\left\{-\frac{2}{3} - \frac{1}{4} m - \frac{167}{96} m^2 - \left(\frac{6577}{1152} + \frac{3}{32} = \frac{6685}{1152}\right) m^3\right\}.$$

Nous avons trouvé dans la page 387 que le coefficient numérique de $-A' m^3$ doit être égal à $\frac{1615}{288}$. Sans doute la différence des deux nombres $\frac{6685}{1152}$, $\frac{1615}{288}$ n'est d'aucune importance dans la comparaison de la Théorie avec l'observation; mais elle décèle le vice de la considération par laquelle *Laplace* a obtenu la correction qui doit être appliquée à $g^2 - 1$.

20. Ces inexactitudes ont eu de l'influence sur l'expression du coefficient qui affecte l'argument $gv - fv$ dans la valeur de δu; mais il ne sera pas inutile de mettre en évidence en quoi consiste la discordance.

Laplace trouve (page 222)

$$\delta u = \left\{-\frac{2f(g+f) + \frac{3}{\bar{u} h^2}}{(g^2 - f^2)\left(1 - \frac{3}{2} m^2\right)} - 4\right\} \frac{\bar{u}^2}{h^2} \beta \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

Comme l'on a, $\bar{u}=\frac{1}{a}\left(1+e^2+\frac{1}{4}\gamma^2\right)$, $\frac{\bar{u}}{h^2}=\frac{1+2.e^2+\frac{5}{4}\gamma^2}{aa_1}$ et par conséquent $\frac{\bar{u}^2}{h^2}=\frac{1+3.e^2+\frac{3}{2}\gamma^2}{a^2a_1}$; nous en concluons que

$$h^2=a_1(1-e^2-\gamma^2)\,; \qquad \bar{u}h^2=\frac{a_1}{a}\left(1-\frac{3}{4}\gamma^2\right).$$

Donc l'expression précédente de δu (en y faisant $f=1$) peut être mise sous cette forme;

$$a\delta u=\left\{\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{a}{a_1}\left(1+\frac{3}{4}\gamma^2\right)-(g+1)}{(g^2-1)\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)}-2\right\}\frac{2a\beta}{a_1a^2}\left(1+3e^2+\frac{3}{2}\gamma^2\right)\gamma\cos(gv-fv-\theta).$$

Suivant nos dénominations; $2\frac{a}{a_1}\cdot\frac{\beta}{a^2}=m^2A'$, et $a\delta u$ tient la place de δu. Il suffit pour l'objet actuel de prendre;

$$\frac{a}{a_1}=1+\frac{1}{2}m^2\,; \quad g+1=2+\frac{3}{4}m^2\,;$$

ce qui donne

$$\frac{\frac{3}{2}\frac{a}{a_1}-g-1}{1-\frac{3}{2}m^2}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}m^2\,;$$

$$\delta u=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{15}{4}m^2+\frac{9}{8}\gamma^2\right\}\frac{m^2A'\left(1+3.e^2+\frac{3}{2}\gamma^2\right)}{g^2-1}.\gamma\cos gv-fv.$$

En substituant pour $(g^2-1)^{-1}$ sa valeur développée on trouvera que cette formule de *Laplace* revient à dire, que

$$\delta u=A'\left\{-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m-\frac{647}{192}m^2-\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{2}e'^2+\frac{1}{12}\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv.$$

Notre formule, posée dans la page 382, donne pour le terme correspondant;

$$\delta u = A'\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}m-\frac{665}{192}m^2-\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{2}\varepsilon'^2-\frac{15}{24}\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv.$$

Ainsi il est évident que la discordance tombe sur les coefficiens de m^2 et γ^2: ce qui devait être d'après les remarques faites précédemment.

Mais relativement au coefficient numérique de m^2, il est arrivé, que *Laplace* a commis une autre inexactitude qui a détruit, dans l'expression de δnt, l'effet de l'erreur que nous signalons ici. Voici comment.

Il doit être clair maintenant, que le terme

$$\frac{2\beta f\bar{u}(g+f)}{h^2(g^2-f)}\gamma\cos(gv-fv-\theta),$$

par lequel on voit exprimée dans la page 221 (*Con.^e des Tems* pour 1823) la valeur de l'intégrale $\frac{2}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}$, revient à dire (suivant nos dénominations) que *Laplace* a fait

$$m^2\int R'\,dv = -\frac{A'm^2\left(1+2.e^2+\frac{5}{4}\gamma^2\right)}{2(g-1)}.\gamma\cos gv-fv.$$

Donc en substituant pour $(g-1)^{-1}$ sa valeur développée, on a

$$m^2\int R'\,dv = A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m-\frac{191}{96}m^2+\varepsilon'^2+0.e^2-\frac{7}{6}\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv.$$

Mais nous avons trouvé (Voyez p. 382)

$$m^2\int(R'+\delta R')\,dv = A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m-\frac{209}{96}m^2+\varepsilon'^2+0.e^2+0.\gamma^2\right)\gamma\cos gv-fv,$$

où le nombre $\frac{209}{96}=\frac{191}{96}+\frac{3}{16}$ (Voyez p. 378 et 381). Ainsi, il est manifeste, que *Laplace* n'a pas eu égard au terme

$$m^2\int\delta R'.dv = \frac{3}{16}A'm^2\gamma\cos gv-fv,$$

produit par la réaction. Et voilà pourquoi la fonction $-2\delta u+m^2\int R'dv$ de *Laplace* donne le terme

$$A'\left(\frac{647}{96}-\frac{191}{96}=\frac{19}{4}\right)m^2.\gamma\cos gv-fv\,,$$

précisément égal à celui que nous avons trouvé dans la page 382 ; où le nombre $\frac{19}{4}$ résulte de la différence $\frac{665}{96}-\frac{209}{96}=\left(\frac{647}{96}+\frac{3}{16}\right)-\left(\frac{191}{96}+\frac{3}{16}\right)$. Ainsi la justesse des résultats n'est pas toujours une preuve de la justesse des raisonnemens parlesquels on les a trouvés.

C'est une chose digne de remarque, que *Laplace* ait ici oublié cette partie de l'effet dû à la réaction ; et qu'il ait par là commis une erreur analogue à celle qui lui faisait trouver, avant 1802, un coefficient fautif $\left(\frac{6}{4}\cdot\frac{A'm^2}{g-1}\right.$ au lieu de $\left.\frac{19}{4}\cdot\frac{A'm^2}{g-1}\right)$ dans son *premier* Mémoire sur cette même inégalité, publié dans le Vol. *de la Con.ce des Tems* pour l'an X de l'Ére de la République Française (Voyez la p. 365 de ce Volume et les pages 505, 506 du Volume suivant ; où *Laplace* corrige son premier résultat).

Calcul du coefficient de l'inégalité Lunaire, ayant pour argument $Ev+c'mv+fv-gv-cv$.

21. Parmi les inégalités qu'on peut tirer des trois fonctions R_1, sR_3, R_5, posées dans le n.° 2, celle-ci mérite une considération particulière, eu égard à la petitesse des quantités $(2-g)^2-1+\frac{3}{2}m^2$, $(2-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2$, $E+c'm+f-g-c$, qui, par la substitution des valeurs analytiques de g et c montent au troisième ordre. De sorte que cette inégalité acquerra, par la double intégration, un diviseur de l'ordre de m^6 dans l'expression de δnt. Mais cela ne suffit pas pour juger de sa grandeur: car, la composition même de l'argument démontre, que son coefficient doit être de la forme, $H.\frac{A'e\varepsilon'\gamma b^2m^2}{m^6}$; H désignant un coefficient censé numérique. Et comme on a $\frac{A'e\varepsilon'\gamma b^2m^2}{m^6}=0'',076$; on ne peut rien statuer de certain sans avoir une

connoissance au moins approchée du nombre représenté par la lettre H; quoiqu'on puisse, par induction, regarder comme très probable, que ce nombre ne saurait être assez grand pour rendre sensible son produit par 0″,076. Néanmoins, pour dissiper les doutes sur ce point, je vais exposer ici le calcul qui fournit, dans δnt, les termes, de la forme

$$\frac{A'ee'\gamma b^2}{2-g-c}\left\{H'+\frac{H''}{2-g-c}+\frac{H'''}{(2-g)^2-1+\frac{3}{2}m^2}+\frac{H^{IV}}{(2-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2}\right\},$$

du coefficient de cette inégalité. Il faut, pour cela, avoir dans δu les deux premiers termes du coefficient de l'inégalité ayant pour argument $gv+cv-fv$; et jusqu'ici, nous n'avons déterminé que le premier (Voyez p. 372). Mais il est facile de trouver le second: en voici le calcul.

22. Dans la page 368, il faut d'abord changer $R_2\delta s$ en

$$R_2\delta s=-6e\cos cv\times A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m\right)\sin fv=-A'\left(2+\frac{3}{4}m\right)e\sin cv-fv;$$

ce qui fournit l'équation

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s=-A'\left(\frac{5}{2}m^2+\frac{3}{4}m^3\right)e\sin cv-fv;$$

de laquelle on tire, $\delta s=A'\left(\frac{5}{2}m^2+\frac{3}{4}m^3\right)e\sin cv-fv$; et par conséquent:

$$3s_1\delta s=-A'\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{9}{8}m^3\right)e\gamma\cos gv+cv-fv.$$

Pour avoir le terme correspondant renfermé dans $(\delta s)^2$ on fera (Voyez p. 204 et 205 du second vol.)

$$\delta s=-A'\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}m\right)\sin fv-\frac{1}{4}mA'\sin 2Ev-fv$$
$$-e\gamma\left(m^2-\frac{3}{8}m^3\right)\sin gv+cv-3m^2e\gamma\sin 2Ev-gv-cv;$$

et de là on tirera;

$$(\delta s)^2 = \cos gv+cv-fv \;\; A'e\gamma\left\{\frac{2}{3}m^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\right)m^3\right\}.$$

Ainsi il est démontré qu'on a ;

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = 3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2 = A'\left\{-\frac{11}{4}m^2+\left(\frac{9}{8}-\frac{9}{8}=0\right)m^3\right\}e\gamma\cos gv+cv-fv.$$

Dans la page 370 on prendra

$$-\frac{2Q'q}{1+\gamma^2}e\cos cv = 2e\cos cv\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{225}{16}m^3\right);$$

ce qui donnera ;

$$\frac{2Q'q}{1+\gamma^2}e\cos cv.\int R_1 dv = A'\left\{1+\left(\frac{3}{8}+\frac{75}{8}=\frac{39}{4}\right)m\right\}e\gamma\cos gv+cv-fv;$$

et dans la page 371, on fera

$$\delta R^{IV}+\frac{3}{2}\delta u = 6e\cos cv\times A'\left(-\frac{1}{3}-\frac{m}{8}\right)\gamma\cos gv-fv = -A'\left(1+\frac{3}{8}m\right)e\gamma\cos gv+cv-fv.$$

Ensuite on prendra

$$\delta R' = (-6\sin 2Ev+12.e\sin 2Ev-cv)(1-e\cos cv)\delta u = 15.e\sin 2Ev-cv.\delta u;$$

ce qui donnera

$$\delta R' = 15.e\sin 2Ev-cv\times\frac{A'm\gamma}{8}\cos 2Ev+gv-fv = -\frac{15}{16}A'me\gamma\sin gv+cv-fv;$$

$$-\int\delta R'.dv = -\frac{15}{16}A'me\gamma.\cos gv+cv-fv.$$

Enfin, on prendra

$$\delta R^{V} = 9.e\cos 2Ev-cv.\delta u = \frac{9}{16}A'me\gamma\cos gv+cv-fv.$$

La réunion de ces parties fournit l'équation (Voyez aussi la page 372)

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\cos gv+cv-fv \quad A'e\gamma\left\{-\frac{1}{2}m^2+\left(\frac{9}{16}-\frac{15}{8}-\frac{3}{8}+\frac{39}{4}=\frac{129}{16}\right)m^3\right\};$$

qui étant multipliée par

$$\left\{(g+c-1)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1}=\left\{\left(1-\frac{117}{16}m^3\right)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1}=\frac{2}{3m^2}\left(1+\frac{39}{4}m\right),$$

donne

$$\delta u= \cos gv+cv-fv \quad A'e\gamma\left\{-\frac{1}{3}+\left(\frac{43}{8}-\frac{13}{4}=\frac{17}{8}\right)m\right\}.$$

23. Cela posé, revenons à notre objet. En faisant dans la fonction $sR_3= A'.au\sin fv$;

$$au= \cos Ev+c'mv \quad \varepsilon'b^2\left(\frac{5}{4}-\frac{45}{8}m\right)+\cos Ev+c'mv-cv \quad e\varepsilon'b^2\left(\frac{5}{2}-\frac{45}{4}m\right)$$

(Voyez p. 482 du second Vol.), on aura

$$sR_3= \sin Ev+c'mv+fv \qquad A'\varepsilon'b^2\left(\frac{5}{8}-\frac{45}{16}m\right)$$
$$+\sin Ev+c'mv+fv-cv \quad A'e\varepsilon'b^2\left(\frac{5}{4}-\frac{45}{8}m\right).$$

La fonction R_2+R_3 renferme les deux termes

$$R_2+R_3= \cos Ev+c'mv \qquad \varepsilon'b^2\left(-\frac{27}{8}+\frac{1215}{32}m\right)$$
$$+\cos Ev+c'mv-cv \quad e\varepsilon'b^2\left(-\frac{105}{16}-\frac{5535}{128}m\right)$$

(Voyez p. 509 et 511 du second vol.) lesquels étant multipliés par $\delta s= \sin fv \quad A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m\right)$, donnent

$$(R_2+R_3)\delta s= \sin Ev+c'mv+fv \qquad A'\varepsilon'b^2\left(\frac{9}{8}-\frac{783}{64}m\right)$$
$$+\sin Ev+c'mv+fv-cv \quad A'e\varepsilon'b^2\left(\frac{35}{16}+\frac{975}{64}m\right).$$

En prenant (Voyez p. 509 , 510 du second vol.)

$$R_{\text{,}} = \sin Ev + c'mv \;\; \varepsilon' b^2 \left(\frac{3}{8} - \frac{135}{32} m\right) + \sin Ev + c'mv - cv \;\; e\varepsilon' b^2 \left(-\frac{15}{16} - \frac{585}{128} m\right)$$

et multipliant par $-\frac{d.\delta s}{dv} = \cos fv \;\; A'\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} m\right)$, on aura

$$-R_{\text{,}} \frac{d.\delta s}{dv} = \sin Ev + c'mv + fv \qquad A'\varepsilon' b^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{87}{64} m\right)$$
$$+ \sin Ev + c'mv + fv - cv \;\; A' e\varepsilon' b^2 \left(-\frac{5}{16} - \frac{105}{64} m\right).$$

La réunion de ces parties fournit cette équation différentielle

$$-\frac{d^2 . \delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2} m^2\right) \delta s =$$

$$\sin Ev + c'mv + fv \qquad A'\varepsilon' b^2 \left\{\left(\frac{5}{8} + \frac{9}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}\right) m^2 - \left(\frac{45}{16} + \frac{783}{64} + \frac{87}{64} = \frac{525}{32}\right) m^3\right\}$$
$$\sin Ev + c'mv + fv - cv \;\; A' e\varepsilon' b^2 \left\{\left(\frac{5}{4} + \frac{35}{16} - \frac{5}{16} = \frac{25}{8}\right) m^2 + \left(\frac{975}{64} - \frac{45}{8} - \frac{105}{64} = \frac{255}{32}\right) m^3\right\};$$

laquelle étant intégrée , donne

$$\delta s = \sin Ev + c'mv + fv \qquad A'\varepsilon' b^2 \left(\frac{5}{8} m^2 - \frac{175}{32} m^3\right)$$
$$\sin Ev + c'mv + fv - cv \;\; \frac{A' e\varepsilon' b^2 \left(\frac{25}{8} m^2 + \frac{255}{32} m^3\right)}{(2 - c)^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2}.$$

Il suit de là que

$$3s_{\text{,}} \delta s = \cos Ev + c'mv + fv - gv \qquad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{15}{16} m^2 - \frac{525}{64} m^3\right)$$
$$\cos Ev + c'mv + fv - gv - cv \;\; \frac{A' e\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{75}{16} m^2 + \frac{765}{64} m^3\right)}{(2 - c)^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2}.$$

Maintenant, si l'on prend (Voyez p. 507 du second vol.)

$$\delta s = \sin fv \; A'\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m\right) + \sin Ev + c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{3}{2}m^2+\frac{225}{16}m^3\right)$$
$$+ \sin Ev + c'mv - gv - cv \; e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{4}-\frac{55}{8}m\right)$$

on en tirera

$$(\delta s)^2 = \cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2\left\{-m^2+\left(\frac{75}{8}-\frac{3}{8}=9\right)m^3\right\}$$
$$\cos Ev + c'mv + fv - gv - cv \; A'e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{6}\right):$$

partant il est clair qu'on a ;

$$(1) \;\ldots\; -q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = 3s_1\,\delta s + \frac{3}{2}(\delta s)^2 =$$

$$\cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{9}{16}m^2+\frac{339}{64}m^3\right)$$
$$\cos Ev + c'mv + fv - gv - cv \; A'e\varepsilon'\gamma b^2\left\{-\frac{5}{4}+\frac{\frac{75}{16}m^2+\frac{765}{64}m^3}{(2-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2}\right\}.$$

En prenant

$$R_1 = A'q(s_1+\delta s)au\cos fv = \frac{A'au\gamma}{2}\sin gv - fv$$
$$+ A'e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{8}-\frac{55}{16}m\right)\sin Ev + c'mv + fv - gv - cv;$$

et faisant dans cette expression

$$au = \cos Ev + c'mv \;\; \varepsilon'b^2\left(\frac{5}{4}-\frac{45}{8}m\right) + \cos Ev + c'mv - cv \;\; e\varepsilon'b^2\left(\frac{5}{2}-\frac{45}{4}m\right)$$

on aura

$$R_1 = \sin Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{16}+\frac{45}{32}m\right)$$
$$+ \sin Ev + c'mv + fv - gv - cv \;\; A'e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{4}-\frac{5}{8}m\right).$$

Maintenant si l'on fait

$$\delta R' = \delta u \left\{ -\frac{15}{8}\varepsilon' b^2 \sin Ev + c'mv - \frac{45}{8}\varepsilon' b^2 \sin Ev - c'mv + \frac{45}{8} e\varepsilon' b^2 \sin Ev + c'mv - cv \right\}$$

on trouvera, à l'aide des valeurs de δu posées dans les pages 372, 380, 408;

$$-\frac{15}{8}\varepsilon' b^2 \sin Ev + c'mv . \delta u = \sin Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{5}{16} + \frac{15}{128} m\right)$$
$$\sin Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad A' e\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{5}{16} - \frac{255}{128} m\right);$$

$$-\frac{45}{8}\varepsilon' b^2 \sin Ev - c'mv . \delta u = \sin Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{45}{128} m\right);$$

$$\frac{45}{8} e\varepsilon' b^2 \sin Ev + c'mv - cv . \delta u = \sin Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad A' e\varepsilon'\gamma b^2 \left(-\frac{15}{16} - \frac{45}{128} m\right);$$

et par conséquent

$$\delta R' = \sin Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{5}{16} + \frac{15}{32} m\right)$$
$$\sin Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad A' e\varepsilon'\gamma b^2 \left(-\frac{5}{8} - \frac{75}{32} m\right).$$

En réunissant cette valeur de $\delta R'$ avec la précédente de R_1, on aura pour la valeur complète de R_1;

$$R_1 = \sin Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left\{ \left(\frac{5}{16} - \frac{5}{16} = 0\right) + \left(\frac{45}{32} + \frac{15}{32} = \frac{15}{8}\right) m \right\}$$
$$\sin Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad A' e\varepsilon'\gamma b^2 \left\{ -\left(\frac{5}{4} + \frac{5}{8} = \frac{15}{8}\right) - \left(\frac{5}{8} + \frac{75}{32} = \frac{95}{32}\right) m \right\};$$

d'où l'on tire

$$(2) \ldots . -\int R_1 dv = \cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{15}{8} m\right)$$
$$\cos Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad \frac{A' e\varepsilon'\gamma b^2 \left(-\frac{15}{8} - \frac{95}{32} m\right)}{2 - g - c}.$$

Soit, $R_5 = 4A'qs.(au)^2 \sin fv = 2A'\gamma (au)^2 \cos gv - fv$. En y faisant $(au)^2 = 2 \cos Ev + c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8} m\right)$, on aura

$$R_5 = \cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{45}{4} m\right).$$

Maintenant, si l'on fait

$$\delta R^V = \delta u \left\{ -\frac{9}{2} \varepsilon' b^2 \cos Ev + c'mv - \frac{27}{2} \varepsilon' b^2 \cos Ev - c'mv \right\}$$

on en tirera

$$\delta R^V = \cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left\{ \frac{3}{4} - \left(\frac{27}{32} - \frac{9}{32} = \frac{9}{16} \right) m \right\}.$$

Donc on a, pour la valeur complète de R_5 ;

$$(3) \ldots R_5 = \cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left\{ \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4} \right) - \left(\frac{45}{4} + \frac{9}{16} = \frac{189}{16} \right) m \right\}.$$

En multipliant

$$R_1 = -\frac{21}{8} \varepsilon' b^2 \sin Ev - c'mv \quad \text{par} \quad -\frac{d.\delta u}{dv} = \frac{A' m \gamma}{4} \sin 2Ev - gv + fv,$$

on aura

$$(4) \ldots\ldots -R_1 \frac{d.\delta u}{dv} = \cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left(-\frac{21}{64} m \right).$$

En multipliant $\frac{d^2.\delta u}{dv^2} + \delta u = -\frac{3}{8} A' m\gamma \cos 2Ev - gv + fv$ par

$$-2\int R_1 dv = 2 \cos Ev - c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left(-\frac{21}{8} \right),$$

il viendra

$$(5) \ldots -2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2} + \delta u \right) \int R_1 dv = \cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{63}{64} m \right).$$

La réunion des termes compris dans les équations désignées par (1); (2) . . (5) fournit cette équation différentielle

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\cos Ev+c'mv+fv-gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{9}{16}+\frac{13}{4}=\frac{43}{16}\right)m^2 \\ +\left(\frac{15}{4}+\frac{339}{64}-\frac{189}{16}+\frac{63}{64}-\frac{21}{64}=-\frac{135}{64}\right)m^3\end{array}\right\}$$

$$\cos Ev+c'mv+fv-gv-cv \quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left\{-\frac{5}{4}+\frac{\frac{75}{16}m^2+\frac{765}{64}m^3}{(2-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2}-\frac{\frac{15}{4}m^2+\frac{95}{16}m^3}{2-g-c}\right\};$$

qui étant intégrée donne

$$\delta u=$$

$$\cos Ev+c'mv+fv-gv \quad \frac{A'\varepsilon'\gamma b^2\left\{\frac{43}{16}m^2-\frac{135}{64}m^3\right\}}{(2-g)^2-1+\frac{3}{2}m^2}$$

$$\cos Ev+c'mv+fv-gv-cv \quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left\{\frac{5}{4}-\frac{\frac{75}{16}m^2+\frac{765}{64}m^3}{(2-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2}+\frac{\frac{15}{4}m^2+\frac{95}{16}m^3}{2-g-c}\right\}.$$

Il suit de là que

$$\frac{\delta u}{u_1}=\delta u(1-e\cos cv)=$$

$$\cos Ev+c'mv+fv-gv \quad \frac{A'\varepsilon'\gamma b^2\left\{\frac{43}{16}m^2-\frac{135}{64}m^3\right\}}{(2-g)^2-1+\frac{3}{2}m^2}$$

$$\cos Ev+c'mv+fv-gv-cv \quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left\{\begin{array}{l}\frac{5}{4}-\frac{\frac{75}{16}m^2+\frac{765}{64}m^3}{(2-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2}+\frac{\frac{15}{4}m^2+\frac{95}{16}m^3}{2-g-c} \\ -\frac{\frac{43}{32}m^2-\frac{135}{128}m^3}{(2-g)^2-1+\frac{3}{2}m^2}\end{array}\right\}.$$

Pour avoir les termes renfermés dans le carré de $\frac{\delta u}{u_1}$ on fera le carré du second membre de l'équation

$$\frac{\delta u}{u_1} = \cos gv - fv \quad A'\gamma\left(-\frac{1}{3}-\frac{m}{8}\right) + \cos gv + cv - fv \quad A'e\gamma\left(-\frac{1}{6}\right)$$
$$+ \cos Ev + c'mv \quad \varepsilon'b^2\left(\frac{5}{4}\right) + \cos Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon'b^2\left(\frac{15}{8}\right);$$

ce qui donnera

$$\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 = \cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{12}\right)$$
$$+ \cos Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{8}-\frac{5}{24}=-\frac{5}{6}\right).$$

Ainsi nous avons

$$A = 2\frac{\delta u}{u_1} - 3\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 =$$

$$\cos Ev + c'mv + fv - gv \quad A'\varepsilon'\gamma b^2\left\{\frac{5}{4} + \frac{\frac{43}{8}m^2 - \frac{135}{32}m^3}{(2-g)^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2}\right\}$$

$$\cos Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=5\right) + \dfrac{\frac{15}{2}m^2 + \frac{95}{8}m^3}{2-g-c} \\ - \dfrac{\frac{75}{8}m^2 + \frac{765}{32}m^3}{(2-c)^2 - 1 - \frac{3}{2}m^2} - \dfrac{\frac{43}{16}m^2 - \frac{135}{64}m^3}{(2-g)^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2}\end{array}\right\}.$$

En faisant le carré de

$$-m^2\int R_1\,dv = \frac{2}{3}A'\gamma\cos gv - fv - \frac{5}{4}e\varepsilon' b^2\cos Ev + c'mv - cv,$$

on aura ;

$$m^4\left(\int R_1\,dv\right)^2 = \cos Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{6}\right).$$

Donc on a ;

$$-B = -m^2\int R_1\,dv - \frac{3}{2}m^4\left(\int R_1\,dv\right)^2 =$$

$$\cos Ev + c'mv + fv - gv - cv \quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left\{\frac{5}{4} - \frac{\frac{15}{8}m^2 + \frac{95}{32}m^3}{2-g-c}\right\}.$$

Pour avoir les termes renfermés dans le produit AB, on fera

$$A=-\tfrac{2}{3}A'\gamma\cos\overline{gv-fv}+\tfrac{5}{2}\varepsilon' b^2\cos\overline{Ev+c'mv}+\tfrac{15}{4}e\varepsilon' b^2\cos\overline{Ev+c'mv-cv};$$

$$B=-\tfrac{2}{3}A'\gamma\cos\overline{gv-fv}+\tfrac{5}{4}e\varepsilon' b^2\cos\overline{Ev+c'mv-cv};$$

et de là on tirera

$$\begin{aligned}AB=&\cos\overline{Ev+c'mv+fv-gv}\quad A'\varepsilon'\gamma b^2\left(-\tfrac{5}{6}\right)\\&+\cos\overline{Ev+c'mv+fv-gv-cv}\quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\tfrac{5}{4}-\tfrac{5}{12}=-\tfrac{5}{3}\right).\end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$Y=A-B+AB=$$

$$\cos\overline{Ev+c'mv+fv-gv}\quad A'\varepsilon'\gamma b^2\left\{\left(\tfrac{5}{4}-\tfrac{5}{6}=\tfrac{5}{12}\right)+\frac{\frac{43}{8}m^2-\frac{135}{32}m^3}{(2-g)^2-1+\frac{3}{2}m^2}\right\}$$

$$\cos\overline{Ev+c'mv+fv-gv-cv}\quad A'e\varepsilon'\gamma b^2\left\{\begin{aligned}&\left(5+\tfrac{5}{4}-\tfrac{5}{3}=\tfrac{55}{12}\right)+\frac{\frac{45}{8}m^2+\frac{285}{32}m^3}{2-g-c}\\&-\frac{\frac{75}{8}m^2+\frac{765}{32}m^3}{(2-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2}-\frac{\frac{43}{16}m^2-\frac{135}{64}m^3}{(2-g)^2-1+\frac{3}{2}m^2}\end{aligned}\right\}$$

d'oû l'on tire

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=-Y+2e\cos cv\times Y=$$

$$\cos\overline{Ev+c'mv+fv-gv-cv}\quad Ae\varepsilon'\gamma b^2\left\{\begin{aligned}&\left(-\tfrac{55}{12}+\tfrac{5}{12}=-\tfrac{25}{6}\right)+\frac{\frac{129}{16}m^2-\frac{405}{64}m^3}{(2-g)^2-1+\frac{3}{2}m^2}\\&-\frac{\frac{45}{8}m^2+\frac{285}{32}m^3}{2-g-c}+\frac{\frac{75}{8}m^2+\frac{765}{32}m^3}{(2-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2}\end{aligned}\right\};$$

et en intégrant

$$\delta nt = \sin Ev + c'mv + fv - gv - cv \; \frac{A'e\varepsilon'\gamma b^2}{m^4} \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{25 . m^4}{6(2-g-c)} + \dfrac{\frac{129}{16} m^6 - \frac{405}{64} m^7}{(2-g-c)\left\{(2-g)^2 - 1 + \frac{3}{2} m^2\right\}} \\ -\dfrac{\frac{45}{8} m^6 + \frac{285}{32} m^7}{(2-g-c)^2} + \dfrac{\frac{75}{8} m^6 + \frac{765}{32} m^3}{(2-g-c)\left\{(2-c)^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2\right\}} \end{array} \right\}$$

Maintenant, pour réduire ce coefficient en nombres on y fera

$$2-g-c = 0{,}00443113 \; ; \quad (2-g)^2 - 1 + \tfrac{3}{2} m^2 = 0{,}0003665 \; ;$$

$$(2-c)^2 - 1 - \tfrac{3}{2} m^2 = 0{,}008583 16.$$

$$\text{Log. } \overline{(2-g-c)}^{-1} = 2{,}3534854 \; ; \quad \text{Log. } \overline{(2-g-c)}^{-2} = 4{,}7069708 \; ;$$

$$\text{Log. } \overline{\left\{(2-g-c)\left\{(2-g)^2 - 1 + \tfrac{3}{2} m^2\right\}\right\}}^{-1} = 5{,}7894114 \; ;$$

$$\text{Log. } \overline{\left\{(2-g-c)\left\{(2-c)^2 - 1 - \tfrac{3}{2} m^2\right\}\right\}}^{-1} = 4{,}4198381 \; ;$$

ce qui donnera

$$-\frac{25 . m^4}{6(2-g-c)} = -0{,}02944 \; ;$$

$$\frac{\frac{129}{16} m^6 - \frac{405}{64} m^7}{(2-g-c)\left\{(2-g)^2 - 1 + \frac{3}{2} m^2\right\}} = 0{,}8899 - 0{,}05105 = 0{,}8389 \; ;$$

$$-\frac{\frac{45}{8} m^6 + \frac{285}{32} m^7}{(2-g-c)^2} = -0{,}0502 - 0{,}0059 = -0{,}0561 \; ;$$

$$\frac{\frac{75}{8} m^6 + \frac{765}{32} m^7}{(2-g-c)\left\{(2-c)^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2\right\}} = 0{,}0432 + 0{,}0082 = 0{,}0514.$$

De là on tire la conséquence que l'inégalité ayant pour argument $Ev + c'mv + fv - gv - cv$ est tout-à-fait insensible.

Passons maintenant à la discussion des inégalités dépendantes de l'angle $2fv$; ce qui nous fournira le premier terme du coefficient de l'inégalité ayant pour argument $2gv - 2fv$, et complétera, sous ce rapport, le second terme de l'inégalité dont l'argument est $gv - fv$.

24. En conservant seulement les termes affectés de l'argument $2fv$ et faisant, pour plus d'uniformité, $A'' = \frac{\mu'^2}{\mu^2} \sin^2 \omega$; les formules posées dans la page 364 se réduisent à celles-ci :

$$R_1 = \frac{A'' q \,.\, au \sin 2fv}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}} \,; \qquad R_3 = \frac{A'' q \,.\, au \cos 2fv}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}} \,;$$

$$R_5 = -\frac{A'' q \left(\frac{3}{2} - s^2\right) (au)^2 \cos 2fv}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}}.$$

Maintenant si l'on fait dans ces expressions, $s = s_1 = \gamma \sin gv$; $au = u_1 = 1 + e \cos cv - \frac{1}{4} \gamma^2 \cos 2gv$, on aura d'abord ;

$$R_1 = \quad A'' \sin 2fv - \frac{A''}{2} . e \sin cv - 2fv - \frac{A''}{2} \gamma^2 \sin 2gv - 2fv \,;$$

$$-\int R_1\, dv = \quad \frac{A''}{2} \cos 2fv + \frac{A''}{2} . e \cos cv - 2fv$$

$$- A'' \gamma^2 \left(\frac{1}{3} . m^{-2} + \frac{1}{8} . m^{-1} + \frac{191}{192} m^0 \right) \cos 2gv - 2fv \,;$$

abstraction faite des autres termes.

En réduisant la valeur de R_3 au terme $R_3 = A'' \cos 2fv$, et considérant seulement l'argument $2fv$ dans la valeur de R_1, il viendra ;

$$m^2 \left(s_1 R_3 - \frac{ds_1}{dv} R_1 \right) = m^2 A'' \gamma . \sin gv - 2fv :$$

d'où l'on conclut, que l'expression de δs renferme le terme

$$\delta s = \frac{A'' m^2 \gamma . \sin gv - 2fv}{(g-2)^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2} = -\frac{A''}{3} . \gamma \sin (gv - 2fv).$$

Donc, en introduisant ce terme dans l'équation différentielle en δs posée au commencement de la page 368 on aura l'équation

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s=-\frac{A''}{2}m^2\gamma\sin 2Ev+gv-2fv$$

qui donne $\delta s=\frac{A''m}{8}.\gamma\sin 2Ev+gv-2fv$. Maintenant, par l'introduction de ce terme et du précédent dans le second membre de l'équation différentielle en δs on forme l'équation

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s=A''\left(m^2+\frac{3}{16}m^3\right)\gamma\sin gv-2fv\ ,$$

de laquelle on tire

$$\delta s=\frac{A''m^2\left(1+\frac{3}{16}m\right)}{(g-2)^2-1-\frac{3}{2}m^2}.\gamma\sin gv-2fv=-A''\left(\frac{1}{3}+\frac{m}{8}\right)\gamma\sin gv-2fv.$$

Ce terme de δs, et le précédent, donnent

$$3s_1\delta s=-\frac{A''}{2}\gamma^2\cos 2fv+A''\left(\frac{1}{2}+\frac{3m}{16}\right)\gamma^2\cos 2gv-2fv-\frac{3A''m\gamma^2}{16}\cos 2Ev+2gv-2fv.$$

En faisant le carré du binome

$$\delta s=-\frac{A''}{3}\gamma\sin gv-2fv+\frac{3}{8}m\gamma.\sin 2Ev-gv$$

on aura le terme $(\delta s)^2=-\frac{A''m\gamma^2}{8}\cos 2Ev-2gv+2fv$. Donc

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T=3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2=$$

$$-\frac{A''}{2}\gamma^2\cos 2fv+A''\left(\frac{1}{2}+\frac{3m}{16}\right)\gamma^2\cos 2gv-2fv$$
$$-\frac{3A''m\gamma^2}{16}\left\{\cos 2Ev+2gv-2fv+\cos 2Ev-2gv+2fv\right\}.$$

Actuellement, on prendra

$$-\frac{du_1}{dv}.R_1 = \quad R_1.e \sin cv = \frac{A''}{2}.e \sin cv - 2fv\,;$$

$$R_5 = -\frac{3}{2}A'' \cos 2fv - \frac{3}{2}A'' e \cos cv - 2fv\,;$$

et d'après cela on formera cette équation différentielle ;

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2}m^2\right)\delta u =$$

$$(*)\ \left\{\cos 2fv \quad A''\left\{\left(1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\right)m^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\right\} + \cos cv - 2fv \quad A''e\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0\right)m^2\right\}$$

$$+ \cos 2gv - 2fv \quad A''\gamma^2\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}\right)m\right\}$$

$$+ \cos 2Ev + 2gv - 2fv \quad A''\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m\right) + \cos 2Ev - 2gv + 2fv \quad A''\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m\right);$$

qui étant intégrée, donne

$$\delta u = \quad \cos 2fv \quad A''\left(-\frac{m^2}{6} - \frac{\gamma^2}{6}\right) + \cos 2gv - 2fv \quad A''\gamma^2\left(\frac{1}{6} + \frac{m}{16}\right)$$
$$-\frac{A''\gamma^2 m}{16}\left\{\cos 2Ev + 2gv - 2fv + \cos 2Ev - 2gv + 2fv\right\}.$$

De là et de l'expression précédente de $-\int R_1 dv$ on tire ;

(*) Les deux termes affectés des argumens $2fv$, $cv - 2fv$ se trouvent aussi dans l'équation différentielle en δu donnée par *Lagrange* dans son Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune (Voyez p. 33, 34, 35 du Tome VII des Prix de l'Académie des Sciences de Paris). Il trouvait, comme nous, que le premier terme du coefficient de l'argument $cv - 2fv$ est nul ; mais il négligeait le terme $-\frac{A''\gamma^2}{2}$, qui fait partie du coefficient de l'argument $2fv$. Au reste, il faut remarquer que dans le cas de l'homogénéité de la Terre, on a $\Psi = \frac{2}{5}K_{(2)}$; ce qui change notre quantité $-m^2 A'' = -\left(\frac{D}{a}\right)^2\left\{K_{(2)} - \Psi\right\}\sin^2\omega$ en $-\frac{3}{5}\left(\frac{D}{a}\right)^2 K_{(2)}\sin^2\omega$, et la rend égale à celle que *Lagrange* désigne par $C = \frac{3}{2.5}\left(\frac{D}{a}\right)^2\left\{1 - (1 + K_{(2)})^2\right\}\sin^2\omega$ (Voyez p. 30 et 41).

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = -2\,\delta u + m^2 \int R_1\, dv =$$

$$\cos 2fv\ A''\left(\tfrac{1}{3}m^2 + \tfrac{1}{3}\gamma^2\right) + \cos 2gv - 2fv\ A''\gamma^2 \left\{\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} = 0\right) + \left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} = 0\right) m\right\}$$

$$+ \frac{m A''\gamma^2}{8}\left\{\cos 2Ev + 2gv - 2fv + \cos 2Ev - 2gv + 2fv\right\};$$

$$\delta nt = \quad \sin 2fv \quad A''\left(\frac{m^2}{6} + \frac{\gamma^2}{6}\right)$$

$$+ \frac{A'' m\gamma^2}{16}\left\{\sin 2Ev + 2gv - 2fv + \sin 2Ev - 2gv + 2fv\right\}.$$

25. Cherchons maintenant le terme de la forme $A'' m^2 \gamma^2 \cos 2gv - 2fv$, qui entre dans l'expression de $\frac{d.\delta nt}{dv}$, en imitant le procédé exposé depuis le n.° 8 jusqu'au n.° 17 de ce paragraphe.

En faisant

$$R_1 = \frac{3}{2}\sin 2Ev; \qquad \delta s = -A''\left(\frac{1}{3} + \frac{m}{8}\right)\gamma \sin gv - 2fv;$$

$$R_3 = \frac{3}{2}\cos 2Ev; \qquad \frac{d.\delta s}{dv} = -A''\left(\frac{1}{3} + \frac{m}{8}\right)\gamma \cos gv - 2fv,$$

on obtient l'équation différentielle

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2}m^2\right)\delta s = R_3\delta s - R_1\frac{d.\delta s}{dv} = -\frac{A'' m^2}{2}\left(1 + \frac{3}{4}m\right)\gamma \sin 2Ev + gv - 2fv,$$

qui donne ;

$$\delta s = A''\left(\frac{m}{8} + \frac{7}{32}m^2\right)\gamma \sin 2Ev + gv - 2fv;$$

et par conséquent

$$3s_1\,\delta s = -A''\left(\frac{3m}{16} + \frac{21}{64}m^2\right)\gamma^2 \cos 2Ev + 2gv - 2fv.$$

Le carré du binome

$$\delta s = -A''\left(\frac{1}{3} + \frac{m}{8}\right)\gamma \sin gv - 2fv + \left(\frac{3}{8}m + \frac{3}{32}m^2\right)\gamma \sin 2Ev - gv,$$

donne

$$(\delta s)^2 = A''\left\{-\frac{m}{8}-\left(\frac{1}{32}+\frac{3}{64}=\frac{5}{64}\right)m^2\right\}\gamma^2 \cos 2Ev-2gv+2fv.$$

Donc on a, $\quad -q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = 3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2 =$

$$-A''\gamma^2.\left\{\left(\frac{3m}{16}+\frac{21}{64}m^2\right)\cos 2Ev+2gv-2fv+\left(\frac{3}{16}m+\frac{15}{128}m^2\right)\cos 2Ev-2gv+2fv\right\}.$$

En prenant $\delta u = \frac{A''}{6}\gamma^2 \cos 2gv-2fv$, on trouve

$$\delta R' = -6\sin 2Ev.\delta u = -\frac{A''\gamma^2}{2}\left\{\sin 2Ev+2gv-2fv+\sin 2Ev-2gv+2fv\right\};$$

$$\delta R^{v} = -\frac{9}{2}\cos 2Ev.\delta u = -\frac{3}{8}.A''\gamma^2\left\{\cos 2Ev+2gv-2fv+\cos 2Ev-2gv+2fv\right\};$$

$$-\int \delta R'.dv = -\frac{A''\gamma^2}{4}\left\{\cos 2Ev+2gv-2fv+\cos 2Ev-2gv+2fv\right\}.$$

En faisant le produit des deux fonctions

$$-\int R_1 dv = \frac{3}{4}\cos 2Ev-\frac{A''}{3}\gamma^2.m^{-2}.\cos 2gv-2fv;$$

$$\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u = -3m^2\cos 2Ev+\frac{A''}{6}\gamma^2\cos 2gv-2fv,$$

il viendra

$$-2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1 dv = \cos 2Ev+2gv-2fv\ A''\gamma^2\left(1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}\right)$$
$$+\cos 2Ev-2gv+2fv\ A''\gamma^2\left(1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}\right).$$

La réunion de ces parties donne

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u =$$

$$\cos 2Ev+2gv-2fv\ A''\gamma^2\left\{-\frac{3m}{16}+\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}-\frac{21}{64}=-\frac{5}{64}\right)m^2\right\}$$
$$\cos 2Ev-2gv+2fv\ A''\gamma^2\left\{-\frac{3m}{16}+\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}-\frac{15}{128}=\frac{17}{128}\right)m^2\right\};$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\delta u = \cos 2Ev + 2gv - 2fv \quad A''\gamma^2 \left\{ -\frac{m}{16} - \left(\frac{5}{192} + \frac{1}{12} = \frac{7}{64} \right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev - 2gv + 2fv \quad A''\gamma^2 \left\{ -\frac{m}{16} + \left(\frac{17}{384} - \frac{1}{12} = -\frac{5}{128} \right) m^2 \right\}$$

Il suffit ici de prendre

$$\delta R' = -6 \sin 2Ev . \delta u = A''\gamma^2 \left\{ \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0 \right) m + \left(\frac{15}{128} - \frac{21}{64} = -\frac{27}{128} \right) m^2 \right\} \sin 2gv - 2fv,$$

en observant que les termes donnés par $(\delta u)^2$ et $m\delta nt$ se détruisent. Donc nous avons ;

$$-\int \delta R' \, dv = -\frac{27}{128} \frac{A'' m^2 \gamma^2 . \cos 2gv - 2fv}{2g - 2} = -\frac{9}{64} A'' \gamma^2 . \cos 2gv - 2fv.$$

26. Le produit des deux fonctions

$$R_3 = -3m^2 + \frac{3}{2} \cos 2Ev; \ \delta s = -\frac{A''}{3} \gamma \sin gv - 2fv + A'' m\gamma \left(\frac{1}{8} + \frac{7m}{32} \right) \sin 2Ev + gv - 2fv$$

donne

$$R_3 \delta s = A''\gamma \left\{ \frac{3}{32} m + \left(1 + \frac{21}{128} = \frac{149}{128} \right) m^2 \right\} \sin gv - 2fv.$$

Et le produit de $R_1 = \frac{3}{2} \sin 2Ev$ par

$$-\frac{d.\delta s}{dv} = -A'' m\gamma \left(\frac{1}{8} - \frac{m}{32} \right) \cos 2Ev + gv - 2fv$$

donne

$$-R_1 \frac{d.\delta s}{dv} = A'' m\gamma \left(\frac{3}{32} - \frac{3m}{128} \right) \sin gv - 2fv.$$

En multipliant $-\int R_1 dv = \frac{3}{4} \cos 2Ev$ par

$$\frac{d^2 . \delta s}{dv^2} + \delta s = \frac{A''}{2} . m^2 \gamma \sin 2Ev + gv - 2fv$$

on obtient

$$-2\left(\frac{d^2.\delta s}{dv^2}+\delta s\right)\int R_1 dv = \frac{3}{8}A'' m^2\gamma . \sin gv - 2fv.$$

Donc, en réunissant ces parties, il viendra

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s =$$

$$\sin gv - 2fv \quad A''\gamma\left\{m^2+\frac{3}{16}m^3+\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{128}+\frac{149}{128}=\frac{97}{64}\right)m^4\right\};$$

d'où l'on tire

$$\delta s = \frac{A''\gamma m^2\left(1+\frac{3}{16}m+\frac{97}{64}m^2\right)}{(g-2)^2-1-\frac{3}{2}m^2}.\sin gv - 2fv.$$

Mais $\left\{(g-2)^2-1-\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1} = -\frac{1}{3m^2}\left(1+\frac{3}{16}m+\frac{421}{256}m^2\right)$; partant

$$\delta s = A''\gamma\left\{-\frac{1}{3}-\frac{m}{8}-\left(\frac{97}{192}+\frac{3}{256}+\frac{421}{768}=\frac{409}{384}\right)m^2\right\}\sin gv - 2fv;$$

$$3s_1\,\delta s = A''\gamma^2\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{16}m+\frac{409}{256}m^2\right\}\sin 2gv - 2fv.$$

Le carré du binome

$$\delta s = \frac{3}{8}m\gamma \sin 2Ev - gv + \frac{A''m\gamma}{8}\sin 2Ev + gv - 2fv,$$

donne

$$(3)\ \ldots\ (\delta s)^2 = \frac{3}{64}A'' m^2\gamma^2 \cos 2gv - 2fv.$$

Ainsi il est clair qu'on a

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = 3s_1\,\delta s + \frac{3}{2}(\delta s)^2 =$$

$$\cos 2gv - 2fv \quad A''\gamma^2\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{16}m+\left(\frac{9}{128}+\frac{409}{256}=\frac{427}{256}\right)m^2\right\}.$$

La fonction R_5 posée dans la page 417 donne

$$(4) \ldots\ldots R_5 = -A''\left(\frac{3}{2}-s^2\right)\left(1-\frac{7}{2}s^2\right).(au)^2\cos 2fv$$

$$= -A''\left(\frac{3}{2}+\frac{25}{8}\gamma^2\cos 2gv\right)(au)^2\cos 2fv$$

$$= -A''\left(\frac{3}{2}+\frac{25}{8}\gamma^2\cos 2gv\right)\left(1-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2gv\right)\cos 2fv$$

$$= -A''\left(\frac{3}{2}+\frac{19}{8}\gamma^2\cos 2gv\right)\cos 2fv$$

$$= -\frac{19}{16}A''\gamma^2\cos 2gv-2fv.$$

Cela posé, si l'on fait la réunion des termes compris dans la fonction $(3)+m^2\{2.(1)+2.(2)+(4)\}$ on formera cette équation différentielle

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\cos 2gv-2fv\quad A''\gamma^2\left\{-\frac{1}{6}-\frac{m}{16}-\left(\frac{191}{96}+\frac{19}{16}-\frac{427}{256}+\frac{9}{32}=\frac{1375}{768}\right)m^2\right\};$$

laquelle étant intégrée donne

$$\delta u = \cos 2gv-2fv\quad A''\gamma^2\left(\frac{1}{6}+\frac{m}{16}+\left(\frac{1375}{768}+\frac{1}{4}=\frac{1567}{768}\right)m^2\right\}.$$

Il suit de là que nous avons

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = -2.\delta u + m^2\int R_1 dv =$$

$$\cos 2gv-2fv\quad A''\gamma^2\left\{0.m^0+0.m-\left(\frac{1567}{384}-\frac{191}{192}-\frac{9}{64}=\frac{377}{128}\right)m^2\right\};$$

et par conséquent

$$\delta nt = -\frac{377}{128}\frac{A''\gamma^2 m^2.\sin 2gv-2fv}{2g-2} = -\frac{377}{192}.A''\gamma^2\sin 2gv-2fv.$$

27. En rapprochant ce résultat de ceux obtenus dans les pages 383, 384, 391 et 395 on en conclura que la figure elliptique de la Terre introduit dans l'expression de δnt les termes suivans ;

$$\delta nt = A'\gamma \left\{ \left(\frac{19}{3} + \frac{13}{8} m\right) \sin gv - fv - \frac{1}{3} \sin gv + fv \right\}$$
$$+ A'e\gamma \left\{ (*) \frac{1}{3} \sin gv - cv - fv + \frac{2}{9} \sin gv + cv + fv - \frac{17}{9} \sin gv - cv + fv \right\}$$
$$- A'm\gamma \left\{ \left(\frac{1}{8} + \frac{7m}{12}\right) \sin 2Ev + gv - fv + \left(\frac{1}{8} + \frac{103}{192} m\right) \sin 2Ev - gv + fv \right\}$$
$$+ A'' \left\{ \frac{(m^2+\gamma^2)}{6} \sin 2fv - \frac{377}{192} \gamma^2 \sin 2gv - 2fv \right\}$$
$$+ \frac{A'' m\gamma^2}{16} \left\{ \sin 2Ev + 2gv - 2fv + \sin 2Ev - 2gv + 2fv \right\},$$
$$+ \text{etc.}$$

lesquels étant réduits en nombres donnent

$$\delta nt = 6'',65 \sin gv - fv - 0'',34 \sin gv + fv + 0'',019 \sin gv - cv - fv$$
$$+ 0'',012 \sin gv + cv + fv - 0'',107 \sin gv - cv + fv - 0'',009 \sin 2Ev + gv - fv$$
$$- 0'',009 \sin 2Ev - gv + fv + 0'',0057 . \sin 2fv - 0'',0395 \sin 2gv - 2fv$$
$$+ \text{etc.}$$

On peut juger par là le peu de fondement que l'on a, d'estimer la grandeur des inégalités Lunaires par la simple connoissance de l'ordre analytique du coefficient littéral. C'est le coefficient numérique $\frac{19}{3}$ qui rend sensible la prémière de ces inégalités : mais ce nombre n'est pas un de ceux qu'on puisse deviner par un simple aperçu, comme on peut deviner l'existence et la forme de l'argument. Toute fois cela suppose un grand développement dans les idées théoriques, puisque *Mayer*, qui avait établi par les observations l'existence de l'équation $6'',65 . \sin gv - fv$, n'en a pas pénétré la véritable origine.

(*) M.r *Damoiseau* trouve $A'e\gamma$, au lieu de $\frac{A'e\gamma}{3}$, pour le coefficient de l'argument $gv - cv - fv$ (Voyez p. 592 du Vol. où sa Théorie de la Lune est imprimée). Mais ce coefficient de M.r *Damoiseau* me paraît fautif : car il obtient dans l'expression de δu le terme $-\frac{1}{2} A'e\gamma \cos gv - cv - fv$, tandis que j'ai démontré (Voyez p. 372) que ce terme devient nul par la destruction mutuelle des parties qui concourent à sa formation. D'ailleurs, pourquoi tenir compte de ce terme et négliger celui affecté de l'argument $gv - cv + fv$ dont le coefficient est six fois plus grand?

Calcul du coefficient de l'inégalité Lunaire ayant pour argument $2Ev+2c'mv-2fv$.

28. D'après l'analyse exposée dans le 7.[ième] paragraphe du 5.[ième] Chapitre il est aisé de démontrer, que la valeur de $au = u_1 + \delta u$, et celle de $s^2 = (s_1 + \delta s)^2$, renferment chacune un terme affecté de l'argument $2Ev+2c'mv$, tel que

$$\delta u = \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{9}{64}m\gamma^2+\frac{15}{64}m^2\gamma^2\right),$$

$$s^2 = \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{9}{32}m\gamma^2+\frac{15}{32}m^2\gamma^2\right).$$

En effet; l'expression de δs posée dans les pages 204-207 du second volume donne

$$2s_1\delta s = \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{9}{32}m\gamma^2+\frac{93}{256}m^2\gamma^2\right);$$

$$(\delta s)^2 = 2\sin 2Ev-gv \quad \gamma\left(\frac{3}{8}m\right) \times \sin gv+2c'mv \quad \varepsilon'^2\gamma\left(\frac{27}{32}m\right)$$

$$+2\sin 2Ev+c'mv-gv \quad \varepsilon'\gamma\left(-\frac{3}{8}m\right) \times \sin gv+c'mv \quad \varepsilon'\gamma\left(\frac{9}{8}m\right)$$

$$= \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{27}{64}-\frac{81}{256}=\frac{27}{256}\right)m^2\gamma^2;$$

partant, on a;

$$2s_1\delta s+(\delta s)^2 = \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left\{\frac{9}{32}m\gamma^2+\left(\frac{93}{256}+\frac{27}{256}=\frac{15}{32}\right)m^2\gamma^2\right\};$$

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = 3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2 = \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{27}{64}m\gamma^2+\frac{45}{64}m^2\gamma^2\right).$$

Il suffit ici de prendre

$$R_4+\frac{3}{2}\delta u = \left\{2\cos c'mv \quad \varepsilon'\left(-\frac{9}{4}\right) + 2\cos 2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(-\frac{27}{8}\right)\right\}\frac{\delta u}{u_1}$$

$$= \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left\{\frac{9}{8}-\frac{27}{8}=-\frac{9}{4}\right\}m^2.$$

Produits partiels de $-6q\frac{(\alpha'u')^3}{u_1^4}\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}(2v-2v').\frac{\delta u}{u_1}$.

Multiplicateur | Produit

$2\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}2Ev \quad \left(-3\right) \ldots\ldots \left\{\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{27}{4}m^2\right)\right.$

$2\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}2Ev+c'mv \quad \varepsilon'\left(\frac{3}{2}\right) \ldots\ldots \left\{\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(-\frac{9}{4}m^2\right)\right.$.

Produits Partiels de $\delta\left[.(\alpha'u')^3\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}(2v-2v')\right]$.

Multiplicateur | Produit

$-2\begin{smallmatrix}cos\\sin\end{smallmatrix}-2Ev \quad \left(m\right) \ldots\ldots \left\{\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(-\frac{9}{4}m^2\right)\right.$

$-2\begin{smallmatrix}cos\\sin\end{smallmatrix}-(2Ev+c'mv) \quad \varepsilon'\left(-\frac{m}{4}\right) \ldots\ldots \left\{\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{3}{4}m^2\right)\right.$.

Produits partiels de $-2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1 dv$

Multiplicateur | Produit

$2\cos 2Ev \quad \left(-\frac{3}{4}\right) \ldots\ldots \left\{\cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(-\frac{27}{16}m^2\right)\right.$

$2\cos 2Ev+c'mv \quad \varepsilon'\left(\frac{3}{8}\right) \ldots\ldots \left\{\cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{9}{16}m^2\right)\right.$.

Il suit de là, que

$$\delta R' = \sin 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}m^2\right);$$

$$-\int\delta R' dv = \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{9}{8}m^2\right);$$

$$\delta R^v = \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left\{\frac{27}{8}-\frac{9}{4}=\frac{9}{8}\right\}m^2;$$

$$-2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1 dv = \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(-\frac{9}{8}m^2\right).$$

La réunion de ces parties donne cette équation;

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left\{\frac{27}{64}m\gamma^2+\frac{45}{64}m^2\gamma^2+\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{9}{8}-\frac{9}{8}=0\right)m^4\right\};$$

de laquelle on tire

$$\delta u= \cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(\frac{9}{64}m\gamma^2+\frac{15}{64}m^2\gamma^2\right):$$

et de plus on voit que, ce coefficient est exact jusqu'aux quantités du sixième ordre inclusivement.

Cela posé, en prenant

$$\frac{q.au}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}=\delta u-\frac{5}{2}s^2=\cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(-\frac{9}{16}m\gamma^2-\frac{15}{16}m^2\gamma^2\right),$$

l'expression précédente de R_1 donnera ce terme ;

$$R_1= A''\left(\frac{9}{32}m\gamma^2+\frac{15}{32}m^2\gamma^2\right)\varepsilon'^2 \sin 2Ev+2c'mv-2fv;$$

$$-\int R_1\,dv=\frac{A''\left(\frac{9}{32}m\gamma^2+\frac{15}{32}m^2\gamma^2\right)\varepsilon'^2}{2E+2c'm-2f}.\cos 2Ev+2c'mv-2fv.$$

Relativement à cet argument, le principal terme de l'expression de δu est celui qui a pour diviseur la petite fraction $2E+2c'm-2f$: en conséquence, il suffit de prendre $\delta u=2m^2\int R_1\,dv$. Par la même raison, on peut réduire la valeur de $\frac{d.\delta nt}{dv}$ à $-2\delta u+m^2\int R_1\,dv$; et alors on a

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=-3m^2\int R_1\,dv=\frac{A''m^3\varepsilon'^2\gamma^2\left(\frac{27}{32}+\frac{45}{32}m\right)}{2E+2c'm-2f}.\cos 2Ev+2c'mv-2fv;$$

d'où l'on tire, en intégrant ;

$$\delta nt = \frac{A'' m^3 \varepsilon'^2 \gamma^2 \left(\frac{27}{32} + \frac{45}{32} m\right)}{(2E + 2c'm - 2f)^2} . \sin 2Ev + 2c'mv - 2fv.$$

En réduisant ce coefficient en nombres on le trouverait de *quarante secondes*. Mais une circonstance, dont nous n'avons pas encore parlé, le rend insensible. Voici en quoi elle consiste. Pour plus de simplicité, représentons ce terme par $\delta nt = G . \sin \beta v$; et remarquons, que, en réduisant l'expression de $\delta R'$, due à l'action du Soleil (Voyez p. 273 et 331) au seul terme $\delta R' = -3m\,\delta nt . \cos 2Ev$, on aurait par la substitution de ce terme de δnt;

$$\delta R' = -\frac{3}{2} m G \left\{ \sin(2Ev + \beta v) - \sin(2Ev - \beta v) \right\} :$$

d'où l'on tire, en prenant $\frac{1}{2E \pm \beta} = \frac{1}{2}$;

$$-\int \delta R' \, dv = -\frac{3}{4} m G \left\{ \cos(2Ev + \beta v) - \cos(2Ev - \beta v) \right\}.$$

Donc, en considérant seulement les termes affectés des argumens $2Ev \pm \beta v$, qui ont pour diviseur la très-petite fraction $(2E + 2c'm - 2f)^2$, on formera l'équation différentielle

$$-\frac{d^2 . \delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2} m^2\right) \delta u = -\frac{3}{2} m^3 G \left\{ \cos(2Ev + \beta v) - \cos(2Ev - \beta v) \right\},$$

qui donne

$$\delta u = \frac{m^3 G}{2} \left\{ \cos(2Ev - \beta v) - \cos(2Ev + \beta v) \right\}.$$

Cela posé, si l'on substitue cette valeur de δu dans le terme $-6 \sin 2Ev . \delta u$, appartenant à la fonction $\delta R'$ (Voyez p. 273), on aura

$$\delta R' = -3 m^3 G . \sin \beta v ;$$

et par conséquent

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = -3m^2\int R_1 dv = -\frac{9m^5 G}{\beta}\cos\beta v;$$

$$\delta nt = -\frac{9m^5 G}{\beta^2}\sin\beta v.$$

Donc en réunissant ce terme avec le précédent, on aura

$$\delta nt = G\left\{1 - \frac{9m^5}{\beta^2}\right\}\sin\beta v.$$

En cherchant de la même manière, le troisième, le quatrième etc. terme de ce coefficient, on voit qu'il donnera la série

$$G\left\{1 - \frac{9m^5}{\beta^2} + \left(\frac{9m^5}{\beta^2}\right)^2 - \text{etc.}\right\};$$

c'est-à-dire

$$\delta nt = \frac{G\sin\beta v}{1 + \frac{9m^5}{\beta^2}} = \frac{G\beta^2\sin\beta v}{9m^5 + \beta^2};$$

ou bien, en remplaçant G par sa valeur trouvée plus haut;

$$\delta nt = \frac{A'' m^3 \varepsilon'^2 \gamma^2 \left(\frac{27}{32} + \frac{45}{32}m\right)}{9m^5 + (2E + 2c'm - 2f)^2}.\sin 2Ev + 2c'mv - 2fv.$$

La quantité $9m^5$ étant très-grande par rapport à $(2E + 2c'm - 2f)^2$, on peut écrire

$$\delta nt = A''\varepsilon'^2\gamma^2.m^{-2}.\left(\frac{3}{32} + \frac{5}{32}m\right).\sin 2Ev + 2c'mv - 2fv;$$

d'où l'on tire, en substituant pour A'' sa valeur;

$$\delta nt = \left(\frac{D}{a}\right)^2.(K_{(2)} - \Psi)\varepsilon'^2\gamma^2\left(\frac{3}{32}.m^{-4} + \frac{5}{32}.m^{-3}\right).\sin 2Ev + 2c'mv - 2fv.$$

Or il est évident que ce coefficient est insensible. Si l'on objectait, que en posant $\delta u = H.\cos\beta v$; l'équation $\delta R' = -7\sin 2Ev.\delta u$, donne

$$-\int \delta R'.dv = -\tfrac{3}{2}H\left\{cos(2Ev+\beta v)+cos(2Ev-\beta v)\right\},$$

et par conséquent

$$\delta u = -m^2 H\left\{cos(2Ev+\beta v)+cos(2Ev-\beta v)\right\};$$

on ferait disparoître la nécessité de cette considération, en faisant remarquer que cette valeur de δu, donne

$$\delta R' = -6\,sin\,2Ev.\delta u = (3m^2H - 3m^2H)\,sin\,\beta v = 0.$$

29. *Lagrange* a considéré l'inégalité ayant pour argument $2Ev+2c'mv-2fv$ dans son Mémoire sur l'inégalité séculaire de la Lune, publié en 1776 dans le Tome VII des Prix de l'Académie des Sciences de Paris. Mais comme, dans son analyse (Voyez ce qu'il dit à ce sujet dans les pages 13, 21, 44), il supposait nulle l'inclinaison de l'orbite, il est impossible que ses résultats soient conformes à la vérité. Car tous les effets principaux de cette cause perturbatrice disparoîssent dés qu'on suppose $\gamma=0$, et qu'on ne prend pas en considération l'équation différentielle qui détermine la perturbation δs de la tangente de la latitude. D'ailleurs *Lagrange* n'a pas remarqué, que le dénominateur $(2E+2c'm-2f)^2$ perdait l'influence qu'il lui attribuoit par son association avec la quantité $9.m^5$, beaucoup plus grande. C'est en vertu d'une cause semblable, que la lente variation séculaire du plan de l'écliptique se trouve paralysée en s'associant au mouvement beaucoup plus rapide du noeud de la Lune, dans l'expression de la tangente de la latitude de ce satellite au-dessus de l'écliptique vraie. Néanmoins, ce Mémoire de *Lagrange* est précieux sous d'autres rapports, et il a dû faire germer des idées plus heureuses : c'est là, que la non sphéricité de la Terre à été, pour la première fois, introduite dans les équations différentielles du mouvement de la Lune, avec une lumineuse élégance analytique, et il n'y avait qu'à rétablir les termes dépendans de la latitude, pour découvrir aussitôt l'inégalité, ayant pour argument fv, qui

affecte cette coordonnée. Mais il était réservé à *Laplace* d'ajouter, 27 années plus tard, cette importante remarque au travail de *Lagrange*, et de la suivre dans ses conséquences par rapport à la longitude. Au reste, il n'est pas surprenant si, *Lagrange* uniquement préoccupé de l'idée d'une équation ayant une période de plusieurs milliers d'années, a négligé de chercher dans ses propres formules les termes sensibles qu'elles pouvaient donner avec des argumens dont la période est d'un petit nombre d'années.

30. Ce Mémoire de *Lagrange* offre une autre particularité que je ne puis passer sous silence. L'équation différentielle dont il donne les coefficiens dans les pages 34 et 35 revient à dire, suivant nos dénominations, que l'équation différentielle en δu doit renfermer les termes suivans :

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\begin{array}{ll}
\cos 2Ev+2c'mv & \varepsilon'^2\left(\ \frac{9}{4}m^2\right) \\
\cos 2Ev+2c'mv-cv & e\varepsilon'^2\left(-\frac{45}{2}m^2\right) \\
\cos Ev+c'mv & \varepsilon'b^2\left(\ \frac{15}{4}m^2\right) \\
\cos Ev+c'mv-cv & e\varepsilon'b^2\left(-5.m^0\right) \\
\cos 3Ev+3c'mv & \varepsilon'^3b^2\left(\ \frac{5}{2}m^2\right).
\end{array}$$

Or il est démontré dans cet Ouvrage, que le premier et le cinquième terme sont nuls; et que les coefficiens numériques du second, troisième, et quatrième, sont respectivement égaux à $-\frac{135}{32}$, $+\frac{15}{8}$, $-\frac{5}{2}$ (Sur quoi Voyez les pages 36, 37, 345 de ce volume, et les pages 72, 73 du second volume).

Ainsi il n'y a pas un seul de ces nombres de *Lagrange* qui soit exact : et cela; à cause qu'il n'a pas pris en considération toutes

les combinaisons qui concourent à leur formation. Autrement, *Lagrange* aurait vû que le terme de la forme $K.m^2 \varepsilon'^2 \frac{\sin}{\cos} 2Ev + 2c'mv$ est *nul* dans le développement de la fonction $\frac{3}{2} q \frac{(\alpha' u')^3}{u_1^4} \frac{\sin}{\cos} (2v - 2v')$; et alors les trois parties de sa formule posée au bas de la page 38 auraient cessé d'exister chacune en particulier. Cela donnait de même un résultat nul ; mais sans offrir la singularité d'une destruction mutuelle entre leurs parties, qui avait quelque chose d'étonnant même pour *Lagrange* : au point qu'il regardait comme fatalité singulière (c'est sa phrase V. p. 43) ce qui n'était, dans le fond, qu'une heureuse combinaison d'erreurs propre à détruire les erreurs commises, en empêchant la réalité d'une fausse conséquence. Je regarde plutôt comme une fatalité, que *Lagrange* ait cru, par ce Mémoire, pouvoir établir comme douteuse l'accélération du moyen mouvement de la Lune, tandis que ses propres recherches tendaient à la mettre hors de doute, ainsi que *Laplace* l'a fait voir par une simple rectification de ses calculs (Voyez la page 229-332 du Tome VII déjà cité) : et que le même *Lagrange*, huit années plus tard, soit tombé le premier sur la véritable formule qui contient l'explication de ce phénomène sans s'en appercevoir. (Voyez ce que j'ai déjà dit à ce sujet dans les pages 63 et 64 de ce volume).

31. Parmi les inégalités dépendantes de l'angle $2fv$, celle dont l'argument est $Ev + c'mv + 2fv - 2gv - cv$ paroît, au premier coup d'oeil, susceptible d'acquérir un coefficient sensible, eu égard à la petitesse du diviseur $3 - 2g - c - (1 - c')m + 2(f - 1) = 0{,}0004125$. Mais, d'un autre côté, si l'on réfléchit que, en dernière analyse, on aurait dans δnt un terme de la forme

$$\frac{A'' e\varepsilon' \gamma^2 b^2 m^2}{(E + c'm + 2f - 2g - c)^2} \left\{ \begin{array}{l} K + \dfrac{K'(E + c'm + 2f - 2g - c)}{(E + c'm + 2f - g - c)^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2} \\ \quad + \dfrac{K''(E + c'm + 2f - 2g - c)}{(E + c'm + 2f - 2g)^2 - 1 + \frac{3}{2} m^2} \end{array} \right\} \sin Ev + c'mv + 2fv - 2gv - cv,$$

et que l'on a $\frac{A'' e\varepsilon' \gamma^2 b^2 m^2}{(E+c'm+2f-2g-c)^2}=0{,}0000007441$, on en conclura qu'il faudrait supposer aux coefficiens désignés par K, K', K'' des valeurs tout-à-fait improbables, pour rendre ce coefficient sensible. Ajoutez à cela, que la fonction

$$\frac{Km^2}{E+c'm+2f-2g-c}+\frac{K'm^2}{(E+c'm+2f-g-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2}+\frac{K''m^2}{(E+c'm+2f-2g)^2-1+\frac{3}{2}m^2}$$

doit se réduire, étant développée, à une quantité de l'ordre de m^2; et que, par conséquent, on doit regarder le coefficient de cette inégalité comme ayant pour diviseur une quantité de l'ordre de la première puissance de $E+c'm+2f-2g-c$, ainsi que cela a lieu pour tous les cas semblables. Au reste, nous pourrions obtenir directement la valeur approchée de ce coefficient; mais nous croyons superflu d'exposer ici le calcul qui établit l'inutilité de sa considération.

§ 2.

Des inégalités Lunaires dues à la différence des deux hémisphères terrestres.

32. Par des motifs tout-à-fait analogues à ceux qui ont été exposés au commencement du paragraphe précédent, la base de cette recherche sera fondée sur les formules suivantes, déduites de celles données dans la page 36 : c'est-à-dire que, après avoir fait, pour plus de simplicité

$$\mu''^2 = -\left(\frac{D}{\mathrm{a}}\right)^3 \cdot \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1}\right) \cdot K_{(3)} = -\left(\frac{D}{a}\right)^3 \left(\frac{a}{\mathrm{a}}\right)^3 \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1}\right) \cdot K_{(3)},$$

on prendra

$$R_1 = \quad q\,\frac{\mu''^2}{\mu^2} \cdot \frac{(\mathrm{a}u)^2}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}} \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{4} \sin^3\omega + 3s^2 . \sin\omega \cos^2\omega - \frac{3}{5}(1+s^2) \sin\omega . \cos fv \\ + 3s . \sin^2\omega \cos\omega . \sin 2fv - \frac{3}{4} \sin^3\omega . \cos 3fv \end{matrix} \right\};$$

$$R_2 = \quad q\,\frac{\mu''^2}{\mu^2} \cdot \frac{(\mathrm{a}u)^2}{s(1+ss)^{\frac{7}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} \cos\omega - \frac{3}{2} \cos^3\omega - (4\cos\omega - 6\cos^3\omega) s^2 \right\};$$

$$R_3 = \quad q\,\frac{\mu''^2}{\mu^2} \cdot \frac{(\mathrm{a}u)^2}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}} \left\{ \begin{matrix} \left(7\sin\omega - \frac{33}{4} \sin^3\omega + s^2 . \sin\omega\right) \sin fv \\ - \frac{(3-6.s^2)}{2.s} \sin^2\omega . \cos\omega . \cos 2fv + \frac{3}{4} \sin^3\omega . \sin 3fv \end{matrix} \right\};$$

$$R_4 = -q\,\frac{\mu''^2}{\mu^2} \cdot \frac{(\mathrm{a}u)^3}{(1+ss)^{\frac{9}{2}}} \left\{ 3\cos\omega - \frac{15}{2} \sin^2\omega \cos\omega + (6\cos\omega - 10\cos^3\omega) s^2 \right\};$$

$$R_5 = \quad q\,\frac{\mu''^2}{\mu^2} \cdot \frac{(\mathrm{a}u)^3}{(1+ss)^{\frac{9}{2}}} \left\{ \begin{matrix} \left\{ -\frac{12}{5} \sin\omega + 3 . \sin^3\omega + \left(\frac{81}{5} \sin\omega - \frac{81}{4} \sin^3\omega\right) s^2 + \frac{3}{5} \sin\omega . s^4 \right\} \\ - \left(\frac{15}{2} - 3s^2\right) s . \sin^2\omega \cos\omega . \cos 2fv - \left(1 - \frac{3}{4} s^2\right) \sin^3\omega . \sin 3fv \end{matrix} \right\};$$

pour les valeurs de R_1, R_2 . . R_5 qui doivent être ajoutées à celles posées dans les pages 265, 266, afin d'analyser les conséquences auxquelles donne lieu l'introduction de ces nouveaux termes dans les équations différentielles du mouvement de la Lune.

Il est vrai que cela suppose connue la valeur du coefficient $K_{(3)}$: mais quelle qu'elle soit, on sait positivement qu'elle doit être fort petite. Et comme ce coefficient se trouve multiplié par le cube de la fraction $\frac{D}{a} = \frac{1}{60,4}$, il serait absurde d'attendre des termes sensibles de la part de cette cause perturbatrice, si la considération des termes qui augmentent par les intégrations, ne réclamait pas une discussion scientifique, propre à faire taire les doutes. Je conçois *a priori* que de tels doutes n'ont pas de fondement; mais la complication du sujet ne permet pas de saisir d'un coup d'oeil l'ensemble des circonstances qui les atténuent et les font disparoître.

Les termes compris dans les expressions précédentes de $R_1, R_2 \,..\, R_5$ peuvent être partagés en trois classes, dont la première comprend ceux dépendans de l'angle fv; la seconde ceux dépendans de l'angle $2fv$; et la troisième, les termes qui sont fonctions de l'angle $3fv$. Je fais abstraction des termes indépendans de l'angle fv, parceque il ne peut résulter de leur existence, qu'une modification insensible dans le mouvement du périgée, ainsi que dans les équations séculaires dues à la variation de l'excentricité de l'orbite de la Terre.

En réfléchissant sur les combinaisons des argumens, formées avec l'angle fv, on reconnoît aussitôt qu'on aura l'inégalité ayant pour argument $Ev + c'mv - fv$: mais un raisonnement tout-à-fait semblable à celui que nous avons développé dans le n.° 28 du § précédent démontre *a priori* que le coefficient de cette inégalité doit être insensible.

Les combinaisons formées avec l'angle $2fv$ seraient associées avec les argumens de la latitude; et cette circonstance, jointe à celle de l'excessive petitesse des facteurs qui les multiplient, suffit pour démontrer qu'elles ne peuvent donner rien de sensible. Ainsi, la recherche actuelle ne peut porter que sur les combinaisons formées avec l'angle $3fv$. Or il est clair, que parmi celles-ci, il n'y a que l'inégalité ayant pour argument $3fv - 2gv - cv$, qui soit susceptible de faire naître quelques doutes sur la grandeur absolue du coefficient qui l'affecte dans l'expression de la longitude. Et ces doutes

se réduisent à bien peu de chose, lorsqu'on pense, que le coefficient de cette inégalité est nécessairement multiplié par la quantité

$$\frac{K_{(3)} e\gamma^2 \left(\frac{D}{a}\right)^3 \sin^3\omega}{3-2g-c} = K_{(3)}\, 0'',064\,,$$

et que la valeur probable de $K_{(3)}$ est inférieure à un millième.

Sans rappeler ici l'analyse déjà donnée à ce sujet (Voyez p. 159. et suivantes), nous allons exposer la suite des développemens qui rattachent la théorie de cette inégalité aux mêmes équations différentielles, desquelles nous avons tiré les inégalités Lunaires dues à l'action du Soleil et à la figure élliptique de la Terre.

Mais, pour ne point interrompre le fil de cette recherche, je plaçerai ici, en forme de Lemme préliminaire, le petit développement, propre à fournir dans l'expression de $\frac{\delta u}{u_1}$ le terme de la forme

$$\cos 2gv + cv \quad e\gamma^2 (Hm^2 + H'm^3 + H''m^4)\,,$$

dont nous connoissons seulement le coefficient H (Voyez p. 753 du second volume).

33. Pour cela, remarquons d'abord, que la valeur de δs posée dans la page 88 du 3.ième volume donne

$$3s_1\delta s = \cos 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{16}m^3 - \frac{381}{64}m^4\right).$$

Maintenant, si l'on suit la marche tracée depuis la page 132 jusqu'à la page 142 du 2.ième vol., on reconnoîtra aisément que l'équation différentielle en δu, dont il est ici question doit être formée par le procédé suivant.

$$R_4 + \frac{3}{2}\delta u = \cos 2gv + cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{3}{4}\right) + 6e\cos cv \,.\, \frac{\delta u}{u_1}.$$

$$= \cos 2gv + cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}m^2\right).$$

Produits partiels de $-6q.\frac{\delta u}{u_1}\frac{(\alpha' u')^3}{u_1^4}\frac{\sin}{\cos}(2v-2v')$.

Multiplicateur — Produit

$$2\frac{\sin}{\cos}2Ev \quad (-3)\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin}{\cos}\quad 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{117}{64}m+\frac{2337}{256}m^2\right)\\ -(2gv+cv)\quad e\gamma^2\left(\frac{81}{64}m^2\right)\end{array}\right.$$

$$2\frac{\sin}{\cos}2Ev+cv \quad e(6-6.m)\ldots\{ \quad 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{9}{8}m-\frac{183}{32}m^2-\frac{9}{8}m^2\right)$$

$$2\frac{\sin}{\cos}2Ev-cv \quad e(\;6\;)\ldots\{ \quad -(2gv+cv)\quad e\gamma^2\left(\frac{3}{2}m^2\right)$$

$$2\frac{\sin}{\cos}2Ev-2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\{ \quad -(2gv+cv)\quad e\gamma^2\left(\frac{27}{16}m^2\right)$$

$$2\frac{\sin}{\cos}2Ev+2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}m\right)\ldots\{ \quad 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{45}{16}m-\frac{771}{64}m^2+\frac{45}{32}m^2\right)$$

$$2\frac{\sin}{\cos}2Ev-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(\frac{15}{4}\right)\ldots\ldots\left\{\frac{\sin}{\cos}-(2gv+cv)\quad e\gamma^2\left(\frac{15}{4}m^2\right)\right.$$

$$2\frac{\sin}{\cos}2Ev+2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{15}{4}\right)\ldots\ldots\{ \quad 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{15}{4}m^2\right).$$

$$-6q.\frac{\delta u}{u_1}.\frac{(\alpha' u')^3}{u_1^4}\frac{\sin}{\cos}(2v-2v')=$$

$$\frac{\sin}{\cos}\quad 2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\frac{9}{64}m+\left(\frac{2337}{256}-\frac{183}{32}-\frac{9}{8}-\frac{771}{64}+\frac{45}{32}+\frac{15}{4}=-\frac{1179}{256}\right)m^2\right\}$$

$$-(2gv+cv)\quad e\gamma^2\left\{\frac{81}{64}+\frac{3}{2}+\frac{27}{16}+\frac{15}{4}=\frac{525}{64}\right\}m^2.$$

Le produit des deux termes

$$-2\frac{\cos}{\sin}-2Ev\;(m)\times\sin 2Ev-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{9}{32}m\right)$$

donne

$$\delta\left[(\alpha' u')^3\frac{\sin}{\cos}(2v-2v')\right]=\frac{\sin}{\cos}2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{9}{32}m^2\right).$$

Mais cette même fonction renferme les deux termes

$$\begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix} cv \quad e\left(-\frac{15}{4}m^2\right) + \begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix} 2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{9}{16}m^2\right)$$

(Voyez pages 230 et 231 du second vol.). Donc, en faisant le produit par $\frac{3}{2}+2\cos cv \quad e(-3) + 2\cos 2gv \quad \gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$, il viendra

$$\frac{3}{2}q\frac{\delta\left[(\alpha' u')^3 \begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix}(2v-2v')\right]}{u_1^4} = \begin{smallmatrix}sin\\cos\end{smallmatrix} 2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{-\frac{27}{64}+\frac{27}{16}-\frac{45}{16}=-\frac{99}{64}\right\}m^2.$$

Il suit de là que,

$$\delta R' = R_1 = \sin 2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\frac{9}{64}m - \left(\frac{1179}{256}+\frac{525}{64}+\frac{99}{64}=\frac{3675}{256}\right)m^2\right\};$$

$$-\int R_1 dv = \cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\frac{3}{64}m - \frac{1225}{256}m^2\right\}.$$

Le produit de $\cos cv \quad e\left(-\frac{45}{8}m-\frac{1059}{32}m^2\right)$ par $\frac{3}{2}\gamma^2\cos 2gv$, donne

$$-2\cos 2gv \quad \gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\int R_1 dv = \cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{135}{32}m-\frac{3177}{128}m^2\right).$$

La fonction $\frac{\delta R^V}{u_1}$ renferme les trois termes (Voyez la page 138 du second volume)

$$\begin{aligned}\frac{\delta R^V}{u_1} = \quad & \cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\frac{27}{256}m+\left(-\frac{3537}{1024}+\frac{1575}{256}-\frac{99}{64}=\frac{1179}{1024}\right)m^2\right\}\\ & \cos 2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{27}{64}m-\frac{387}{256}m^2\right)\\ & \cos cv \quad e\left(-\frac{135}{32}m-\frac{1557}{128}m^2\right);\end{aligned}$$

lesquels étant multipliés par $u_1 = 1+e\cos cv-\frac{\gamma^2}{4}\cos 2gv$, donnent

$$\delta R^V = \cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\left(\frac{27}{256}-\frac{27}{128}+\frac{135}{256}=\frac{27}{64}\right)m+\left(\frac{1179}{1024}-\frac{387}{512}+\frac{1557}{1024}=\frac{981}{512}\right)m^2\right\}.$$

En multipliant $-\frac{du_1}{dv}=e\sin cv-\frac{1}{2}\gamma^2\sin 2gv$ par

$$R_1 = \sin cv \; e\left(-\frac{45}{8}m - \frac{1059}{32}m^2\right) + \sin 2gv \; \gamma^2\left(-\frac{9}{16}m + \frac{177}{64}m^2\right)$$

(Voyez page 139 du second volume) on aura

$$-R_1\frac{du_1}{dv} = \cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left\{\left(\frac{9}{32} - \frac{45}{32} = -\frac{9}{8}\right)m - \left(\frac{177}{128} + \frac{1059}{128} = \frac{309}{32}\right)m^2\right\}.$$

Produits partiels de $-R_1\frac{d.\delta u}{dv}$.

Multiplicateur		Produit
$2\sin 2Ev$	$\left(\frac{3}{4}\right)\ldots\ldots$	$\cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left(\frac{9}{16}m + \frac{2313}{512}m^2\right)$ $\cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left(-\frac{75}{128}m^2\right)$
$2\sin 2Ev - cv$	$e\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\ldots$	$\cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left(-\frac{3}{4}m^2\right)$
$2\sin 2Ev + cv$	$e\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\ldots$	$\cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left(\frac{9}{16}m^2\right)$
$2\sin 2Ev - 2gv$	$\gamma^2\left(\frac{3}{8}\right)\ldots\ldots$	$\cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left(-\frac{45}{64}m^2\right)$
$2\sin 2Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{15}{16}\right)\ldots\ldots$	$\cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left(-\frac{15}{8}m^2\right)$
$2\sin 2Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{45}{16}\right)\ldots\ldots$	$\cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left(-\frac{15}{8}m^2\right)$.

$$-R_1\frac{d.\delta u}{dv} =$$

$$\cos 2gv + cv \; e\gamma^2\left\{\frac{9}{16}m + \left(\frac{2313}{512} - \frac{75}{128} - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{15}{8} - \frac{15}{8} - \frac{45}{64} = -\frac{363}{512}\right)m^2\right\}.$$

Produits partiels de $-2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1 dv$

Multiplicateur — Produit

$$2\cos 2Ev \qquad \left(-\frac{3}{4}\right)\ldots\begin{cases}\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{9}{4}m^2\right)\\ \cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{45}{16}m^2\right)\end{cases}$$

$$2\cos 2Ev-cv \qquad e\left(3\right)\ldots\left\{\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{45}{8}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev+cv \qquad e\left(1-\frac{1}{3}m\right)\ldots\left\{\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m+\frac{69}{64}m^2+\frac{m^2}{16}\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev-2gv \quad \gamma^2\left(\frac{3}{8}.m^{-1}-\frac{3}{32}m^0\right)\ldots\left\{\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{15}{8}m+\frac{15}{32}m^2+\frac{11}{8}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{15}{8}\right)\ldots\left\{\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{45}{8}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev+2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{3}{8}\right)\ldots\left\{\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{9}{8}m^2\right).\right.$$

$$-2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1 dv=$$

$$\cos 2gv+cv \; e\gamma^2\left\{-\left(\frac{3}{16}+\frac{15}{8}=\frac{33}{16}\right)m+\left(\frac{9}{4}+\frac{45}{16}+\frac{45}{8}+\frac{69}{64}+\frac{1}{16}+\frac{15}{32}+\frac{11}{8}-\frac{45}{8}+\frac{9}{8}=\frac{587}{64}\right)m^2\right\}$$

En réunissant ces différentes parties on formera cette équation différentielle ;

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\cos 2gv+cv \;\; e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\right)m^2+\left(-\frac{9}{16}+\frac{3}{32}-\frac{135}{32}+\frac{27}{64}-\frac{9}{8}+\frac{9}{16}-\frac{33}{16}=-\frac{441}{64}\right)m^3\\ +\left(-\frac{381}{64}+\frac{3}{2}-\frac{1225}{128}-\frac{3177}{128}+\frac{981}{512}-\frac{309}{32}-\frac{363}{512}+\frac{587}{64}=-\frac{9759}{256}\right)m^4\end{array}\right\}$$

d'où l'on tire, en multipliant par $\frac{1}{8}\left(1-\frac{3}{4}m^2\right)$;

$$\delta u= \cos 2gv+cv \;\; e\gamma^2\left\{\frac{3}{32}m^2-\frac{441}{512}m^3-\left(\frac{9759}{2048}+\frac{9}{128}=\frac{9903}{2048}\right)m^4\right\}.$$

Cette même fonction renferme le terme $\cos 2gv \quad \gamma^2\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{32}m^3 - \frac{177}{128}m^4\right)$ (Voyez p. 336 du 3.[ième] Volume) : Donc, le produit de δu par $\frac{1}{u_1} = 1 - e\cos cv$, donne

$$\frac{\delta u}{u_1} = \cos 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{32} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{32}\right)m^2 - \left(\frac{441}{512} - \frac{3}{64} = \frac{417}{512}\right)m^3 \\ -\left(\frac{9903}{2048} - \frac{177}{256} = \frac{8487}{2048}\right)m^4 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2gv \qquad \gamma^2\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{32}m^3 - \frac{177}{128}m^4\right).$$

Le terme affecté de l'argument $2gv + cv$ qui entre dans le développement de la fonction $4.\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2$ est composé des parties suivantes :

Produits partiels de $4\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2$.

Argument	Produit
$2\cos 2Ev \quad \left(2.m^2 + \frac{19}{3}m^3\right) \ldots\ldots$	$\cos 2gv + cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{39}{16}m^3 - \frac{779}{64}m^4 - \frac{247}{16}m^4\right)$
	$\cos 2gv + cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{27}{16}m^4\right)$
$2\cos 2Ev - cv \quad e\left(\frac{15}{4}m + \frac{257}{16}m^2\right)\ldots$	$\cos 2gv + cv \quad e\gamma^2\left(\frac{15}{8}m^3 + \frac{65}{16}m^4 + \frac{257}{32}m^4\right)$
$2\cos 2Ev + cv \quad e\left(-\frac{9}{4}m^2 - \frac{33}{8}m^3\right)\ldots$	$\cos 2gv + cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{27}{32}m^3 - \frac{99}{64}m^4 + \frac{549}{128}m^4\right).$

Donc, en prenant aussi le terme affecté de l'argument $2gv$ dans la page 338 du 3.[ième] Vol., on a ;

$$4\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 = \cos 2gv + cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{45}{32}m^3 - \frac{1851}{128}m^4\right)$$

$$\cos 2gv \qquad \gamma^2\left(\frac{3}{4}m^3 - \frac{7}{16}m^4\right).$$

Cela posé, rien ne manque, pour pouvoir développer nos fonctions d'une manière conforme au but de cette recherche.

Calcul du coefficient de l'inégalité Lunaire, ayant pour argument $3fv-2gv-cv$.

34. Soit $G=\frac{\mu''^2}{\mu^2}\sin^3\omega$, et

$$R_1=-\frac{3}{4}\cdot\frac{Gq.(au)^2\cos 3fv}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}};\qquad R_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{Gq(au)^2\sin 3fv}{(1+ss)^{\frac{7}{2}}};$$

$$R_5=-\frac{Gq\left(1-\frac{3}{4}s^2\right)(au)^3\sin 3fv}{(1+ss)^{\frac{9}{2}}}.$$

Comme il suffit de prendre $(1+ss)^{-\frac{7}{2}}=1-\frac{7}{2}s^2$; $(1+ss)^{-\frac{9}{2}}=1-\frac{9}{2}.s^2$, on peut réduire ces expressions à celles-ci;

$$R_1=Gq\left(-\frac{3}{4}+\frac{21}{8}s^2\right)(au)^2\cos 3fv;\qquad sR_3=\frac{3}{4}.Gqs(au)^2\sin 3fv;$$

$$R_5=Gq\left(-1+\frac{21}{4}s^2\right)(au)^3\sin 3fv.$$

En y faisant d'abord, $s=s_1=\gamma\sin gv$; $au=u_1=1+e\cos cv-\frac{\gamma^2}{4}\cos 2gv$, on aura;

$$u_1^2=\quad 1+2e\cos cv-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2gv-\frac{1}{4}e\gamma^2\cos 2gv+cv;$$

$$\left(-\frac{3}{4}+\frac{21}{8}s_1^2\right)u_1^2=-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}e\cos cv-\left(\frac{21}{16}-\frac{3}{8}=\frac{15}{16}\right)\gamma^2\cos 2gv$$
$$-\left(\frac{21}{16}-\frac{3}{16}=\frac{9}{8}\right)e\gamma^2\cos 2gv+cv;$$

$$\left(-1+\frac{21}{4}s_1^2\right)u_1^3=-1-3e\cos cv-\left(\frac{21}{8}-\frac{3}{4}=\frac{15}{8}\right)\gamma^2\cos 2gv$$
$$-\left(\frac{63}{16}-\frac{3}{4}=\frac{51}{16}\right)e\gamma^2\cos 2gv+cv;$$

$$\frac{3}{4}.s_1u_1^2=\quad\frac{3}{4}\gamma\sin gv+\frac{3}{4}e\gamma\sin gv+cv;$$

$$R_1 = -Gq\left\{\frac{3}{4}\cos 3fv + \frac{3}{4}e\cos 3fv - cv + \frac{15}{32}\gamma^2\cos 3fv - 2gv + \frac{9}{16}e\gamma^2\cos 3fv - 2gv - cv\right\};$$

$$sR_3 = \quad Gq\left\{\frac{3}{8}\gamma\cos 3fv - gv + \frac{3}{8}e\gamma\cos 3fv - gv - cv\right\};$$

$$R_5 = -Gq\left\{\sin 3fv + \frac{3}{2}e\sin 3fv - cv + \frac{15}{16}\gamma^2\sin 3fv - 2gv + \frac{51}{32}e\gamma^2\sin 3fv - 2gv - cv\right\}.$$

Mais, pour avoir égard aux termes dûs à l'action du Soleil, il faut changer au en $u_1 + \delta u$, s en $s_1 + \delta s$; et alors on a;

$$R_1 = Gq\left(-\frac{3}{4} + \frac{21}{8}s_1^2\right)\left\{1 + 2\frac{\delta u}{u_1} + \left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2\right\}u_1^2\cos 3fv + \frac{21}{8}Gq(2s_1\delta s + (\delta s)^2)(u_1 + \delta u)^2\cos 3fv;$$

$$sR_3 = \frac{3}{4}Gq\left\{1 + 2\frac{\delta u}{u_1} + \left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2\right\}s_1 u_1^2\sin 3fv + \frac{3}{4}Gq\,\delta s\,(u_1 + \delta u)^2\sin 3fv;$$

$$R_5 = Gq\left(-1 + \frac{21}{4}s_1^2\right)\left\{1 + 3\frac{\delta u}{u_1} + 3\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2\right\}u_1^3\sin 3fv + \frac{21}{4}Gq(2s_1\delta s + (\delta s)^2)(u_1 + \delta u)^3\sin 3fv.$$

Maintenant, il faudra faire dans ces expressions

$$2\frac{\delta u}{u_1} + \left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 =$$

$\cos 2gv$	γ^2	$\left\{m^2 + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0\right)m^3 - \left(\frac{177}{64} + \frac{7}{64} = \frac{23}{8}\right)m^4\right\}$
$\cos 2gv + cv$	$e\gamma^2$	$\left\{-\frac{5}{16}m^2 - \left(\frac{417}{256} + \frac{45}{128} = \frac{507}{256}\right)m^3 - \left(\frac{8487}{1024} + \frac{1851}{512} = \frac{12189}{1024}\right)m^4\right\}$
$\cos 2Ev$		$\left(2.m^2 + \frac{19}{3}m^3\right)$
$\cos 2Ev - cv$	e	$\left(\frac{15}{4}m + \frac{257}{16}m^2\right)$
$\cos 2Ev + cv$	e	$\left(-\frac{9}{4}m^2 - \frac{33}{8}m^3\right)$
$\cos 2Ev + 2gv$	γ^2	$\left(\frac{3}{8}m - \frac{61}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev + 2gv$	γ^2	$\left(\frac{1}{2}m^2\right)$
$\cos 2Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2$	$\left(-\frac{39}{32}m - \frac{779}{128}m^2\right)$
$\cos 2Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2$	$\left(-\frac{27}{32}m^2\right).$

$$3\frac{\delta u}{u_1}+3\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2=$$

$\cos 2gv$	$\gamma^2\left\{\ \frac{3}{2}m^2+\left(\frac{9}{16}-\frac{9}{32}=\frac{9}{32}\right)m^3-\left(\frac{531}{128}+\frac{21}{64}=\frac{573}{128}\right)m^4\right\}$
$\cos 2gv+cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{15}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev-cv$	$e\left(\ \frac{45}{8}m+\frac{771}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev+cv$	$e\left(-\frac{27}{8}m^2-\frac{99}{16}m^3\right)$
$\cos 2Ev-2gv$	$\gamma^2\left(\ \frac{9}{16}m-\frac{183}{64}m^2\right)$
$\cos 2Ev+2gv$	$\gamma^2\left(\ \frac{3}{4}m^2\right)$
$\cos 2Ev-2gv-cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{117}{64}m-\frac{2337}{256}m^2\right)$
$\cos 2Ev+2gv+cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{81}{64}m^2\right)$.

$$2s_1\,\delta s+(\delta s)^2=$$

$\cos 2gv+cv$	$e\gamma^2\left(\ m^2-\frac{3}{8}m^3-\frac{127}{32}m^4\right)$
$\cos 2Ev-2gv$	$\gamma^2\left(\ \frac{3}{8}m+\frac{3}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev-2gv-cv$	$e\gamma^2\left(-3.m^2\right)$;

$$(u_1+\delta u)^2=1+2e\cos cv+\cos 2Ev\left(\ 2.m^2+\frac{19}{3}m^3\right)$$
$$+\cos 2Ev+cv\ \ e\left(-\frac{1}{4}m^2+\frac{53}{24}m^3\right);$$

$$(u_1+\delta u)^3=1+3e\cos cv+\cos 2Ev\left(\ 3.m^2+\frac{19}{2}m^3\right)$$
$$+\cos 2Ev+cv\ \ e\left(\ \frac{9}{8}m^2+\frac{129}{16}m^3\right);$$

$$\{2s_1\delta s+(\delta s)^2\}(u_1+\delta u)^2=$$

$\cos 2gv$	$\gamma^2\left(\frac{3}{8}m^3+\frac{41}{32}m^4\right)$
$\cos 2gv+cv$	$e\gamma^2\left\{m^2-\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{64}=\frac{27}{64}\right)m^3-\left(\frac{127}{32}+3+\frac{3}{256}-\frac{53}{128}=\frac{1681}{256}\right)m^4\right\}$
$\cos 2Ev-2gv$	$\gamma^2\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev-2gv-cv$	$e\gamma^2\left\{\frac{3}{8}m+\left(\frac{3}{32}-3=-\frac{93}{32}\right)m^2\right\}$;

$$\{2s_1\delta s+(\delta s)^2\}(u_1+\delta u)^3=$$

$\cos 2gv$	$\gamma^2\left\{\frac{9}{16}m^3+\left(\frac{9}{64}+\frac{57}{32}=\frac{123}{64}\right)m^4\right\}$
$\cos 2gv+cv$	$e\gamma^2\left(m^2\right)$
$\cos 2Ev-2gv$	$\gamma^2\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev-2gv-cv$	$e\gamma^2\left\{\frac{9}{16}m+\left(\frac{9}{64}-3=-\frac{183}{64}\right)m^2\right\}$;

ce qui donnera les termes suivans

Produits partiels de $\left(-\frac{3}{4}+\frac{21}{8}s_1^2\right)u_1^2\cos 3fv.\left(2\frac{\delta u}{u_1}+\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2\right)$

Multiplicateur		Produit
$2\cos 3fv\ \left(-\frac{3}{8}\right)\ldots\ldots$	$\cos 3fv-2gv$	$\gamma^2\left(-\frac{3}{8}m^2\right)$
	$\cos 3fv-2gv-cv$	$e\gamma^2\left(\frac{15}{128}m^2+\frac{1521}{2048}m^3+\frac{36567}{8192}m^4\right)$
	$\cos 2Ev+3fv-2gv-cv$	$e\gamma^2\left(\frac{117}{256}m+\frac{2337}{1024}m^2\right)$
	$\cos 2Ev-3fv+2gv+cv$	$e\gamma^2\left(\frac{81}{256}m^2\right)$

$$2\cos 3fv - cv \quad e\left(-\frac{3}{8}\right)\ldots\left\{\begin{array}{ll}\cos 3fv-2gv-cv & e\gamma^2\left(-\frac{3}{8}m^2+\frac{69}{64}m^4\right)\\ \cos 2Ev+3fv-2gv-cv & e\gamma^2\left(-\frac{9}{64}m+\frac{183}{256}m^2\right)\\ \cos 2Ev-3fv+2gv+cv & e\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m^2\right)\end{array}\right.$$

$$2\cos 3fv-2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{15}{64}\right)\ldots\left\{\cos 2Ev+3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{225}{256}m-\frac{3855}{1024}m^2\right).\right.$$

$$\frac{21}{8}\cdot\left\{2s_1\delta s+(\delta s)^2\right\}(u_1+\delta u)^2\cos 3fv=$$

$$\cos 3fv-2gv-cv \qquad e\gamma^2\left(\frac{21}{16}m^2-\frac{567}{1024}m^3-\frac{35301}{4096}m^4\right)$$

$$\cos 2Ev+3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(\frac{63}{128}m-\frac{1953}{512}m^2\right).$$

Produits partiels de $\left(-1+\frac{21}{4}s_1^2\right)u_1^3\sin 3fv\left(3\frac{\delta u}{u_1}+3\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2\right)$.

Multiplicateur | Produit

$$2\sin 3fv\ \left(-\frac{1}{2}\right)\ \ldots\ldots\left\{\begin{array}{ll}\sin 3fv-2gv & \gamma^2\left(-\frac{3}{4}m^2\right)\\ \sin 3fv-2gv-cv & e\gamma^2\left(\frac{15}{64}m^2\right)\\ \sin 2Ev+3fv-2gv-cv & e\gamma^2\left(\frac{177}{128}m+\frac{2337}{512}m^2\right)\\ \sin 2Ev-3fv+2gv+cv & e\gamma^2\left(-\frac{81}{128}m^2\right)\end{array}\right.$$

$$2\sin 3fv-cv \quad e\left(-\frac{3}{4}\right)\ldots\left\{\begin{array}{ll}\sin 3fv-2gv-cv & e\gamma^2\left(-\frac{9}{8}m^2\right)\\ \sin 2Ev+3fv-2gv-cv & e\gamma^2\left(-\frac{27}{64}m+\frac{549}{256}m^2\right)\\ \sin 2Ev-3fv+2gv+cv & e\gamma^2\left(\frac{9}{16}m^2\right)\end{array}\right.$$

$$2\sin 3fv-2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{15}{32}\right)\ldots\left\{\sin 2Ev+3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{675}{256}m-\frac{11565}{1024}m^2\right)\right.$$

$$\frac{21}{4}\left\{2s_1\delta s+(\delta s)^2\right\}(u_1+\delta u)^3 \sin 3fv =$$

$$\sin 3fv-2gv-cv \qquad e\gamma^2\left(\frac{21}{8}m^2\right)$$

$$\sin 2Ev+3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(\frac{189}{128}m-\frac{3843}{512}m^2\right).$$

Produits partiels de $\frac{3}{4}s_1 u_1^2 \sin 3fv\left(2\frac{\delta u}{u_1}+\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2\right)$.

Multiplicateur			Produit
$2\cos 3fv-gv$	$\gamma\left(\frac{3}{16}\right)\ldots$	$\cos 2Ev+3fv-gv-cv$	$e\gamma\left(\frac{45}{64}m+\frac{771}{256}m^2\right)$
		$\cos 2Ev-3fv+gv+cv$	$e\gamma\left(-\frac{27}{64}m^2-\frac{99}{128}m^3\right)$
$2\cos 3fv-gv-cv$	$e\gamma\left(\frac{3}{16}\right)\ldots$	$\cos 2Ev+3fv-gv-cv$	$e\gamma\left(\frac{3}{8}m^2\right)$
		$\cos 2Ev-3fv+gv+cv$	$e\gamma\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{19}{16}m^3\right)$

Produits partiels de $\delta s(u_1+\delta u)^3$

Multiplicateur			Produit
$\cos 0v$	$(1)\ldots\ldots$	$\sin gv+cv$	$e\gamma\left(-m^2+\frac{3}{8}m^3+\frac{127}{32}m^4\right)$
		$\sin 2Ev-gv$	$\gamma\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{32}m^2\right)$
		$\sin 2Ev-gv-cv$	$e\gamma\left(-3.m^2\right)$
$2\cos cv$	$e(1)\ldots\ldots$	$\sin 2Ev-gv-cv$	$e\gamma\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{32}m^2\right)$
$2\cos 2Ev$	$(m^2)\ldots\ldots$	$\sin gv+cv$	$e\gamma\left(3.m^4\right)$
$2\cos 2Ev+cv$	$e\left(-\frac{1}{8}m^2+\frac{53}{48}m^3\right)\ldots$	$\sin gv+cv$	$e\gamma\left(\frac{3}{64}m^3+\frac{3}{256}m^4-\frac{53}{128}m^4\right)$.

$$\delta s\,(u_1 + \delta u)^2 =$$

$$\sin gv + cv \qquad e\gamma\left\{ -m^2 + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{64} = \frac{27}{64}\right)m^3 + \left(\frac{127}{32} + 3 + \frac{3}{256} - \frac{53}{128} = \frac{1681}{256}\right)m^4 \right\}$$

$$\sin 2Ev - gv \qquad \gamma\left(\frac{3}{8}m + \frac{3}{32}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - gv - cv \qquad e\gamma\left(\frac{3}{8}m - \left(3 - \frac{3}{32} = \frac{93}{32}\right)m^2 \right\} ;$$

$$\frac{3}{4}\delta s\,(u_1 + \delta u)^2 . \sin 3fv =$$

$$\cos 3fv - gv - cv \qquad e\gamma\left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{81}{512}m^3 + \frac{5043}{2048}m^4 \right)$$

$$\cos 2Ev + 3fv - gv - cv \qquad e\gamma\left(-\frac{9}{64}m + \frac{279}{256}m^2 \right).$$

Il suit de là, que les valeurs précédentes de R_1, R_5, sR_3 renferment ces termes; savoir

$$\frac{R_1}{G\,q} =$$

$$\cos 3fv \qquad \left(-\frac{3}{4} \right)$$

$$\cos 3fv - cv \qquad e\left(-\frac{3}{4} \right)$$

$$\cos 3fv - 2gv \qquad \gamma^2\left\{ -\frac{15}{32} - \frac{3}{8}m^2 \right)$$

$$\cos 3fv - 2gv - cv \qquad e\gamma^2\left\{ \begin{array}{l} -\frac{9}{16} + \left(\frac{15}{128} + \frac{21}{16} - \frac{3}{8} = \frac{135}{128}\right)m^2 + \left(\frac{1521}{2048} - \frac{567}{1024} = \frac{387}{2048}\right)m^3 \\ + \left(\frac{36567}{8192} + \frac{69}{64} - \frac{35301}{4096} = -\frac{25203}{8192}\right)m^4 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + 3fv - 2gv - cv \qquad e\gamma^2\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{117}{256} + \frac{63}{128} - \frac{9}{64} - \frac{225}{256} = -\frac{9}{128}\right)m \\ + \left(\frac{2337}{1024} + \frac{183}{256} - \frac{3855}{1024} - \frac{1953}{512} = -\frac{1173}{256}\right)m^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - 3fv + 2gv + cv \qquad e\gamma^2\left\{ \frac{81}{256} - \frac{3}{16} = \frac{33}{256} \right\} m^2.$$

$$(1) \ldots\ldots \frac{R_5}{Gq} =$$

$\sin 3fv$ $\quad \left(-1\right)$

$\sin 3fv - cv$ $\quad e\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\sin 3fv - 2gv$ $\quad \gamma^2\left(-\frac{15}{16}-\frac{3}{4}m^2\right)$

$\sin 3fv - 2gv - cv$ $\quad e\gamma^2\left\{-\frac{51}{32}+\left(\frac{15}{64}-\frac{9}{8}+\frac{21}{8}=\frac{111}{64}\right)m^2\right\}$

$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv$ $\quad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{189}{128}-\frac{675}{256}-\frac{27}{64}+\frac{117}{128}=-\frac{171}{256}\right)m \\ +\left(\frac{2337}{512}+\frac{549}{256}-\frac{11565}{1024}-\frac{3843}{512}=-\frac{12381}{1024}\right)m^2\end{array}\right\}$

$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv$ $\quad e\gamma^2\left\{-\frac{81}{128}+\frac{9}{16}=-\frac{9}{128}\right\}m^2.$

$$[1] \ldots\ldots \frac{sR_3}{Gq} =$$

$\cos 3fv - gv$ $\quad \gamma\left(\frac{3}{8}\right)$

$\cos 3fv - gv - cv$ $\quad e\gamma\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}m^2+\frac{81}{512}m^3+\frac{5043}{2048}m^4\right)$

$\cos 2Ev - 3fv + gv + cv$ $\quad e\gamma\left\{-\left(\frac{27}{64}-\frac{3}{8}=\frac{3}{64}\right)m^2+\left(\frac{19}{16}-\frac{99}{128}=\frac{53}{128}\right)m^3\right\}$

$\cos 2Ev + 3fv - gv - cv$ $\quad e\gamma\left\{\left(\frac{45}{64}-\frac{9}{64}=\frac{9}{16}\right)m+\left(\frac{771}{256}+\frac{3}{8}+\frac{279}{256}=\frac{573}{128}\right)m^2\right\}.$

35. Avant d'intégrer l'expression précédente de R_1, il faut observer que nos valeurs analytiques de c et g donnent

$$\begin{aligned}(3-2g-c)^{-1} &= -\frac{4}{3m^2}\left(1-\frac{81}{8}m-\frac{1539}{32}m^2-\frac{95029}{512}m^3-\frac{4407059}{6144}m^4\right)^{-1} \\ &= -\frac{4}{3m^2}\left(1+\frac{81}{8}m+\frac{9639}{64}m^2+\frac{562553}{256}m^3+\frac{394313449}{12288}m^4\right) \\ &= -\frac{4}{3m^2}\left(1+10,1.m+150,6.m^2+2197,5.m^3+32089,3.m^4\right);\end{aligned}$$

et que par conséquent cette série est divergente, lorsque $m=\frac{1}{13}$. D'après cela, nous ferons $\frac{x}{m^2}=(3-2g-c)^{-1}$, et nous retiendrons la constante x jusqu'à la fin du calcul : cependant, il ne faudra pas perdre de vue que nous regardons le produit $m^2(3-2g-c)^{-1}$, comme quantité de l'ordre zéro.

Cela posé, si l'on prend $f=1$;

$$(3f-c)^{-1}=\left(2+\frac{3}{4}m^2\right)^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}m^2; \quad (3f-2g)^{-1}=1+\frac{3}{2}m^2;$$

et si l'on fait

$$\beta'=\frac{9}{16}-\frac{135}{128}m^2-\frac{387}{2048}m^3+\frac{25203}{8192}m^4;$$

on aura

$$(2) \ldots\ldots -\frac{1}{Gq}.\int R_1 dv=$$

$\sin 3fv$	$\left(\frac{1}{4}\right)$
$\sin 3fv-cv$	$e\left(\frac{3}{8}-\frac{9}{64}m^2\right)$
$\sin 3fv-2gv$	$\gamma^2\left\{\frac{15}{32}+\left(\frac{3}{8}+\frac{45}{64}=\frac{69}{64}\right)m^2\right\}$
$\sin 3fv-2gv-cv$	$e\gamma^2\left(\frac{\beta' x}{m^2}\right)$
$\sin 2Ev+3fv-2gv-cv$	$e\gamma^2\left\{\frac{9}{256}m+\left(\frac{1173}{512}+\frac{9}{256}=\frac{1191}{512}\right)m^2\right\}$
$\sin 2Ev-3fv+2gv+cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{33}{512}m^2\right)$.

En multipliant cette intégrale par (Voyez p. 126 du vol. 3).

$$-\frac{2Q'q}{1+\gamma^2}e\cos cv=2\left(\frac{3}{2}m^2\right)e\cos cv$$

il viendra

$$(3) \ldots \frac{2Q'q}{(1+\gamma^2)}.\frac{e\cos cv}{Gq}.\int R_1 dv= \begin{array}{ll} \sin 3fv-cv & e\left(\frac{3}{8}m^2\right) \\ \sin 3fv-2gv-cv & e\gamma^2\left(\frac{45}{64}m^2\right); \end{array}$$

et en la multipliant par (Voyez p. 194 du 3.[ième] vol.)

$$2\cos 2gv \quad \gamma^2\left(\frac{3}{4}+P\right) = \quad 2\cos 2gv \quad \gamma^2\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}m^2\right)$$

on aura

$$(4) \ldots\ldots -2\cos 2gv \quad \gamma^2\left(\frac{3}{4}+P\right)\int R_1\,dv =$$

$$\sin 3fv - 2gv \qquad \gamma^2\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{8}m^2\right)$$

$$\sin 3fv - 2gv - cv \quad e\gamma^2\left\{\frac{9}{32}+\left(\frac{9}{16}-\frac{27}{256}=\frac{117}{256}\right)m^2\right\}.$$

Produits partiels de $-\frac{2}{Gq}\cdot\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1\,dv$

Multiplicateur | Produit

$$2\cos 2gv \qquad \gamma^2\left(-\frac{3}{2}m^2\right)\ldots\ldots\begin{cases}\sin 3fv-2gv & \gamma^2\left(-\frac{3}{8}m^2\right)\\ \sin 3fv-2gv-cv & e\gamma^2\left(-\frac{9}{16}m^2\right)\end{cases}$$

$$2\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{3}{4}m^2\right)\ldots\ldots\left\{\sin 3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m^2\right)\right.$$

Multiplicateur . . . . $2\cos 2Ev \quad \left(-3.m^2-\frac{3}{2}m^3+0.m^4\right)$

$$\text{Produit}\begin{cases}\sin 2Ev+3fv-2gv-cv & e\gamma^2x\left(-\frac{27}{16}+\frac{405}{128}m^2-\frac{27}{32}m\right)\\ \sin 2Ev-3fv+2gv+cv & e\gamma^2x\left(\frac{27}{16}-\frac{405}{128}m^2+\frac{27}{32}m\right)\end{cases}$$

Multiplicateur | Produit

$$2\cos 2Ev-cv \quad e\left(\frac{15}{2}m^2\right)\ldots\left\{\sin 2Ev+3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(\frac{225}{64}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev+cv \quad e\left(5.m^2\right)\ldots\left\{\sin 2Ev-3fv+2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{75}{32}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev-2gv \quad \gamma^2\left(\frac{3}{16}m-\frac{69}{64}m^2\right)\ldots\left\{\sin 2Ev+3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(\frac{9}{128}m-\frac{207}{512}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev+2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{15}{8}m^2\right)\ldots\left\{\sin 2Ev-3fv+2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{45}{64}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(3.m^2\right)..\left\{\sin 2Ev+3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left(\frac{3}{4}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev+2gv+cv \quad e\gamma^2\left(\frac{15}{4}m^2\right)..\left\{\sin 2Ev-3fv+2gv+cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{15}{16}m^2\right)\right.$$

La réunion de ces produits partiels donne

$$(5)\ \ldots\ldots -\frac{2}{Gq}\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1\,dv=$$

$$\sin 3fv-2gv \qquad \gamma^2\left(-\frac{3}{8}m^2\right)$$

$$\sin 3fv-2gv-cv \qquad e\gamma^2\left\{-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4}\right\}m^2$$

$$\sin 2Ev+3fv-2gv-cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{128}m+\left(\frac{225}{64}-\frac{207}{512}+\frac{3}{4}=\frac{1977}{512}\right)m^2\\+x\left(-\frac{27}{16}-\frac{27}{32}m+\frac{405}{128}m^2\right)\end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev-3fv+2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{75}{32}+\frac{45}{64}-\frac{15}{16}=-\frac{165}{64}\right)m^2\\+x\left(\frac{27}{16}+\frac{27}{32}m-\frac{405}{128}m^2\right)\end{array}\right\}$$

En ajoutant à l'expression précédente de R_1 les deux termes

$$\cos 2Ev+3fv-2gv \quad \gamma^2\left\{\left(\frac{63}{128}-\frac{9}{64}=\frac{45}{128}\right)m+\left(\frac{183}{256}+\frac{63}{512}=\frac{429}{512}\right)m^2\right\}$$

$$\cos 2Ev-3fv+2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{3}{16}m^2\right)$$

et multipliant ensuite par

$$-\frac{du_1}{dv}=2\sin cv \quad e\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}m^2\right)+2\sin 2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{16}m^2\right)$$

on aura ;

$$(6) \ldots\ldots -\frac{R_1}{Gq}\cdot\frac{du_1}{dv}=$$

$\sin 3fv - cv$	$e\left(\frac{3}{8}-\frac{9}{32}m^2\right)$
$\sin 3fv - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left\{\left(\frac{15}{64}-\frac{3}{16}=\frac{3}{64}\right)-\left(\frac{45}{256}+\frac{9}{64}-\frac{3}{16}=\frac{33}{256}\right)m^2\right\}$
$\sin 3fv - 2gv$	$\gamma^2\left(-\frac{3}{16}-\frac{9}{64}m^2\right)$
$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{45}{256}m-\frac{429}{1024}m^2\right)$
$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{3}{32}m^2\right)$.

Produits partiels de $-\frac{R_1}{Gq}\cdot\frac{d.\delta u}{dv}$.

Multiplicateur			Produit
$2\sin 2gv$	$\gamma^2\left(\frac{1}{2}m^2\right)\ldots$	$\sin 3fv - 2gv$	$\gamma^2\left(\frac{3}{8}m^2\right)$
		$\sin 3fv - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(\frac{3}{8}m^2\right)$
$2\sin 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(\frac{9}{64}m^2\right)\ldots$	$\sin 3fv - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(\frac{27}{256}m^2\right)$
$2\sin 2Ev$	$\left(m^2+\frac{13}{6}m^3\right)\ldots$	$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{9}{16}m^2\right)$
		$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{9}{16}m^2\right)$
$2\sin 2Ev - cv$	$e\left(\frac{15}{16}m+\frac{153}{64}m^2\right)\ldots$	$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{225}{512}m-\frac{2295}{2048}m^2\right)$
$2\sin 2Ev + cv$	$e\left(-\frac{15}{16}m^2\right)\ldots$	$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(\frac{225}{512}m^2\right)$
$2\sin 2Ev - 2gv$	$\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m^2\right)\ldots$	$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(\frac{9}{64}m^2\right)$
$2\sin 2Ev + 2gv$	$\gamma^2\left(\frac{1}{4}m^2\right)\ldots$	$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m^2\right)$
$2\sin 2Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(\frac{3}{8}m+\frac{771}{256}m^2\right)$	$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{9}{32}m-\frac{2313}{1024}m^2\right)$
$2\sin 2Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{25}{64}m^2\right)\ldots$	$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(\frac{75}{256}m^2\right)$.

La réunion de ces produits partiels donne

$$(7) \ldots\ldots -\frac{R_1}{Gq}\cdot\frac{d.\delta u}{dv}=$$

$sin\,3fv-2gv$ $\gamma^2\left(\frac{3}{8}m^2\right)$

$sin\,3fv-2gv-cv$ $e\gamma^2\left\{\frac{3}{8}+\frac{27}{256}=\frac{123}{256}\right\}m^2$

$sin\,2Ev+3fv-2gv-cv$ $e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\left(\frac{225}{512}+\frac{9}{32}=\frac{369}{512}\right)m \\ -\left(\frac{9}{16}+\frac{2295}{2048}-\frac{9}{64}+\frac{2313}{1024}=\frac{7785}{2048}\right)m^2\end{array}\right\}$

$sin\,2Ev-3fv+2gv+cv$ $e\gamma^2\left\{-\frac{9}{16}+\frac{225}{512}-\frac{3}{16}+\frac{75}{256}=-\frac{9}{512}\right\}m^2$

36. En multipliant la valeur de R_1 par

$$-\frac{ds_1}{dv}=\ 2\cos gv\ \ \gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}m^2\right)$$

on aura

$$[2] \ldots\ldots -\frac{R_1}{Gq}\cdot\frac{ds_1}{dv}=$$

$cos\,3fv-gv$ $\gamma\left(\frac{3}{8}+\frac{9}{32}m^2\right)$

$cos\,3fv-gv-cv$ $e\gamma\left(\frac{3}{8}+\frac{9}{32}m^2-\frac{27}{256}m^3-\frac{819}{1024}m^4\right)$

Produits partiels de $-\frac{R_1}{Gq}\cdot\frac{d.\delta s}{dv}$.

Multiplicateur	Produit
(*) $2\cos gv+cv\ \ e\gamma\left(m^2-\frac{3}{8}m^3-\frac{127}{32}m^4\right)$..	$\left\{\cos 3fv-gv-cv\ \ e\gamma\left(-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{32}m^3+\frac{381}{128}m^4\right)\right.$
$2\cos 2Ev-gv\ \ \gamma\left(-\frac{3}{16}m+\frac{21}{64}m^2\right)$..	$\left\{\cos 2Ev+3fv-gv-cv\ \ e\gamma\left(\frac{9}{64}m-\frac{63}{256}m^2\right)\right.$.

(*) Voyez p. 88 du 3.ième vol.

$$[3] \ldots\ldots -\frac{R_1}{Gq}.\frac{d.\delta s}{dv} =$$

$$\cos 3fv - gv - cv \qquad e\gamma^2\left(-\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{32}m^3 + \frac{381}{128}m^4\right)$$

$$\cos 2Ev + 3fv - gv - cv \quad e\gamma^2\left(\frac{9}{64}m - \frac{63}{256}m^2\right).$$

Le produit de (Voyez p. 276 de ce vol. et la page 184 du 3.ième vol.)

$$-2P\gamma \sin gv = \quad 2\sin gv \quad \gamma\left(-\frac{3}{2}m^2 + \frac{9}{16}m^3 + \frac{237}{64}m^4\right)$$

par $-\frac{1}{Gq}.\int R_1 dv$, donne ;

$$[4] \ldots\ldots \frac{2Pq \sin gv}{Gq}.\int R_1 dv =$$

$$\cos 3fv - gv \qquad \gamma\left(-\frac{3}{8}m^2\right)$$

$$\cos 3fv - gv - cv \quad e\gamma\left\{-\frac{9}{16}m^2 + \frac{27}{128}m^3 + \left(\frac{711}{512} + \frac{27}{128} = \frac{819}{512}\right)m^4\right\}$$

Produits partiels de $-\frac{2}{Gq}\left(\frac{d^2.\delta s}{dv^2} + \delta s\right)\int R_1 dv.$

Multiplicateur | Produit

$2\sin gv + cv \; e\gamma\left(3.m^2 - \frac{9}{8}m^3 - \frac{381}{32}m^4\right) \ldots \left\{\cos 3fv - gv - cv \; e\gamma\left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{32}m^3 - \frac{381}{128}m^4\right)\right.$

$2\sin 2Ev - gv \; \gamma\left(\frac{3}{2}m^2\right) \ldots\ldots \left\{\cos 2Ev + 3fv - gv - cv \; e\gamma^2\left(-\frac{9}{16}m^2\right).\right.$

$$[5] \ldots\ldots -\frac{2}{Gq}\left(\frac{d^2.\delta s}{dv^2} + \delta s\right)\int R_1 dv =$$

$$\cos 3fv - gv - cv \qquad e\gamma\left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{32}m^3 - \frac{381}{128}m^4\right)$$

$$\cos 2Ev + 3fv - gv - cv \quad e\gamma\left(-\frac{9}{16}m^2\right).$$

37. Maintenant, si l'on nomme S la somme des termes compris dans la fonction $Gqm^2.\{[1]+[2]\ ..\ +[5]\}$; et U la somme des termes renfermés dans la fonction

$$Gqm^2\{(1)+2.(2)+(3)\ ...\ +(7)\},$$

on aura

$$S=$$

$\cos 3fv-gv$ $\quad Gq\gamma\left\{\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}\right)m^2-\left(\frac{3}{8}-\frac{9}{32}=\frac{3}{32}\right)m^4\right\}$

$\cos 3fv-gv-cv$ $\quad Gqe\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}\right)m^2+\left(\frac{9}{32}-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}-\frac{9}{16}+\frac{3}{4}=-\frac{21}{32}\right)m^4\\+\left(\frac{81}{512}-\frac{27}{256}+\frac{9}{32}+\frac{27}{128}-\frac{9}{32}=\frac{135}{512}\right)m^5\\+\left(\frac{5043}{2048}-\frac{819}{1024}+\frac{381}{128}+\frac{819}{512}-\frac{381}{128}=\frac{6681}{2048}\right)m^6\end{array}\right\}$

$\cos 2Ev+3fv-gv-cv$ $\quad Gqe\gamma\left\{\left(\frac{9}{16}+\frac{9}{64}=\frac{45}{64}\right)m^3+\left(\frac{573}{128}-\frac{63}{256}-\frac{9}{16}=\frac{939}{256}\right)m^4\right\}$

$\cos 2Ev-3fv+gv+cv$ $\quad Gqe\gamma\left(-\frac{3}{64}m^4+\frac{53}{128}m^5\right)$;

$$U=$$

$\sin 3fv$ $\quad Gq\left\{-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\right\}m^2$

$\sin 3fv-cv$ $\quad Gqe\left\{\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}\right)m^2+\left(\frac{3}{8}-\frac{9}{32}-\frac{9}{32}=-\frac{3}{16}\right)m^4\right\}$

$\sin 3fv-2gv$ $\quad Gq\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{15}{16}-\frac{15}{16}+\frac{3}{16}-\frac{3}{16}=0\right)m^2\\+\left(\frac{69}{32}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{8}-\frac{9}{64}+\frac{3}{8}=\frac{105}{64}\right)m^4\end{array}\right\}$

$\sin 3fv-2gv-cv$ $\quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}2\beta'x+\left(\frac{9}{32}-\frac{51}{32}+\frac{3}{64}=-\frac{81}{64}\right)m^3\\+\left(\frac{111}{64}+\frac{45}{64}+\frac{117}{256}-\frac{3}{4}+\frac{123}{256}-\frac{33}{256}=\frac{639}{256}\right)m^4\end{array}\right\}$

$$\sin 2Ev+3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} x\, m^2\left(-\frac{27}{16}-\frac{27}{32}m+\frac{405}{128}m^2\right) \\ +\left(\frac{9}{128}-\frac{171}{256}+\frac{9}{128}-\frac{45}{256}-\frac{369}{512}=-\frac{729}{512}\right)m^3 \\ +\left(\frac{1191}{256}-\frac{12381}{1024}+\frac{1977}{512}-\frac{429}{1024}-\frac{7785}{2048}=-\frac{15969}{2048}\right)m^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev-3fv+2gv+cv \quad Gqe\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} x\, m^2\left(\frac{27}{16}+\frac{27}{32}m-\frac{405}{128}m^2\right) \\ -\left(\frac{9}{128}+\frac{33}{256}+\frac{165}{64}+\frac{3}{32}+\frac{9}{512}=\frac{1479}{512}\right)m^4 \end{array} \right\}.$$

La fonction désignée par S fournit les termes, que les trois fonctions R_1, R_5, sR_3, posées dans le n.° 34, introduisent dans le second membre de l'équation différentielle en δs; et la fonction U, donne les termes que les mêmes fonctions introduisent dans le second membre de l'équation différentielle en δu.

38. Il suit de là, que si l'on fait pour plus de simplicité;

$$\frac{y}{m^2}=\left\{(3f-g-c)^2-1-\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1}; \quad \beta''=\frac{3}{4}-\frac{21}{32}m^2+\frac{135}{512}m^3+\frac{6681}{2048}m^4;$$

on a;

$$\delta s = \cos 3fv-gv \quad Gq\gamma\left(\ \frac{m^2}{4}\ \right)+\cos 3fv-gv-cv \quad Gqe\gamma\left(\ \beta'' y\ \right);$$

$$3s_1\,\delta s = \sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{4}m^2\right)+\sin 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left(-\frac{3}{2}\beta'' y\right);$$

abstraction faite des autres termes; lesquels seraient incomplets, n'ayant pas encore considéré les termes, que la figure de la Terre fait naître dans le développement de l'expression de $\delta R'$, due à l'action du Soleil. Par le même motif, la valeur de β'' est incomplète; mais son premier terme est exact; et pour le moment, il suffit de savoir, que la quantité $\beta'' y$ doit être traitée comme étant de l'ordre zéro.

En réunissant cette valeur de $3s_1\,\delta s$ à la précédente de U, on pourra former cette équation en δu;

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\sin 3fv \quad Gq\left(-\frac{1}{2}m^2\right)+\sin 3fv-cv \quad Gqe\left(-\frac{3}{8}m^2\right)$$
$$+\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{8}m^2\right)+\sin 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left(2\beta' x-\frac{3}{2}\beta''y\right);$$

d'où l'on tire en intégrant, et faisant

$$K'=\frac{2\beta' x-\frac{3}{2}\beta'' y}{(3f-2g-c)^2-1+\frac{3}{2}m^2};$$

$$\delta u= \sin 3fv \quad Gq\left(-\frac{m^2}{16}\right)+\sin 3fv-cv \quad Gqe\left(-\frac{m^2}{8}\right)$$
$$+\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)+\sin 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left(K'\right).$$

Le produit de cette valeur de δu par $\frac{1}{u_1}=1-e\cos cv$, donne

$$\frac{\delta u}{u_1}= \sin 3fv \quad Gq\left(-\frac{m^2}{16}\right)+\sin 3fv-cv \quad Gqe\left\{\frac{1}{32}-\frac{1}{8}=-\frac{3}{32}\right\}m^2$$
$$+\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)+\sin 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2(K'');$$

où $K''=K'-\frac{1}{8}$.

39. Revenons maintenant à l'équation différentielle en δs. En prenant seulement $\beta''=\frac{3}{4}$, nous aurons, pour résultat de la première approximation ;

$$\delta s= \cos 3fv-gv-cv \quad Gqe\gamma\left(\frac{3}{4}y\right); \quad -\frac{d.\delta s}{dv}=\sin 3fv-gv-cv \quad Gqe\gamma\left(\frac{3}{4}y\right).$$

Donc, en prenant $R_1=\frac{3}{2}\sin 2Ev$, $R_3=\frac{3}{2}\cos 2Ev$, il viendra

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s= m^2\left(R_3\delta s-R_1\frac{d.\delta s}{dv}\right)$$
$$= \cos 2Ev-3fv+gv+cv \quad Gqe\gamma\left(\frac{9}{8}m^2 y\right);$$

et par conséquent ;

$$\delta s = \cos 2Ev - 3fv + gv + cv \quad Gq e\gamma \left(-\tfrac{9}{32} m\gamma\right).$$

Ce terme de δs donne

$$\tfrac{3}{2}\cos 2Ev.\delta s - \tfrac{3}{2}\sin 2Ev.\tfrac{d.\delta s}{dv} = \cos 3fv - gv - cv \quad Gq e\gamma\left(-\tfrac{27}{64} m\gamma\right).$$

En le réunissant avec le correspondant qui entre dans l'expression de S, on aura, en négligeant les termes multipliés par m^4;

$$-\tfrac{d^2.\delta s}{dv^2} - \left(1 + \tfrac{3}{2} m^2\right)\delta s = \cos 3fv - gv - cv \quad Gq e\gamma\left(\tfrac{3}{4} m^2 - \tfrac{27}{64} m^3\gamma\right);$$

d'où l'on tire;

$$\delta s = \cos 3fv - gv - cv \quad Gq e\gamma\left(\tfrac{3}{4}\gamma - \tfrac{27}{64} m\gamma^2\right).$$

Il suit de là, que

$$-\tfrac{d^2.\delta s}{dv^2} - \left(1 + \tfrac{3}{2} m^2\right)\delta s = \tfrac{3}{2}\cos 2Ev.\delta s - \tfrac{3}{2}\sin 2Ev.\tfrac{d.\delta s}{dv}$$

$$= \cos 2Ev - 3fv + gv + cv \quad Gq e\gamma\left(\tfrac{9}{8} m^2\gamma - \tfrac{81}{128} m^3\gamma^2\right);$$

et que en intégrant on a

$$\delta s = \cos 2Ev - 3fv + gv + cv \quad Gq e\gamma\left(-\tfrac{9}{32} m\gamma + \tfrac{81}{512} m^2\gamma^2 - \tfrac{45}{256} m^2\gamma\right).$$

Cela posé, nous pouvons calculer le troisième terme du coefficient, qui, dans la valeur de δs affecte l'argument $3fv - gv - cv$. Les deux termes précédens de δs étant multipliés par $R_3 = -3m^2 + \tfrac{3}{2}\cos 2Ev$ (Voyez p. 386) on obtient;

$$R_3\delta s = \cos 3fv - gv - cv \quad Gq e\gamma\left\{-\tfrac{27}{128} m\gamma + \tfrac{243}{2048} m^2\gamma^2 - \left(\tfrac{9}{4} + \tfrac{135}{1024} = \tfrac{2439}{1024}\right) m^2\gamma\right\}.$$

Le produit de $R_1 = \tfrac{3}{2}\sin 2Ev$ par

$$-\tfrac{d.\delta s}{dv} = \sin 2Ev - 3fv + gv + cv \quad Gq e\gamma\left\{-\tfrac{9}{32} m\gamma + \tfrac{81}{512} m^2\gamma^2 + \left(\tfrac{9}{16} - \tfrac{45}{256} = \tfrac{99}{256}\right) m^2\gamma\right\}$$

donne

$$-R_1\frac{d.\delta s}{dv} = \cos 3fv - gv - cv \quad Gqe\gamma\left(-\frac{27}{128}m\gamma + \frac{243}{2048}m^2\gamma^2 + \frac{297}{1024}m^2\gamma\right).$$

Et en multipliant $-\int R_1 dv = \frac{3}{4}\cos 2Ev$ par

$$\frac{d^2.\delta s}{dv^2} + \delta s = \cos 2Ev - 3fv + gv + cv \quad Gqe\gamma\left(-\frac{9}{8}m^2\gamma\right)$$

on aura

$$-2\left(\frac{d^2.\delta s}{dv^2} + \delta s\right)\int R_1 dv = \cos 3fv - gv - cv \quad Gqe\gamma\left(-\frac{27}{32}m^2\gamma\right).$$

Nous avons

$$R_2 - \frac{3}{2} = -6e\cos cv - 6\frac{\delta u}{u_1}(1 - 4e\cos cv)$$

$$= -6e\cos cv - 6(1 - 4e\cos cv)Gq\left\{-\frac{m^2}{16}\sin 3fv - \frac{3m^2e}{32}\sin 3fv - cv\right\}$$

$$= -6e\cos cv + Gq\left\{\frac{3}{8}m^2\sin 3fv - \frac{3}{16}m^2 e\sin 3fv - cv\right\}.$$

En multipliant cette fonction par

$$s_1 + \delta s = \gamma\sin gv + Gq.\frac{m^2\gamma}{4}\sin 3fv - gv,$$

nous aurons

$$\left(R_2 - \frac{3}{2}\right)(s_1 + \delta s) = \cos 3fv - gv - cv \quad Gqe\gamma\left\{-\frac{3}{32} - \frac{3}{4} = -\frac{27}{32}\right\}m^2.$$

En ajoutant ces termes avec celui qui fait partie de la valeur de S, on formera cette équation différentielle

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2}m^2\right)\delta s =$$

$$\cos 3fv - gv - cv \quad Gqe\gamma\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{4}m^2 - \left(\frac{27}{128} + \frac{27}{128} = \frac{27}{64}\right)m^3\gamma + \left(\frac{243}{2048} + \frac{243}{2048} = \frac{243}{1024}\right)m^4\gamma^2 \\ -\left(\frac{2439}{1024} - \frac{297}{1024} + \frac{27}{32} = \frac{1503}{512}\right)m^4\gamma - \left(\frac{21}{32} + \frac{27}{32} = \frac{3}{2}\right)m^4\end{array}\right\};$$

qui étant intégrée, donne

$$\delta s = \cos 3fv - gv - cv \quad Gqe\gamma\left(\tfrac{3}{4}y - \tfrac{27}{64}my^2 + \tfrac{243}{1024}m^2y^3 - \tfrac{1503}{512}m^2y^2 - \tfrac{3}{2}m^2y\right).$$

Mais on a trouvé plus haut, les termes

$$\delta s = \cos 3fv - gv \qquad Gq\gamma\left(\tfrac{m^2}{4}\right)$$
$$\cos 2Ev - 3fv + gv + cv \quad Gqe\gamma\left(-\tfrac{9}{32}my + \tfrac{81}{512}m^2y^2 - \tfrac{45}{256}m^2y\right);$$

partant, nous avons

$$3s_1\delta s = \sin 3fv - 2gv \qquad Gq\gamma^2\left(-\tfrac{3}{8}m^2\right)$$
$$\sin 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left(-\tfrac{9}{8}y + \tfrac{81}{128}my^2 - \tfrac{729}{2048}m^2y^3 + \tfrac{4509}{1024}m^2y^2 + \tfrac{9}{4}m^2y\right)$$
$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad Gqe\gamma^2\left(-\tfrac{27}{64}my + \tfrac{243}{1024}m^2y^2 - \tfrac{135}{512}m^2y\right).$$

En ajoutant à ces termes de δs le terme $\left(\frac{3}{8}m + \frac{3}{32}m^2\right)\gamma \sin 2Ev - gv$, fourni par l'action du Soleil, et faisant ensuite le carré, il viendra

$$\tfrac{3}{2}(\delta s)^2 = \sin 3fv - 2gv - cv \qquad Gqe\gamma^2\left(-\tfrac{81}{512}m^2y\right)$$
$$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left(\tfrac{27}{64}my + \tfrac{27}{256}m^2y - \tfrac{243}{1024}m^2y^2\right).$$

40. De là, on peut tirer le premier terme du coefficient des deux argumens $2Ev + 3fv - 2gv - cv$, $2Ev - 3fv + 2gv + cv$ qui entrent dans l'expression de $\frac{\delta u}{u_1}$. En effet; nous avons d'abord l'équation différentielle

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2} - \left(1 - \tfrac{3}{2}m^2\right)\delta u = 3s_1\delta s + \tfrac{3}{2}(\delta s)^2 =$$

$$Gqe\gamma^2.\tfrac{27}{64}my\left\{\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv - \sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv\right\},$$

qui donne en l'intégrant;

$$\delta u = Gqe\gamma^2.\tfrac{9}{64}my.\left\{\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv - \sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv\right\}.$$

Mais cela ne suffit pas ; il faut encore avoir le premier terme du coefficient qui affecte l'argument $2Ev-3fv+2gv$.

Pour cela, on prendra $R'=\frac{3}{2}\sin 2Ev$;

$$\delta R'=-6\sin 2Ev.\frac{\delta u}{u_1}\,;\qquad \delta R^r=-\frac{9}{2}\cos 2Ev.\frac{\delta u}{u_1}\,;$$

$$\frac{\delta u}{u_1}=\ \sin 3fv-2gv\ \ Gq\gamma^2\left(\frac{1}{4}\right);\qquad -\frac{d.\delta u}{dv}=\ \cos 3fv-2gv\ \ Gq\gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right);$$

ce qui donnera

$$\delta R'=\cos 2Ev-3fv+2gv\ Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{4}\right);\ \delta R^r=\sin 2Ev-3fv+2gv\ Gq\gamma^2\left(\frac{9}{16}\right);$$

$$-\int\delta R'\,dv=\ \sin 2Ev-3fv+2gv\ \ Gq\gamma^2\left(\ \frac{3}{4}\right);$$

$$-R'\frac{d.\delta u}{dv}=\ \sin 2Ev-3fv+2gv\ \ Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{16}\right);$$

et par conséquent

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=\ \sin 2Ev-2fv+2gv\ \ Gq\gamma^2\left\{\frac{3}{2}-\frac{3}{16}+\frac{9}{16}=\frac{15}{8}\right\}m^2;$$

d'où l'on tire

$$\delta u=\ \sin 2Ev-3fv+2gv\ \ Gq\gamma^2\left(-\frac{15}{32}m\right).$$

En réunissant ce terme aux deux précédens, et faisant ensuite le produit par $\frac{1}{u_1}=1-e\cos cv$, il évident qu'on obtient ;

$$\frac{\delta u}{u_1}=\ \sin 2Ev+3fv-2gv-cv\ \ Gqe\gamma^2\left(\ \frac{9}{64}m\gamma\right)$$

$$\sin 2Ev-3fv+2gv+cv\ \ Gqe\gamma^2\left(\ \frac{15}{64}m-\frac{9}{64}m\gamma\right)$$

$$\sin 2Ev-3fv+2gv\qquad Gq\gamma^2\left(-\frac{15}{32}m\right).$$

41. Il n'est pas moins clair que le carré du binome

$$\frac{\delta u}{u_1}=\ \frac{15}{8}me\cos 2Ev-cv+Gq\frac{\gamma^2}{4}\sin 3fv-2gv\,,$$

donne ;

$$\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 = \sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv \;\; Gqe\gamma^2\left(\frac{15}{32}m\right).$$

Donc en posant

$$\delta R' = (-6\sin 2Ev + 12e\sin 2Ev - cv)\frac{\delta u}{u_1} + 15\sin 2Ev.\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2,$$

et retenant seulement les termes affectés de l'argument $3fv - 2gv - cv$ il viendra

$$\delta R' = \cos 3fv - 2gv - cv \;\; Gqe\gamma^2\left\{\left(\frac{27}{64} - \frac{27}{64} = 0\right)m\gamma + \left(\frac{225}{64} - \frac{45}{64} - \frac{45}{16} = 0\right)m\right\}.$$

On voit par là, que la partie de ce coefficient, qui entre dans le développement de $\delta R'$, est au moins de l'ordre de m^2. Ainsi en prenant seulement

$$-2m^2\int R_1 dv = \sin 3fv - 2gv - cv \;\; Gqe\gamma^2\left(\frac{9}{8}x\right) \quad \text{(Voyez p. 451);}$$

$$3s_1\delta s = \sin 3fv - 2gv - cv \;\; Gqe\gamma^2\left(-\frac{9}{8}y + \frac{81}{128}my^2\right) \quad \text{(V. p. 462)}$$

on formera l'équation différentielle

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv} - \left(1 - \frac{3}{2}m^2\right)\delta u = \sin 3fv - 2gv - cv \;\; Gqe\gamma^2\left\{\frac{9}{8}(x - y) + \frac{81}{128}my^2\right\},$$

qui donne le terme

$$\delta u = \sin 3fv - 2gv - cv \;\; Gqe\gamma^2\left\{\frac{9}{8}(y - x) - \frac{81}{128}my^2\right\},$$

exact jusqu'aux quantités de l'ordre $Gqme\gamma^2$, inclusivement.

42. Cherchons maintenant le terme, multiplié par m, du coefficient de cet argument qui entre dans la valeur de $\frac{\delta u}{u_1}$. Pour cela, remarquons, qu'en prenant

$$R' = \frac{3}{2}\sin 2Ev\,;\quad \delta R' = -6\sin 2Ev\,.\frac{\delta u}{u_1}\,;\quad \delta R^{v} = -\frac{9}{2}\cos 2Ev\,.\frac{\delta u}{u_1}\,;$$

$$\frac{\delta u}{u_1} = \sin 2Ev - 3fv + 2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{15}{32}m\right);$$

$$-\frac{d.\delta u}{dv} = \cos 2Ev - 3fv + 2gv \quad Gq\gamma^2\left(\ \frac{15}{32}m\right);$$

on obtient ;

$$\delta R' = \cos 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(\frac{45}{32}m\right);\quad \delta R^{v} = \sin 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{135}{128}m\right);$$

$$-R'\frac{d.\delta u}{dv} = \sin 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(\frac{45}{128}m\right).$$

Il suit de là que ,

$$R_1 = R' + \delta R' = \cos 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{15}{32} + \frac{45}{32}m\right)$$ (Voyez p. 449).

$$-\int R_1 dv = \sin 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(\ \frac{15}{32} - \frac{45}{32}m\right);$$

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2}m^2\right)\delta u = \sin 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left\{-\frac{3}{8}m^2 - \left(\frac{45}{16} - \frac{45}{128} + \frac{135}{128} = \frac{225}{64}\right)m^3\right\},$$

d'où l'on tire en intégrant ;

$$\delta u = \sin 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{75}{32} + \frac{3}{16} = \frac{81}{32}\right)m\right\}.$$

En réunissant ce terme de δu avec celui trouvé plus haut, et multipliant les deux termes par $\frac{1}{u_1} = 1 - e\cos cv$, on aura

$$\frac{\delta u}{u_1} = \sin 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\frac{9}{8}(y - x) - \frac{81}{128}my^2 - \frac{1}{8} - \frac{81}{64}m\right\}$$
$$+\sin 3fv - 2gv \qquad Gq\gamma^2\left(\frac{1}{4} + \frac{81}{32}m\right).$$

43. Ces résultats donnent ces deux termes

$$2\frac{\delta u}{u_1} - m^2 \int R_1 dv =$$

$$\begin{array}{ll} \sin 3fv - 2gv - cv & Gqe\gamma^2 \left\{ \frac{9}{4}(y-x) + \frac{9}{16}x - \frac{81}{64}my^2 - \frac{1}{4} - \frac{81}{32}m \right\} \\ \sin 3fv - 2gv & Gq\gamma^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{81}{16}m \right); \end{array}$$

desquels on tire, en les multipliant par $-1 + 2e\cos cv$;

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = \begin{array}{ll} \sin 3fv - 2gv - cv & Gqe\gamma^2 \left\{ \frac{3}{4} + \frac{243}{32}m - \frac{9}{4}y + \frac{27}{16}x + \frac{81}{64}my^2 \right\} \\ \sin 3fv - 2gv & Gq\gamma^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{81}{16}m \right). \end{array}$$

$$\delta nt = \begin{array}{ll} \cos 3fv - 2gv - cv & Gqe\gamma^2 . \frac{x}{m^2} \left\{ -\frac{3}{4} - \frac{243}{32}m + \frac{9}{4}y - \frac{27}{16}x - \frac{81}{64}my^2 \right\} \\ \cos 3fv - 2gv & Gq\gamma^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{81}{16}m \right). \end{array}$$

En remplacant x et y par leurs valeurs développées; c'est-à-dire par

$$x = -\frac{4}{3} - \frac{27}{2}m; \quad y = -\frac{2}{3} - \frac{13}{2}m,$$

on obtient

$$\frac{3}{4} + \frac{243}{32}m - \frac{9}{4}y + \frac{27}{16}x + \frac{81}{64}my^2 =$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = 0\right) + \left(\frac{243}{32} + \frac{117}{8} + \frac{9}{16} - \frac{729}{32} = 0\right)m;$$

ce qui démontre, que le premier terme du coefficient de l'argument $3fv - 2gv - cv$ est de l'ordre zéro par rapport à la lettre m.

44. Passons maintenant à la recherche des termes de l'ordre subséquent, qui font partie du coefficient de l'argument $3fv - 2gv - cv$ dans l'expression de δnt. Pour cela, il est indispensable d'avoir dans δu et $m\delta nt$ les termes multipliés par m^2, qui appartiennent aux coefficiens des quatre argumens $2Ev \pm 3fv + 2gv$, $2Ev + 3fv - 2gv - cv$, $2Ev - 3fv + 2gv + cv$. Ainsi, il faut avant tout nous procurer ces termes auxiliaires. A cet effet, on prendra d'abord

$$\delta R' = \left\{ -6 \sin 2Ev + 12 e \sin 2Ev - cv + 12 e \sin 2Ev + cv \right\} \frac{\delta u}{u_1} - 3 \cos 2Ev . m\delta nt,$$

et à l'aide de l'expression précédente de $\frac{\delta u}{u_1}$ (Voyez p. 465) et du terme $m\delta nt = \cos 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2 \left(\frac{m}{2} \right)$, on trouvera ;

$$\begin{aligned} \delta R' = \; & \cos 2Ev + 3fv - 2gv \quad & Gq\gamma^2 \left(\tfrac{3}{4} \right) \\ & \cos 2Ev - 3fv + 2gv \quad & Gq\gamma^2 \left\{ -\tfrac{3}{4} - \left(\tfrac{243}{32} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{267}{32} \right) m \right\} \\ & \cos 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad & Gqe\gamma^2 \left\{ \tfrac{27}{8}(y - x) - \left(\tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{15}{8} \right) \right\} \\ & \cos 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad & Gqe\gamma^2 \left\{ -\tfrac{27}{8}(y - x) + \left(\tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{15}{8} \right) \right\}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en intégrant

$$\begin{aligned} (1) \ldots - \int \delta R' dv = \; & \sin 2Ev + 3fv - 2gv \quad & Gq\gamma^2 \left(-\tfrac{1}{4} \right) \\ & \sin 2Ev - 3fv + 2gv \quad & Gq\gamma^2 \left\{ \tfrac{3}{4} + \left(\tfrac{267}{32} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{315}{32} \right) m \right\} \\ & \sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad & Gqe\gamma^2 \left\{ -\tfrac{27}{16}(y - x) + \tfrac{15}{16} \right\} \\ & \sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad & Gqe\gamma^2 \left\{ \tfrac{27}{16}(y - x) - \tfrac{15}{16} \right\}. \end{aligned}$$

Le produit de $-\int R_1 dv = \frac{3}{4} \cos 2Ev$ par

$$\frac{d^2 . \delta u}{dv^2} + \delta u = \sin 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{8}(x - y) \right\},$$

donne

$$(2) \ldots\ldots - 2 \left(\frac{d^2 . \delta u}{dv^2} + \delta u \right) \int R_1 dv =$$

$$\begin{aligned} & \sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad & Gqe\gamma^2 \left\{ \tfrac{27}{32}(y - x) \right\} \\ & \sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad & Gqe\gamma^2 \left\{ -\tfrac{27}{32}(y - x) \right\}. \end{aligned}$$

Le produit de $-\frac{d.\delta u}{dv} = \cos 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{81}{32}m\right)$ par

$$R_1 = \frac{3}{2}\sin 2Ev - 3e\sin 2Ev - cv - 3e\sin 2Ev + cv,$$

donne

$$(3) \ldots\ldots -R_1\frac{d.\delta u}{dv} =$$

$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{16}-\frac{243}{128}m\right) + \sin 2Ev + 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{16}\right)$$
$$+ Gq.\frac{3}{8}e\gamma^2\left\{\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv + \sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv\right\}.$$

La fonction

$$\frac{\delta R^V}{u_1} = \left\{-\frac{9}{2}\cos 2Ev + 9e\cos 2Ev - cv + 9e\cos 2Ev + cv\right\}\frac{\delta u}{u_1} + 3\sin 2Ev . m\delta nt$$

donne ces termes ;

$$\begin{array}{lll}
\frac{\delta R^V}{u_1} = & \sin 2Ev + 3fv - 2gv & Gq\gamma^2\left(-\frac{9}{16}\right) \\
& \sin 2Ev - 3fv + 2gv & Gq\gamma^2\left\{\ \frac{9}{16} + \left(\frac{729}{128} + \frac{3}{4} = \frac{825}{128}\right)m\right\} \\
& \sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv & Gqe\gamma^2\left\{-\frac{81}{32}(y-x) + \left(\frac{9}{32} + \frac{9}{8} = \frac{45}{32}\right)\right\} \\
& \sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv & Gqe\gamma^2\left\{\ \frac{81}{32}(y-x) - \left(\frac{9}{32} + \frac{9}{8} = \frac{45}{32}\right)\right\};
\end{array}$$

lesquels étant multipliés par $u_1 = 1 + e\cos cv$, on obtient ;

$$\begin{array}{lll}
(4)\ldots\delta R^V = & \sin 2Ev + 3fv - 2gv & Gq\gamma^2\left(-\frac{9}{16}\right) \\
& \sin 2Ev - 3fv + 2gv & Gq\gamma^2\left(\ \frac{9}{16} + \frac{825}{128}m\right) \\
& \sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv & Gqe\gamma^2\left\{-\frac{81}{32}(y-x) + \left(\frac{45}{32} - \frac{9}{32} = \frac{9}{8}\right)\right\} \\
& \sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv & Gqe\gamma^2\left\{\ \frac{81}{32}(y-x) + \left(\frac{45}{32} - \frac{9}{32} = \frac{9}{8}\right)\right\}.
\end{array}$$

Mais nous avons (Voyez p. 462)

$$(5) \ldots\ldots\ 3s_{\prime}\delta s + \frac{3}{2}(\delta s)^2 =$$

$$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left(\frac{27}{64}m\gamma + \frac{27}{256}m^2\gamma - \frac{243}{1024}m^2\gamma^2\right)$$

$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad Gqe\gamma^2\left(-\frac{27}{64}m\gamma + \frac{243}{1024}m^2\gamma^2 - \frac{135}{512}m^2\gamma\right).$$

Donc en réunissant les termes compris dans la fonction

$$(5) + m^2\left\{2.(1) + (2) + (3) + (4)\right\} + U$$

on aura cette équation différentielle en δu :

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2}m^2\right)\delta u =$$

$$\sin 2Ev + 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left\{-\frac{1}{2} - \frac{3}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{5}{4}\right\}m^2$$

$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv \quad Gq\gamma^2\left\{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{15}{8}\right)m^2 + \left(\frac{315}{16} - \frac{243}{128} + \frac{825}{128} = \frac{1551}{64}\right)m^3\right\}$$

$$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{15}{8} + \frac{3}{8} + \frac{9}{8} = \frac{27}{8}\right)m^2 \\ + \left(\frac{27}{8} - \frac{27}{32} + \frac{81}{32} - \frac{27}{16} = \frac{27}{8}\right)m^2x - \frac{243}{1024}m^2\gamma^2 \\ + \frac{27}{64}m\gamma + \left(\frac{27}{256} - \frac{27}{8} + \frac{27}{32} - \frac{81}{32} = -\frac{1269}{256}\right)m^2\gamma\end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{3}{8} - \frac{15}{8} - \frac{9}{8} = -\frac{21}{8}\right)m^2 \\ - \left(\frac{81}{32} + \frac{27}{8} - \frac{27}{32} - \frac{27}{16} = \frac{27}{8}\right)m^2x - \frac{27}{64}m\gamma \\ + \frac{243}{1024}m^2\gamma^2 + \left(\frac{27}{8} - \frac{27}{32} + \frac{81}{32} - \frac{135}{512} = \frac{2457}{512}\right)m^2\gamma\end{array}\right\};$$

de laquelle on tire

$$\delta u =$$

$$\sin 2Ev + 3fv - 2gv \qquad Gq\gamma^2\left(-\frac{5}{32}m^2\right)$$

$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv \qquad Gq\gamma^2\left\{-\frac{15}{32}m - \left(\frac{1551}{256} + \frac{255}{256} = \frac{903}{128}\right)m^2\right\}$$

$$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{64}m\gamma - \frac{81}{1024}m^2\gamma^2 \\ -\left(\frac{423}{256} - \frac{3}{8} = \frac{327}{256}\right)m^2\gamma + \frac{9}{8}m^2 + \frac{9}{8}m^2x\end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{9}{64}m\gamma + \frac{81}{1024}m^2\gamma^2 \\ +\left(\frac{819}{512} - \frac{3}{8} = \frac{627}{512}\right)m^2\gamma - \frac{7}{8}m^2 - \frac{9}{8}m^2x\end{array}\right\}.$$

En multipliant cette expression de δu par $\frac{1}{u_1} = 1 - e\cos cv$, on aura ;

$$\frac{\delta u}{u_1} =$$

$$\sin 2Ev + 3fv - 2gv \qquad Gq\gamma^2\left(-\frac{5}{32}m^2\right)$$

$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv \qquad Gq\gamma^2\left(-\frac{15}{32}m - \frac{903}{128}m^2\right)$$

$$\sin 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{64}m\gamma - \frac{81}{1024}m^2\gamma^2 - \frac{327}{256}m^2\gamma + \frac{9}{8}m^2x \\ +\left(\frac{9}{8} + \frac{5}{64} = \frac{77}{64}\right)m^2\end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{9}{64}m\gamma + \frac{81}{1024}m^2\gamma^2 + \frac{627}{512}m^2\gamma - \frac{9}{8}m^2x \\ +\frac{15}{64}m + \left(\frac{903}{256} - \frac{7}{8} = \frac{679}{256}\right)m^2\end{array}\right\}.$$

Il est facile d'obtenir les termes semblables renfermés dans le carré de $\frac{\delta u}{u_1}$: voici les parties dont ils sont composés.

Multiplicateur Produit

$$2\cos 2Ev\ (m^2)\ldots\left\{\begin{array}{ll} \sin 2Ev+3fv-2gv-cv & Gqe\gamma^2\left\{\ \frac{9}{8}m^2(y-x)-\frac{m^2}{8}\right\} \\ \sin 2Ev-3fv+2gv+cv & Gqe\gamma^2\left\{-\frac{9}{8}m^2(y-x)+\frac{m^2}{8}\right\} \\ \sin 2Ev+3fv-2gv & Gq\gamma^2\left(\ \frac{m^2}{4}\right) \\ \sin 2Ev-3fv+2gv & Gq\gamma^2\left(-\frac{m^2}{4}\right) \end{array}\right.$$

$$2\cos 2Ev-cv\ \ e\left(\frac{15}{8}m+\frac{257}{32}m^2\right)\left\{\sin 2Ev+3fv-2gv-cv\ \ Gqe\gamma^2\left(\frac{15}{32}m+\frac{257}{128}m^2+\frac{1215}{256}m^2\right)\right.$$

$$2\cos 2Ev+cv\ \ e\left(-\frac{9}{8}m^2\right)\ldots\left\{\sin 2Ev-3fv+2gv+cv\ \ Gqe\gamma^2\left(\frac{9}{32}m^2\right)\right. ;$$

partant, il est clair qu'on a

$$\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2=$$

$$\begin{array}{ll} \sin 2Ev+3fv-2gv-cv & Gqe\gamma^2\left\{\ \frac{15}{32}m+\frac{9}{8}m^2(y-x)+\left(\frac{257}{128}+\frac{1215}{256}-\frac{1}{8}=\frac{1697}{256}\right)m^2\right\} \\ \sin 2Ev-3fv+2gv+cv & Gqe\gamma^2\left\{-\frac{9}{8}m^2(y-x)+\left(\frac{9}{32}+\frac{1}{8}=\frac{13}{32}\right)m^2\right\} \\ \sin 2Ev+3fv-2gv & Gq\gamma^2\left(\ \frac{m^2}{4}\right) \\ \sin 2Ev-3fv+2gv & Gq\gamma^2\left(-\frac{m^2}{4}\right). \end{array}$$

Maintenant, si l'on fait $\frac{d.\delta nt}{dv}=2\frac{\delta u}{u_1}(-1+2e\cos cv)$, on aura ;

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=\begin{array}{ll} \sin 2Ev+3fv-2gv-cv & Gqe\gamma^2\left(-\frac{9}{32}my\right) \\ \sin 2Ev-3fv+2gv+cv & Gqe\gamma^2\left\{\ \frac{9}{32}my-\left(\frac{15}{32}+\frac{15}{16}=\frac{45}{32}\right)m\right\} \\ \sin 2Ev-3fv+2gv & Gq\gamma^2\left(\ \frac{15}{16}m\right) ; \end{array}$$

d'où l'on tire

$$\delta nt = \cos 2Ev + 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left(\tfrac{9}{64}m\gamma\right)$$

$$\cos 2Ev - 3fv + 2gv + cv \quad Gqe\gamma^2\left(\tfrac{45}{64}m - \tfrac{9}{64}m\gamma\right)$$

$$\cos 2Ev - 3fv + 2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\tfrac{15}{16}m\right).$$

45. Cela posé nous pouvons développer les différentes parties de la fonction $\delta R'$.

Produits partiels de $-6\frac{(a'u')^3}{u_1^4}\sin(2v-2v').\frac{\delta u}{u_1}$.

Multiplicateur . . . . $2\sin 2Ev \ (-3)$

Produit

$$\cos 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(\tfrac{45}{32}m + \tfrac{2709}{128}m^2\right)$$

$$\cos 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2\left(\tfrac{15}{32}m^2\right)$$

$$\cos 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left\{-\tfrac{231}{64}m^2 - \tfrac{27}{8}m^2x + \gamma\left(-\tfrac{27}{64}m + \tfrac{981}{256}m^2 + \tfrac{243}{1024}m^2\gamma\right)\right\}$$

$$\cos 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\tfrac{45}{64}m + \tfrac{27}{8}m^2x - \tfrac{2037}{256}m^2\\ +\gamma\left(\tfrac{27}{64}m - \tfrac{1881}{512}m^2 - \tfrac{243}{1024}m^2\gamma\right)\end{array}\right\}$$

Multiplicateur — Produit

$$2\sin 2Ev - cv \ e(6+6.m) \ldots \left\{\cos 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left(-\tfrac{45}{16}m - \tfrac{2709}{64}m^2 - \tfrac{45}{16}m^2\right)\right.$$

$$2\sin 2Ev + cv \ e(6) \ldots\ldots \left\{\cos 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left(-\tfrac{15}{16}m^2\right).\right.$$

Produits partiels de $15\frac{(\alpha' u')^3}{u_1^4} sin(2v - 2v').\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2$

Multiplicateur Produit

$$2\sin 2Ev\ \left(\frac{15}{2}\right)\ldots\begin{cases}\cos 3fv - 2gv & Gq\gamma^2\left(\ \frac{15}{8}m^2\right)\\ \cos 3fv - 2gv & Gq\gamma^2\left(-\frac{15}{8}m^2\right)\\ \cos 3fv - 2gv - cv & Gqe\gamma^2\left\{\ \frac{225}{64}m + \frac{25455}{512}m^2 + \frac{135}{16}m^2(y-x)\right\}\\ \cos 3fv - 2gv - cv & Gqe\gamma^2\left\{\ \frac{195}{64}m^2 - \frac{135}{16}m^2(y-x)\right\}\end{cases}$$

$$2\sin 2Ev - cv\ \ e\left(-15\right)\ \ldots\ldots\ \left\{\cos 3fv - 2gv - cv\ \ Gqe\gamma^2\left(\ \frac{15}{4}m^2\right)\right.$$

$$2\sin 2Ev + cv\ \ e\left(-15\right)\ \ldots\ldots\ \left\{\cos 3fv - 2gv - cv\ \ Gqe\gamma^2\left(-\frac{15}{4}m^2\right).\right.$$

$$\delta.\left[(\alpha' u')^3 \sin(2v - 2v')\right] = -2\cos 2Ev.\times m\delta nt$$

$$= \cos 3fv - 2gv \qquad Gq\gamma^2\left(\ \frac{15}{16}m^2\right)$$

$$\cos 3fv - 2gv - cv\ \ Gqe\gamma^2\left\{-\frac{45}{64}m^2 + \left(\frac{9}{64} - \frac{9}{64} = 0\right)m^2 y\right\}$$

$$\cos 2Ev - 3fv + 2gv\ \ Gq\gamma^2\left(-\frac{m}{2}\right).$$

$$\frac{3}{2}\frac{\delta\left[(\alpha' u')^3 \sin(2v - 2v')\right]}{u_1^4} = -\left(\frac{3}{2} - 6e\cos cv\right)2\cos 2Ev.m\delta nt$$

$$= \cos 3fv - 2gv \qquad Gq\gamma^2\left(\ \frac{45}{32}m^2\right)$$

$$\cos 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left\{-\frac{135}{128} - \frac{45}{16} = -\frac{495}{128}\right\}m^2$$

$$\cos 2Ev - 3fv + 2gv\ \ Gq\gamma^2\left(-\ \frac{3m}{4}\right).$$

En multipliant cette expression par

$$-4\frac{\delta u}{u_1} = \ 2\cos 2Ev - cv\ \ e\left(-\frac{15}{4}m\right)$$

on aura le terme

$$-4\frac{\delta u}{u_1}\times\frac{3}{2}\frac{\delta[(a'u')^3 \sin(2v-2v')]}{u_1^4} = \cos 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left(\frac{45}{16}m^2\right).$$

En réunissant ces différentes parties de la fonction $\delta R'$ il viendra

$$\delta R' =$$

$$\cos 3fv-2gv \qquad Gq\gamma^2\left\{\frac{45}{32}m+\left(\frac{2709}{128}+\frac{15}{32}+\frac{15}{8}-\frac{15}{8}+\frac{45}{32}=\frac{2949}{128}\right)m^2\right\}$$

$$\cos 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{225}{64}-\frac{45}{64}-\frac{45}{16}=0\right)m+\left(\frac{27}{8}-\frac{27}{8}=0\right)m^2x \\ +\left\{\begin{array}{l}-\frac{231}{64}-\frac{2037}{256}-\frac{2709}{64}-\frac{45}{16}-\frac{15}{16}+\frac{25455}{512} \\ +\frac{195}{64}+\frac{15}{4}-\frac{15}{4}-\frac{495}{128}+\frac{45}{16}=-\frac{1059}{512}\end{array}\right\}m^2 \\ +\left(\frac{135}{16}-\frac{135}{16}=0\right)m^2(y-x)+\left(\frac{27}{64}-\frac{27}{64}=0\right)my \\ +\left(\frac{243}{1024}-\frac{243}{1024}=0\right)m^2y^2+\left(\frac{981}{256}-\frac{1881}{512}=\frac{81}{512}\right)m^2y\end{array}\right\}.$$

46. En ajoutant à ces deux termes de $\delta R'$ les termes semblables posés dans la page 449, on aura

$$R'+\delta R'=R_1=\cos 3fv-2gv \qquad Gq\gamma^2\left\{-\frac{15}{32}+\frac{45}{32}m+\left(\frac{2949}{128}-\frac{3}{8}=\frac{2901}{128}\right)m^2\right\}$$

$$\cos 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left\{-\frac{9}{16}-\left(\frac{1059}{512}-\frac{135}{128}=\frac{519}{512}\right)m^2+\frac{81}{512}m^2y\right\};$$

et par conséquent,

$$(1)\ldots-\int R_1\,dv = \sin 3fv-2gv \qquad Gq\gamma^2\left\{\frac{15}{32}-\frac{45}{32}m-\left(\frac{2901}{128}-\frac{45}{64}=\frac{2811}{128}\right)m^2\right\}$$

$$\sin 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\frac{x}{m^2}\left\{\frac{9}{16}+\frac{519}{512}m^2-\frac{81}{512}m^2y\right\}.$$

Cette même intégrale renferme les deux termes (Voyez p. 451)

$$\sin 3fv \quad Gq\left(\frac{1}{4}\right)+\sin 3fv-cv \quad Gqe\left(\frac{3}{8}\right)$$

lesquels étant multipliés par $2\cos 2gv\ \gamma^2\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}m^2\right)$ (Voyez p. 452) donnent

$$(2) \ldots\ldots -2\cos 2gv\ \gamma^2\left(\tfrac{3}{4}+P\right)\int R_1 dv =$$

$$\sin 3fv-2gv\ Gq\gamma^2\left(\tfrac{3}{16}+\tfrac{3}{8}m^2\right) + \sin 3fv-2gv-cv\ Gqe\gamma^2\left(\tfrac{9}{32}\right).$$

Maintenant, si l'on fait le produit de

$$-\int R_1 dv = \cos 2Ev\left(\tfrac{3}{4}\right) + \sin 3fv\ Gq\left(\tfrac{1}{4}\right) + \sin 3fv-cv\ Gqe\left(\tfrac{3}{8}\right)$$
$$+\sin 2Ev-3fv+2gv\ Gq\gamma^2\left(\tfrac{3}{4}\right)+\sin 2Ev+3fv-2gv\ Gq\gamma^2\left(-\tfrac{1}{4}\right),$$

par $\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u =$

$$\cos 2gv\ \gamma^2\left(-\tfrac{3}{2}m^2\right) + \cos 2Ev\ \left(-3.m^2\right)$$
$$+\sin 2Ev-3fv+2gv\ Gq\gamma^2\left(-\tfrac{15}{8}m^2\right) + \sin 2Ev+3fv-2gv\ Gq\gamma^2\left(\tfrac{5}{4}m^2\right),$$

on aura les termes suivans ;

Produits partiels de $-2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1 dv$

Multiplicateur		Produit
$2\cos 2Ev$	$\left(\frac{3}{4}\right)\ldots$	$\sin 3fv-2gv\ Gq\gamma^2\left(\frac{45}{32}m^2\right)$
		$\sin 3fv-2gv\ Gq\gamma^2\left(\frac{15}{16}m^2\right)$
$2\sin 3fv$	$Gq\left(\frac{1}{4}\right)\ldots$	$\sin 3fv-2gv\ Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{8}m^2\right)$
$2\sin 2Ev-3fv+2gv$	$Gq\gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\ldots$	$\sin 3fv-2gv\ Gq\gamma^2\left(\frac{9}{4}m^2\right)$
$2\sin 2Ev+3fv-2gv$	$Gq\gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right)\ldots$	$\sin 3fv-2gv\ Gq\gamma^2\left(\frac{3}{4}m^2\right)$

lesquels étant réunis donnent ;

$$(3) \; . \; . \; . \; . \; . \; -2\left(\frac{d^2.\delta u}{dv^2}+\delta u\right)\int R_1 dv =$$

$$\sin 3fv - 2gv \quad Gq\gamma^2 \left\{ \frac{45}{32}+\frac{15}{16}-\frac{3}{8}+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=\frac{159}{32} \right\} m^2.$$

Le produit de

$$R_1 = \cos 3fv \; Gq\left(-\frac{3}{4}\right)+\cos 3fv - cv \; Gqe\left(-\frac{3}{4}\right)+\cos 3fv - 2gv \; Gq\gamma^2\left(-\frac{15}{32}\right),$$

par $\quad -\frac{du_1}{dv} = \; 2\sin cv \;\; e\left(\frac{1}{2}\right) + \; 2\sin 2gv \;\; \gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right),$

donne

$$(4) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; -R_1\frac{du_1}{dv} =$$

$$\sin 3fv - 2gv - cv \;\; Gqe\gamma^2\left(\frac{15}{64}-\frac{3}{16}=\frac{3}{64}\right)+\sin 3fv - 2gv \;\; Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{16}-\frac{9}{64}m^2\right).$$

En faisant le produit de

$$R_1 = \; 2\sin 2Ev \qquad \left(\frac{3}{4}\right)+2\cos 3fv \qquad Gq\left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$+2\cos 2Ev - 3fv + 2gv \;\; Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{8}\right)+2\cos 2Ev + 3fv - 2gv \;\; Gq\gamma^2\left(\frac{3}{8}\right),$$

par $\qquad -\frac{d.\delta u}{dv} =$

$$\sin 2gv \qquad \gamma^2\left(m^2\right)$$

$$+\sin 2Ev \qquad \left(2.m^2\right)$$

$$+\cos 2Ev - 3fv + 2gv \;\; Gq\gamma^2\left\{ \frac{15}{32}m + \left(\frac{903}{128}-\frac{15}{16}=\frac{783}{128}\right)m^2 \right\}$$

$$+\cos 2Ev + 3fv - 2gv \;\; Gq\gamma^2\left(\frac{15}{32}m^2\right)$$

on aura les termes suivans ;

Produits partiels de $-R_1\frac{d.\delta u}{dv}$.

Multiplicateur		Produit
$2\sin 2Ev$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(\frac{45}{128}m+\frac{2349}{512}m^2\right)$ $\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{45}{128}m^2\right)$
$2\cos 3fv$	$Gq\left(-\frac{3}{8}\right)$	$\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(\frac{3}{8}m^2\right)$
$2\cos 2Ev-3fv+2gv$	$Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{8}\right)$ ...	$\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{4}m^2\right)$
$2\cos 2Ev+3fv-2gv$	$Gq\gamma^2\left(\frac{3}{8}\right)$ ...	$\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{4}m^2\right)$

lesquels étant réunis, donnent;

$$(5) \ldots\ldots\ldots -R_1\frac{d.\delta u}{dv}=$$

$$\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left\{\frac{45}{128}m+\left(\frac{2349}{512}-\frac{45}{128}+\frac{3}{8}-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1593}{512}\right)m^2\right\}.$$

En prenant

$$\delta R^{IV}+\frac{3}{2}\delta u=\left(6e\cos cv-\frac{3}{2}\gamma^2\cos 2gv\right)\frac{\delta u}{u_1};$$

$$\frac{\delta u}{u_1}=\sin 3fv \quad Gq\left(-\frac{m^2}{16}\right)+\sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(\frac{1}{4}\right);$$

on aura

$$(6) \ldots\ldots\ \delta R^{IV}+\frac{3}{2}\delta u=\sin 3fv-2gv \qquad Gq\gamma^2\left(\frac{3}{64}m^2\right)$$
$$\sin 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left(\frac{3}{4}\right).$$

La fonction

$$\delta R^{V}=-\frac{9}{2}\cos 2Ev.\frac{\delta u}{u_1}-9\cos 2Ev\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2+3\sin 2Ev.m\delta nt,$$

donne

$$-\frac{9}{2}\cos 2Ev.\frac{\delta u^2}{u_1}= \sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left\{-\frac{135}{128}m-\left(\frac{8127}{512}-\frac{45}{128}=\frac{7947}{512}\right)m^2\right\};$$

$$-9\cos 2Ev.\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2= \sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left\{-\frac{9}{8}-\frac{9}{8}=-\frac{9}{4}\right\}m^2;$$

$$3\sin 2Ev.m\delta nt= \sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{45}{32}m^2\right).$$

Donc, en ayant égard à l'équation (1) posée dans la page 450, on aura pour la valeur complète de $R^{V}+\delta R^{V}=R_5$;

$$(7)\;\ldots\ldots\; R_5=$$

$$\sin 3fv-2gv \qquad Gq\gamma^2\left\{-\frac{15}{16}-\frac{135}{128}m-\left(\frac{7947}{512}+\frac{9}{4}+\frac{45}{32}+\frac{3}{4}=\frac{10203}{512}\right)m^2\right\}$$
$$\sin 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left(-\frac{51}{32}\right).$$

D'aprés la valeur de la fonction S posée dans la page 457, nous avons dans l'expression de δs le terme

$$\delta s= \cos 3fv-gv \quad Gq\gamma\,\frac{\left(\frac{3}{4}m^3-\frac{3}{32}m^4\right)}{3-\frac{9}{2}m^2},$$

duquel on tire

$$3s_1\delta s= \sin 3fv-2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{8}m^2-\frac{33}{64}m^4\right).$$

Il suit de là, et des valeurs de $3s_1\delta s$, $\frac{3}{2}(\delta s)^2$, données dans la page 462, qu'on a;

$$(8)\;\ldots\ldots\;\frac{a}{a_1}.\left\{3s_1\delta s+\frac{3}{2}(\delta s)^2\right\}=$$

$$\sin 3fv-2gv \qquad Gq\gamma^2\left(-\frac{3}{8}m^2-\frac{33}{64}m^4\right)$$
$$\sin 3fv-2gv-cv \quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{9}{8}y+\frac{81}{128}my^2-\frac{729}{2048}m^2y^3+\frac{4509}{1024}m^2y^2\\+\left(\frac{9}{4}-\frac{81}{512}-\frac{9}{16}=\frac{783}{512}\right)m^2y\end{array}\right\}.$$

47. Cela posé, si l'on fait la réunion des termes compris dans la fonction $(8)+m^2\{2.(1)+(2)+(3)\ .\ .\ .\ (7)\}$, on aura cette équation différentielle en δu :

$$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\begin{array}{lll}
\sin 3fv-2gv & Gq\gamma^2 & \left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{3}{8}+\frac{15}{16}-\frac{15}{16}+\frac{3}{16}-\frac{3}{16}=\frac{3}{8}\right)m^2-\left(\frac{45}{16}-\frac{45}{128}+\frac{135}{128}=\frac{225}{64}\right)m^3 \\ +\left(\frac{3}{64}-\frac{33}{64}-\frac{10203}{512}+\frac{1593}{512}-\frac{2811}{64}+\frac{3}{8}+\frac{159}{32}-\frac{9}{64}=-\frac{14337}{256}\right)m^4 \end{array}\right\} \\
\sin 3fv-2gv-cv & Gqe\gamma^2 & \left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{9}{8}+\frac{519}{256}m^2-\frac{81}{256}m^2y\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{51}{32}+\frac{9}{32}=-\frac{9}{16}\right)m^2 \\ -y\left(\frac{9}{8}-\frac{81}{128}my+\frac{729}{2048}m^2y^2-\frac{4509}{1024}m^2y-\frac{783}{512}m^2\right) \end{array}\right\}.
\end{array}$$

En intégrant cette équation ; ce qui revient à multiplier le premier terme par

$$\left\{(3f-2g)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1}=-\frac{2}{3m^2}\left(1+\frac{3}{4}m+\frac{31}{4}m^2\right);$$

et le second par

$$\left\{(3f-2g-c)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right\}^{-1}=-1-\frac{3}{2}m^2,$$

on aura ;

$$\delta u=$$

$$\begin{array}{lll}
\sin 3fv-2gv & Gq\gamma^2 & \left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{75}{32}+\frac{3}{16}=\frac{81}{32}\right)m+\left(\frac{4779}{128}+\frac{225}{128}+\frac{31}{16}=\frac{1313}{64}\right)m^2\right\} \\
\sin 3fv-2gv-cv & Gqe\gamma^2 & \left\{\begin{array}{l} -x\left\{\frac{9}{8}+\left(\frac{519}{256}+\frac{27}{16}=\frac{951}{256}\right)m^2-\frac{81}{256}m^2y\right\}+\frac{9}{16}m^2 \\ +y\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{8}-\frac{81}{128}my+\frac{729}{2048}m^2y^2-\frac{4509}{1024}m^2y \\ +\left(\frac{27}{16}-\frac{783}{512}=\frac{81}{512}\right)m^2\end{array}\right\} \end{array}\right\}.
\end{array}$$

On a vu dans la page 459, que l'expression de δu renferme aussi les deux termes

$$\sin 3fv \quad Gq\left(-\frac{m^2}{16}\right) + \sin 3fv - cv \quad Gqe\left(-\frac{m^2}{8}\right).$$

Donc, en faisant le produit de δu par $\frac{1}{u_1} = 1 - e\cos cv + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos 2gv$, il viendra ;

$$\frac{\delta u}{u_1} =$$

$$\begin{array}{lll}
\sin 3fv - 2gv & G q\gamma^2 & \left\{ \frac{1}{4} + \frac{81}{32}m + \left(\frac{1313}{64} - \frac{1}{128} = \frac{2625}{128}\right) m^2 \right\} \\
\sin 3fv - 2gv - cv & G qe\gamma^2 & \left\{ \begin{array}{l} -x\left(\frac{9}{8} + \frac{951}{256}m^2 - \frac{81}{256}m^2 y\right) \\ -\frac{1}{8} - \frac{81}{64}m - \left(\frac{1313}{128} + \frac{1}{64} - \frac{9}{16} = \frac{1243}{128}\right) m^2 \\ +y\left(\frac{9}{8} - \frac{81}{128}my + \frac{729}{2048}m^2 y^2 - \frac{4509}{1024}m^2 y + \frac{81}{512}m^2\right) \end{array} \right\}.
\end{array}$$

Le carré de $\frac{\delta u}{u_1}$ renferme le terme

$$\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 = 2\cos 2Ev - cv \quad e\left(\frac{15}{8}m\right) \times \sin 2Ev - 3fv + 2gv \quad Gq\gamma^2\left(-\frac{15}{32}m\right)$$
$$= \sin 3fv - 2gv - cv \quad Gqe\gamma^2\left(\frac{225}{256}m^2\right).$$

Il suit de là, et des résultats précédens que nous avons ;

$$A = 2\frac{\delta u}{u_1} - 3\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 =$$

$$\begin{array}{lll}
\sin 3fv & Gq & \left(-\frac{m^2}{8}\right) \\
\sin 3fv - cv & Gqe & \left(-\frac{3m^2}{16}\right) \\
\sin 3fv - 2gv & Gq\gamma^2 & \left(\frac{1}{2} + \frac{81}{16}m + \frac{2625}{64}m^2\right) \\
\sin 3fv - 2gv - cv & Gqe\gamma^2 & \left\{ \begin{array}{l} -x\left(\frac{9}{4} + \frac{951}{128}m^2 - \frac{81}{128}m^2 y\right) - \frac{1}{4} - \frac{81}{32}m \\ -\left(\frac{1243}{64} + \frac{675}{256} = \frac{5647}{256}\right) m^2 \\ +y\left(\frac{9}{4} - \frac{81}{64}my + \frac{729}{1024}m^2 y^2 - \frac{4509}{512}m^2 y + \frac{81}{256}m^2\right) \end{array} \right\};
\end{array}$$

$$-B=-m^2.\int R_1 dv=$$

$\sin 3fv$ $\quad Gq\left(\frac{m^2}{4}\right)$

$\sin 3fv-cv$ $\quad Gqe\left(\frac{3}{8}m^2\right)$;

$\sin 3fv-2gv$ $\quad Gq\gamma^2\left(\frac{15}{32}m^2\right)$

$\sin 3fv-2gv-cv$ $\quad Gqe\gamma^2 x\left(\frac{9}{16}+\frac{519}{512}m^2-\frac{81}{512}m^2\gamma\right)$;

$$Y=A-B=$$

$\sin 3fv$ $\quad Gq\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\right\}m^2$

$\sin 3fv-cv$ $\quad Gqe\left\{\frac{3}{8}-\frac{3}{16}=\frac{3}{16}\right\}m^2$

$\sin 3fv-2gv$ $\quad Gq\gamma^2\left\{\frac{1}{2}+\frac{81}{16}m+\left(\frac{2625}{64}+\frac{15}{32}=\frac{2655}{64}\right)m^2\right\}$

$\sin 3fv-2gv-cv$ $\quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{4}-\frac{81}{32}m-\frac{5647}{256}m^2-x\left(\frac{27}{16}+\frac{3285}{512}m^2-\frac{243}{512}m^2\gamma\right)\\+\gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{81}{64}m\gamma+\frac{729}{1024}m^2\gamma^2-\frac{4509}{512}m^2\gamma+\frac{81}{256}m^2\right)\end{array}\right\}$.

Maintenant, si l'on fait le produit de cette valeur de Y par (V. p. 313)

$$-\frac{X}{\lambda}=-1+2\cos cv \;\; e(1)+2\cos 2gv \;\; \gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right)+2\cos 2gv+cv \;\; e\gamma^2\left(\frac{3}{8}\right)$$

on aura, en conservant seulement les termes affectés de l'argument $3fv-2gv-cv$;

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=$$

$\sin 3fv-2gv-cv$ $\quad Gqe\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{81}{32}+\frac{81}{16}=\frac{243}{32}\right)m\\+\left(\frac{5647}{256}+\frac{2655}{64}+\frac{3}{64}-\frac{3}{64}=\frac{16267}{256}\right)m^2\\+x\left(\frac{27}{16}+\frac{3285}{512}m^2-\frac{243}{512}m^2\gamma\right)\\-\gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{81}{64}m\gamma+\frac{729}{1024}m^2\gamma^2-\frac{4509}{512}m^2\gamma+\frac{81}{256}m^2\right)\end{array}\right\}$.

En substituant pour G sa valeur (Voyez p. 443) et nommant, pour plus de simplicité, N le coefficient de $Gqe\gamma^2$, il est clair que cette équation donne

$$\delta nt = \cos 3fv - 2gv - cv \; \frac{e\gamma^2 K_{(3)} \cdot \left(\frac{D}{a}\right)^3 \left(\frac{a}{\text{a}}\right)^3 \left(\frac{\text{a}}{\text{a}_1}\right) . \sin^3 \omega . q N}{m^2 (3f - 2g - c)}.$$

Comme nous avons

$$\left(\frac{a}{\text{a}}\right)^3 = 1 + \frac{1}{2} m^2 ; \qquad \frac{\text{a}}{\text{a}_1} = 1 + \frac{1}{2} m^2 ;$$

(Voyez p. 854 et 855 du second volume) on pourra écrire (en faisant $q = 1$)

$$\delta nt = \cos 3fv - 2gv - cv \; \frac{K_{(3)} e\gamma^2 \left(\frac{D}{a}\right)^3 \sin^3 \omega . (1 + m^2) N}{m^2 (3f - 2g - c)}.$$

Pour réduire en nombres la valeur de N on prendra $g = 1{,}00402175$; $c = 0{,}9915480$;

$$x = \frac{m^2}{3 - 2g - c} ; \qquad \text{Log. } x = 1{,}1366261 ,$$

$$y = \frac{m^2}{(3 - g - c)^2 - 1 + \frac{3}{2} m^2} ; \qquad \text{Log. } y = 0{,}2313332 ;$$

ce qui donnera ;

$$N = + 21{,}4933 ; \quad N(1 + m^2) = 21{,}6136 ; \quad \frac{N(1 + m^2)}{m^2} = 3862{,}85.$$

Mais on a (Voyez p. 437)

$$\frac{e\gamma^2 \left(\frac{D}{a}\right)^3 \sin^3 \omega}{3f - 2g - c} = 0'',064 ;$$

partant

$$\delta nt = K_{(3)} \times 247'',23 . \cos 3fv - 2gv - cv.$$

De là on tire la conséquence, que cette inégalité est insensible, puisque son coefficient demeure inférieur à une demi-seconde, en attribuant à $K_{(3)}$ la valeur probable qui résulte de l'ensemble des phénomènes

§ 3.

Expression analytique de la Longitude moyenne et de la Latitude de la Lune, en fonction de sa Longitude vraie.

48. Je vais faire ici là réunion des termes, indiquée dans la page 317 du 3.ième Volume ; et rapprocher de ce résultat, celui relatif à la latitude, tel qu'il a été trouvé dans les pages 832-837 du même Volume. Et afin de pouvoir embrasser, d'un coup d'oeil, ce qui tient, non seulement à la formation analytique des coefficiens, mais aussi à celle des argumens, je fais précéder l'expression de la Longitude moyenne et de la Latitude de la Lune de l'expression analytique de l'équation séculaire (donnée dans les pages 321 et 802 du 3.ième Vol.) et des formules du moyen mouvement du périgée et du noeud, telles que nous les avons obtenues dans les pages 292 et 195 du troisième Volume. J'associe à ces expressions celle de la Constante de la parallaxe équatoriale de la Lune, pour présenter cette partie principale de la troisième ordonnée tout-à-fait séparée de la partie variable, composée de termes périodiques. Pour plus de clarté, voici, avant tout, la signification des différentes quantités littérales, ainsi que les élémens numériques propres à réduire en nombres les coefficiens des inégalités Lunaires.

v = Longitude vraie de la Lune.

n = 17325593″,54 = mouvement moyen sidéral de la Lune en $365^{\text{jours}}\frac{1}{4}$.

T = 2360591″,80 = temps de la révolution sidérale de la Lune.

m = Rapport des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune . . . . = 0,0748013o = $\frac{1}{13,369}$

$E = 1 - m$

e = Excentricité de l'orbite de la Lune . = 0,05484721 = $\frac{1}{18,232}$

E' = Excentricité de l'orbite du Soleil en 1750 = 0,01681013 = $\frac{1}{59,474}$

ε' = Excentricité de l'orbite du Soleil pour une époque quelconque

ε = Époque de la Longitude de la Lune.

γ = Tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune par rapport à l'Écliptique vraie . . . . = $0{,}09005900 = \frac{1}{11{,}104}$

b^2 = Rapport des moyennes distances de la Lune et du Soleil au centre de la Terre = $0{,}00252064 = \frac{1}{396{,}724}$

$\frac{D}{a}$ = Rapport entre le rayon moyen du globe de la Terre et la distance moyenne de la Lune à la Terre . . . . = $0{,}0165617 = \frac{1}{60{,}376}$

$K_{(2)}$ = Aplatissement de la Terre $= \frac{1}{305}$

$2\Psi = \frac{1}{289}$ = Rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur.

$K_{(2)} - \Psi = \frac{1}{305} - \frac{1}{578} = \frac{375}{305 \times 578}$.

$\omega = 23^{\circ}.\ 27'.\ 50''$ = Obliquité de l'écliptique (en 1800).

$i = \frac{1}{88}$ = Rapport de la masse de la Lune à la somme des masses de la Terre et de la Lune.

$L' = 0{,}992586$ mètres = Longueur du pendule qui bat la seconde sur le parallèle dont le *sinus* de la latitude est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

fv = Longitude vraie de la Lune par rapport au point mobile de l'équinoxe du printemps $= v + \frac{50.''v}{n} = (1{,}0000002886)\,v$

$(1 - c')m$ = Rapport des moyens mouvemens du périgée solaire et de la Lune $= \frac{11,''88}{n} = 0{,}0000006857$.

$\int \zeta dv =$ *Équation séculaire du moyen mouvement de la Lune* $=$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{2187}{128}m^4 - \frac{4455}{64}m^5 - \frac{716779}{512}m^6 + \frac{49929}{128}m^7\right) \\ + e^2\left(\frac{1461}{128}m^2 + \frac{106335}{512}m^3 + \frac{2479419}{1024}m^4 + \frac{7344621}{256}m^5\right) \\ + \gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2 + \frac{1083}{512}m^3 - \frac{41181}{1024}m^4\right) \\ + b^4\left(\frac{75}{32} - \frac{675}{32}m + \frac{98415}{512}m^2 + \frac{75}{8}e^2 - \frac{225}{64}\gamma^2\right) \\ - \frac{2709}{256}m^2e^2\gamma^2 - \frac{2229}{256}m^2\gamma^4 - \frac{8367}{128}m^2e^4 - \frac{9}{4}m^4E'^2 \end{array}\right\} . \int (\varepsilon'^2 - E'^2)\, dv$$

$$+ \left\{ \frac{15}{8}m^2 + \frac{288303}{256}m^4 + \frac{25455}{1024}m^2e^2 + \frac{11919}{1024}m^2\gamma^2 + \frac{75}{16}b^4 \right\} . \int (\varepsilon'^4 - E'^4)\, dv$$

$$+ \frac{81}{16}m^4 \int (\varepsilon'^2 - E'^2)^2\, dv + \frac{35}{16}m^2 . \int (\varepsilon'^6 - E'^6)\, dv.$$

$(1 - c)v + \int \varpi dv =$ *Mouvement moyen du périgée Lunaire* $=$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{225}{32}m^3 + \frac{4071}{128}m^4 + \frac{265493}{2048}m^5 + \frac{12822631}{24576}m^6 + \frac{1273925965}{589824}m^7\right) \\ - e^2\left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{675}{64}m^3 + \frac{31893}{512}m^4 + \frac{1546665}{4096}m^5\right) \\ - \gamma^2\left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{189}{32}m^3 + \frac{3963}{128}m^4 + \frac{336987}{2048}m^5\right) \\ + E'^2\left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{825}{32}m^3 + \frac{61179}{256}m^4 + \frac{1767849}{1024}m^5\right) \\ + e^2\gamma^2\left(\frac{75}{32}m^2 + \frac{189}{32}m^3\right) - e^2E'^2\left(\frac{9}{16}m^2 + \frac{2475}{64}m^3\right) \\ - E'^2\gamma^2\left(\frac{9}{4}m^2 + \frac{693}{32}m^3\right) + E'^4\left(\frac{45}{32}m^2 + \frac{225}{4}m^3\right) \\ + \gamma^4\left(\frac{27}{64}m^2 + \frac{2241}{256}m^3\right) - \frac{3}{32}m^2e^4 + b^4\left(\frac{45}{32}m^2 + \frac{7425}{512}m^3\right) \\ + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\omega\right)\frac{D^2}{a^2}\left(K_{(2)} - \Psi\right) \end{array}\right\} v$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{825}{32}m^3 + \frac{61755}{256}m^4 + \frac{1811049}{1024}m^5\right) \\ - e^2\left(\frac{9}{16}m^2 + \frac{2475}{64}m^3\right) - \gamma^2\left(\frac{9}{4}m^2 + \frac{693}{32}m^3\right) \end{array}\right\} . \int (\varepsilon'^2 - E'^2)\, dv$$

$$+ \left(\frac{45}{32}m^2 + \frac{225}{4}m^3\right) \int (\varepsilon'^4 - E'^4)\, dv.$$

$$(1-g)v+\int \theta dv = \textit{Mouvement moyen du noeud Lunaire} =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\left(-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{32}m^3+\frac{273}{128}m^4+\frac{9797}{2048}m^5+\frac{199273}{24576}m^6+\frac{6657733}{589824}m^7\right) \\
-e^2\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{189}{32}m^3+\frac{3027}{128}m^4+\frac{179955}{2048}m^5\right) \\
+\gamma^2\left(\frac{3}{8}m^2-\frac{27}{64}m^3-\frac{843}{512}m^4-\frac{6393}{4096}m^5\right) \\
-E'^2\left(\frac{9}{8}m^2-\frac{33}{32}m^3-\frac{3261}{256}m^4-\frac{72873}{1024}m^5\right) \\
-e^2\gamma^2\left(\frac{27}{32}m^2-\frac{189}{16}m^3\right)-e^2E'^2\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{693}{32}m^3\right) \\
+E'^2\gamma^2\left(\frac{9}{16}m^2-\frac{99}{64}m^3\right)+e^4\left(\frac{21}{64}m^2-\frac{675}{256}m^3\right) \\
-\gamma^4\left(\frac{9}{32}m^2-\frac{27}{64}m^3\right)-E'^4\left(\frac{45}{32}m^2-\frac{9}{4}m^3\right) \\
-b^4\left(\frac{45}{32}m^2+\frac{1935}{512}m^3\right)-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\omega\right)\frac{D^2}{a^2}\left(K_{(2)}-\Psi\right)
\end{array}\right\} v$$

$$-\left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{9}{8}m^2-\frac{33}{32}m^3-\frac{2685}{256}m^4-\frac{74601}{1024}m^5\right) \\
+e^2\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{693}{32}m^3\right)-\gamma^2\left(\frac{9}{16}m^2-\frac{99}{64}m^3\right)
\end{array}\right\}.\int\left(\varepsilon'^2-E'^2\right)dv$$

$$-\left(\frac{45}{32}m^2-\frac{9}{4}m^3\right)\int\left(\varepsilon'^4-E'^4\right)dv.$$

Constante du sinus de la parallaxe équatoriale de la Lune =

$$\left(1+\frac{1}{6}m^2-\frac{179}{288}m^4-\frac{45}{16}m^2e^2+0.\,m^2\gamma^2+\frac{1}{4}m^2E'^2\right)\left(1+\frac{1}{3}K_{(2)}\right)\sqrt[3]{\frac{4D(1-\frac{1}{3}\Psi)}{iL'T^2}}.$$

Le *sinus* de cette parallaxe est censé developpé en fonctions périodiques du temps. Mais si on le développait en fonctions périodiques de la longitude *vraie* de la Lune; alors la *constante* serait exprimée par

$$\left(1+e^2+\frac{1}{6}m^2+e^4-\frac{1}{2}e^2\gamma^2+\frac{217}{288}m^4+\frac{45}{64}m^2e^2+0.\,m^2\gamma^2+\frac{1}{4}m^2E'^2\right)\left(1+\frac{1}{3}K_{(2)}\right)\sqrt[3]{\frac{4D(1-\frac{1}{3}\Psi)}{iL'T^2}}.$$

$$nt+\varepsilon = \textit{Longitude moyenne de la Lune} = v + \int \zeta dv +$$

$$\sin cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} \left(-2-\frac{3}{2}m^2-\frac{45}{32}m^3+\frac{637}{128}m^4+\frac{137413}{6144}m^5+\frac{146597}{24576}m^6\right) \\ +\gamma^2\left(\frac{1}{2}+\frac{297}{128}m^2-\frac{15}{16}m^3-\frac{47545}{4096}m^4\right)+e^2\left(\frac{297}{32}m^2+\frac{5415}{128}m^3+\frac{775721}{4096}m^4\right) \\ +E'^2\left(-\frac{9}{4}m^2-\frac{165}{32}m^3+\frac{147}{256}m^4\right)+\gamma^4\left(\frac{1}{4}-\frac{227}{256}m^2\right)-\frac{2369}{512}m^2e^4 \\ -\frac{135}{128}m^2b^4+e^2\gamma^2\left(-\frac{15}{16}+\frac{135}{64}m-\frac{1447}{64}m^2\right)+\frac{225}{256}m^2e^2E'^2 \\ +\frac{453}{128}m^2E'^2\gamma^2-\frac{45}{16}m^2E'^4+\frac{45}{128}\gamma^6-\frac{37}{128}e^2\gamma^4+\frac{5}{8}e^4\gamma^2 \\ -\left\{ \begin{array}{l} \frac{21}{4}m^2+\frac{165}{32}m^3-\frac{7167}{256}m^4+\frac{5619}{256}m^2e^2 \\ +\frac{501}{128}m^2\gamma^2+\frac{75}{16}b^4+\frac{105}{16}m^2(\varepsilon'^2+E'^2) \end{array} \right\}(\varepsilon'^2-E'^2) \end{array} \right\}$$

$$\sin 2cv \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{16}m^2-\frac{405}{64}m^3-\frac{2577}{64}m^4-\frac{671823}{4096}m^5-\frac{525476519}{491520}m^6\right) \\ -\gamma^2\left(\frac{1}{16}+\frac{135}{128}m+\frac{75}{64}m^2\right)+e^2\left(\frac{1}{8}-\frac{807}{256}m^2\right)+\frac{3}{32}m^2E'^2 \\ +\frac{37}{64}\gamma^4+\frac{3}{64}e^4+\frac{7}{64}e^2\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 3cv \qquad e^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{17}{48}m^2-\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{16}\gamma^2\right)$$

$$\sin 4cv \qquad e^4\left(\frac{5}{32}\right)$$

$$\sin 5cv \qquad e^5\left(-\frac{3}{40}\right)$$

$$\sin gv-fv \qquad \gamma.\frac{D^2}{a^2}\left(K_{(2)}-\Psi\right)\left(\frac{19}{3}.m^{-2}+\frac{13}{8}.m^{-1}\right)\sin 2\omega$$

$$\sin 2gv \qquad \gamma^2\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{11}{16}m^2+\frac{33}{128}m^3+\frac{449}{512}m^4\right)-e^2\left(\frac{15}{16}-\frac{405}{128}m\right)-\frac{1}{8}\gamma^2\right\}$$

$$\sin 4gv \qquad \gamma^4\left(\frac{1}{32}\right)$$

$$\sin 2gv-cv \qquad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(1-\frac{135}{32}m-\frac{1331}{256}m^2-\frac{19131}{2048}m^3\right) \\ +\gamma^2\left(\frac{3}{16}-\frac{405}{128}m\right)-e^2\left(\frac{55}{32}-\frac{135}{8}m\right)-\frac{585}{64}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2gv + cv \qquad e\gamma^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{8}e^2+\frac{3}{16}\gamma^2\right)$$

$$\sin 2gv - 2cv \qquad e^2\gamma^2\left(-\frac{1}{8}-\frac{135}{64}m\right)$$

$$\sin 2gv + 2cv \qquad e^2\gamma^2\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$\sin 2gv - 3cv \qquad e^3\gamma^2\left(-\frac{9}{32}+\frac{135}{32}m\right)$$

$$\sin 2gv + 3cv \qquad e^3\gamma^2\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$\sin 4gv - cv \qquad e\gamma^4\left(\frac{9}{64}\right)$$

$$\sin 4gv + cv \qquad e\gamma^4\left(-\frac{3}{64}\right)$$

$$\sin c'mv \qquad \varepsilon'\left\{\begin{array}{l}\left(3.m-\frac{735}{16}m^3-\frac{1261}{4}m^4-\frac{572357}{384}m^5-\frac{3273241}{576}m^6-\frac{973306967}{55296}m^7\right)\\+e^2\left(\frac{27}{8}m+\frac{2925}{32}m^2+\frac{444943}{512}m^3+\frac{37759097}{6144}m^4-\frac{7087468819}{294912}m^5\right)\\-\gamma^2\left(\frac{27}{8}m-\frac{117}{32}m^2-\frac{19097}{512}m^3\right)+\frac{27}{8}m\varepsilon'^2\end{array}\right\}$$

$$\sin 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\left\{\left(\frac{9}{4}m-\frac{5175}{128}m^3-\frac{13871}{32}m^4\right)+\frac{81}{32}me^2-\frac{81}{32}m\gamma^2+\frac{7}{4}m\varepsilon'^2\right\}$$

$$\sin 3c'mv \qquad \varepsilon'^3\left(\frac{53}{24}m\right)$$

$$\sin 4c'mv \qquad \varepsilon'^4\left(\frac{77}{32}m\right)$$

$$\sin cv + c'mv \qquad e\varepsilon'\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{9}{4}m+\frac{621}{32}m^2+\frac{18135}{128}m^3+\frac{2061269}{2048}m^4+\frac{91899031}{24576}m^5+\frac{9451141309}{589824}m^6\right)\\+\frac{81}{32}m\varepsilon'^2-\frac{81}{16}m\gamma^2-\frac{9}{8}me^2\end{array}\right\}$$

$$\sin cv - c'mv \qquad e\varepsilon'\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{9}{4}m-\frac{1329}{32}m^2-\frac{37035}{128}m^3-\frac{3599473}{2048}m^4-\frac{83498905}{8192}m^5-\frac{35329612841}{589824}m^6\right)\\-\frac{81}{32}m\varepsilon'^2+\frac{81}{16}m\gamma^2+\frac{9}{8}me^2\end{array}\right\}$$

$$\sin cv - 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\left(-\frac{27}{16}m-\frac{5211}{128}m^2-\frac{88353}{256}m^3+\frac{27}{32}me^2+\frac{243}{64}m\gamma^2-\frac{21}{16}m\varepsilon'^2\right)$$

$\sin cv + 2c'mv \quad e\varepsilon'^2\left(\frac{27}{16}m + \frac{1389}{128}m^2 + \frac{15159}{128}m^3\right)$

$\sin cv - 3c'mv \quad e\varepsilon'^3\left(-\frac{53}{32}m\right)$

$\sin cv + 3c'mv \quad e\varepsilon'^3\left(\frac{53}{32}m\right)$

$\sin 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon'\left(\frac{27}{16}m + \frac{3639}{128}m^2 + \frac{99127}{512}m^3 - \frac{9}{16}me^2 - \frac{225}{64}m\gamma^2 + \frac{243}{128}m\varepsilon'^2\right)$

$\sin 2cv + c'mv \quad e^2\varepsilon'\left(-\frac{27}{16}m - \frac{2211}{128}m^2\right)$

$\sin 2cv + 2c'mv \quad e^2\varepsilon'^2\left(-\frac{81}{64}m\right)$

$\sin 2cv - 2c'mv \quad e^2\varepsilon'^2\left(\frac{81}{64}m\right)$

$\sin 3cv + c'mv \quad e^3\varepsilon'\left(\frac{9}{8}m\right)$

$\sin 3cv - c'mv \quad e^3\varepsilon'\left(-\frac{9}{8}m\right)$

$\sin 2gv - c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{9}{16}m - \frac{75}{128}m^2 + \frac{1177}{512}m^3 - \frac{81}{128}m\varepsilon'^2 + \frac{9}{16}m\gamma^2 + \frac{63}{64}me^2\right)$

$\sin 2gv + c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2\left(\frac{9}{16}m - \frac{153}{128}m^2\right)$

$\sin 2gv + 2c'mv \quad \varepsilon'^2\gamma^2\left(\frac{27}{64}m\right)$

$\sin 2gv - 2c'mv \quad \varepsilon'^2\gamma^2\left(-\frac{27}{64}m\right)$

$\sin 2gv - cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{27}{8}m\right)$

$\sin 2gv - cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{27}{8}m\right)$

$\sin 2gv + cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{9}{32}m\right)$

$\sin 2gv + cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{9}{32}m\right).$

$$
\sin 2Ev \left\{ \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l} -\frac{11}{8} m^2 - \frac{59}{12} m^3 - \frac{893}{72} m^4 - \frac{2855}{108} m^5 \\ -\frac{4133959}{82944} m^6 - \frac{202916651}{2488320} m^7 - \frac{2698719631}{18662400} m^8 \end{array} \right\} \\
+ e^2 \left(\frac{45}{16} m + \frac{603}{64} m^2 + \frac{33769}{1024} m^3 + \frac{1185143}{12288} m^4 + \frac{68760677}{294912} m^5 \right) \\
+ \gamma^2 \left(\frac{3}{16} m + \frac{47}{64} m^2 + \frac{5149}{3072} m^3 + \frac{91745}{36864} m^4 + \frac{859889}{884736} m^5 \right) \\
+ \varepsilon'^2 \left(\frac{55}{16} m^2 + \frac{295}{24} m^3 + \frac{5491}{144} m^4 + \frac{19729}{256} m^5 \right) + e^4 \left(-\frac{45}{64} m - \frac{15}{8} m^2 - \frac{129779}{2048} m^3 \right) \\
+ \gamma^4 \left(-\frac{9}{64} m - \frac{39}{128} m^2 - \frac{2577}{2048} m^3 \right) + \varepsilon'^4 \left(-\frac{143}{128} m^2 - \frac{767}{192} m^3 \right) \\
+ b^4 \left(-\frac{125}{1024} m^2 - \frac{1575}{2048} m^3 \right) + e^2 \gamma^2 \left(-\frac{39}{16} m - \frac{641}{64} m^2 - \frac{263633}{6144} m^3 \right) \\
+ e^2 \varepsilon'^2 \left(-\frac{225}{32} m - \frac{1035}{64} m^2 + \frac{110449}{2048} m^3 \right) + \varepsilon'^2 \gamma^2 \left(-\frac{15}{32} m - \frac{149}{64} m^2 - \frac{18485}{2048} m^3 \right) \\
+ \frac{45}{128} m \varepsilon'^2 \gamma^4 + \frac{45}{128} m \gamma^2 b^4 + \frac{1809}{1024} m e^2 \gamma^4 + \frac{3531}{1024} m e^4 \gamma^2 + \frac{225}{128} m e^4 \varepsilon'^2 \\
+ \frac{585}{256} m e^2 \varepsilon'^4 + \frac{195}{32} m e^2 \gamma^2 \varepsilon'^2 + \frac{39}{256} m \gamma^2 \varepsilon'^4 + \frac{315}{128} m e^2 b^4 + \frac{225}{128} m \varepsilon'^2 b^4 \\
- \frac{45}{128} m e^6 + \frac{15}{128} m \gamma^6 - \left\{ \frac{33}{8} m^4 + \frac{175}{16} m^5 - \frac{27}{32} m^3 \gamma^2 - \frac{405}{32} m^3 e^2 \right\} (\varepsilon'^2 - E'^2)
\end{array} \right.
$$

$$
\sin (2Ev - cv)\, e \left\{ \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{4} m - \frac{285}{16} m^2 - \frac{17347}{256} m^3 - \frac{672197}{3072} m^4 \\ -\frac{43889975}{73728} m^5 - \frac{1228198339}{884736} m^6 - \frac{474026836703}{424673280} m^7 \end{array} \right\} \\
+ e^2 \left(\frac{15}{8} m + \frac{405}{64} m^2 + \frac{5843}{64} m^3 + \frac{1802197}{3072} m^4 \right) - \frac{105}{16} m \varepsilon'^2 \gamma^2 - \frac{75}{16} m e^2 \varepsilon'^2 \\
+ \gamma^2 \left(\frac{21}{8} m + \frac{513}{32} m^2 + \frac{37575}{512} m^3 + \frac{294983}{1024} m^4 \right) - \frac{279}{64} m e^2 \gamma^2 - \frac{195}{64} m \varepsilon'^4 \\
+ \varepsilon'^2 \left(\frac{75}{8} m + \frac{165}{8} m^2 - \frac{133123}{512} m^3 - \frac{11901187}{3072} m^4 \right) - \frac{303}{256} m \gamma^4 \\
+ \frac{15}{32} m e^4 - \frac{105}{32} m b^4 - \left\{ \frac{135}{8} m^3 + \frac{1287}{32} m^4 \right\} (\varepsilon'^2 - E'^2)
\end{array} \right.
$$

$$
\sin (2Ev + cv)\, e \left\{ \begin{array}{l}
\left(2 . m^2 + \frac{119}{24} m^3 + \frac{6461}{576} m^4 + \frac{204989}{13824} m^5 - \frac{4341491}{165888} m^6 \right) \\
+ e^2 \left(-\frac{15}{8} m - \frac{159}{32} m^2 - \frac{8423}{512} m^3 - \frac{1242553}{30720} m^4 \right) + \frac{177}{128} m c^2 \gamma^2 + \frac{15}{32} m \varepsilon'^2 \gamma^2 \\
+ \gamma^2 \left(-\frac{3}{16} m - \frac{67}{64} m^2 - \frac{6893}{3072} m^3 - \frac{125785}{36864} m^4 \right) + \frac{75}{16} m e^2 \varepsilon'^2 + \frac{99}{256} m \gamma^4 \\
+ \varepsilon'^2 \left(-5 . m^2 - \frac{1027}{48} m^3 - \frac{48907}{288} m^4 \right) + \frac{21}{4} m^4 (\varepsilon'^2 - E'^2)
\end{array} \right.
$$

$$\sin 2Ev + c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{11}{16}m^2 + \frac{59}{48}m^3 + \frac{29}{576}m^4 - \frac{1129}{432}m^5 + \frac{4777597}{165888}m^6 + \frac{1727546917}{4976640}m^7 \right) \\ + e^2 \left(-\frac{45}{16}m - \frac{99}{64}m^2 + \frac{65711}{1024}m^3 + \frac{9092489}{12288}m^4 + \frac{1758770935}{294912}m^5 \right) \\ + \gamma^2 \left(-\frac{3}{16}m - \frac{37}{64}m^2 - \frac{4237}{3072}m^3 \right) + \varepsilon'^2 \left(-\frac{11}{128}m^2 - \frac{59}{384}m^3 \right) \\ + \frac{45}{128}me^2\varepsilon'^2 + \frac{39}{16}me^2\gamma^2 + \frac{3}{128}m\varepsilon'^2\gamma^2 + \frac{9}{64}m\gamma^4 + \frac{45}{64}me^4 - \frac{225}{128}mb^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{77}{16}m^2 - \frac{413}{16}m^3 - \frac{7003}{64}m^4 - \frac{6077}{16}m^5 \\ -\frac{6303041}{6144}m^6 - \frac{575249759}{368640}m^7 \end{array} \right\} \\ + e^2 \left(\frac{105}{16}m + \frac{1983}{64}m^2 + \frac{170573}{1024}m^3 + \frac{3180593}{4096}m^4 + \frac{390959167}{98304}m^5 \right) \\ + \gamma^2 \left(\frac{7}{16}m + \frac{173}{64}m^2 + \frac{11443}{1024}m^3 \right) + \varepsilon'^2 \left(\frac{1353}{128}m^2 + \frac{7257}{128}m^3 \right) \\ - \frac{91}{16}me^2\gamma^2 - \frac{123}{128}m\varepsilon'^2\gamma^2 - \frac{1845}{128}me^2\varepsilon'^2 - \frac{105}{64}me^4 - \frac{21}{64}m\gamma^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - 2cv \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{45}{16}m - \frac{23}{4}m^2 - \frac{187057}{3072}m^3 - \frac{6871549}{18432}m^4 \\ -\frac{2077181651}{884736}m^5 - \frac{1170663607249}{106168320}m^6 \end{array} \right\} \\ + \frac{57}{32}m\gamma^2 - \frac{15}{64}me^2 + \frac{225}{32}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{9}{16}m + \frac{11}{8}m^2 + \frac{1883}{3072}m^3 + \frac{141245}{18432}m^4 \right) \\ + \frac{33}{64}m\gamma^2 + \frac{75}{32}me^2 + \frac{45}{32}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev + 2cv \quad e^2 \left\{ \left(-\frac{65}{32}m^2 - \frac{161}{48}m^3 - \frac{10357}{1440}m^4 \right) + \frac{75}{64}me^2 + \frac{9}{64}m\gamma^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \left(-\frac{11}{32}m^2 - \frac{85}{96}m^3 \right) + \frac{3}{64}m\gamma^2 + \frac{45}{64}me^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \left(-\frac{135}{64}me^2 - \frac{9}{64}m\gamma^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \left\{ \left(-\frac{187}{16}m^2 - \frac{1003}{12}m^3 - \frac{70039}{144}m^4 - \frac{1988549}{864}m^5 \right) + \frac{765}{64}me^2 + \frac{51}{64}m\gamma^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{4}m + \frac{15}{32}m^2 - \frac{18913}{128}m^3 - \frac{9865567}{6144}m^4 \\ - \frac{918041071}{73728}m^5 - \frac{35861360657}{442368}m^6 \end{array} \right\} \\ - \frac{15}{8}me^2 - \frac{21}{8}m\gamma^2 - \frac{15}{32}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{35}{4}m - \frac{1775}{32}m^2 - \frac{32691}{128}m^3 - \frac{1672603}{2048}m^4 \\ - \frac{19371751}{24576}m^5 - \frac{7524176201}{589824}m^6 \end{array} \right\} \\ + \frac{35}{8}me^2 + \frac{49}{8}m\gamma^2 + \frac{615}{32}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv + cv \quad e\varepsilon' \left\{ \left(-m^2 - \frac{335}{96}m^3 - \frac{33131}{1152}m^4 - \frac{3002915}{13824}m^5 \right) + \frac{15}{8}me^2 + \frac{3}{16}m\gamma^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv + cv \quad e\varepsilon' \left\{ \left(7.\, m^2 + \frac{905}{32}m^3 + \frac{18625}{128}m^4 + \frac{1036373}{1536}m^5 \right) - \frac{35}{8}me^2 - \frac{7}{16}m\gamma^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + 3c'mv \quad \varepsilon'^3 \left(- \frac{11}{384}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - 3c'mv \quad \varepsilon'^3 \left(- \frac{9295}{384}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left(\frac{45}{16}m - \frac{313}{32}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left(- \frac{105}{16}m - \frac{157}{16}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev + c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left(\frac{65}{64}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left(- \frac{455}{64}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev + c'mv - 2gv \quad \gamma^2\varepsilon' \left(\frac{9}{16}m + \frac{59}{32}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - c'mv - 2gv \quad \gamma^2\varepsilon' \left(- \frac{21}{16}m + \frac{11}{4}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev + c'mv + 2gv \quad \gamma^2\varepsilon' \left(\frac{11}{64}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - c'mv + 2gv \quad \gamma^2\varepsilon' \left(- \frac{77}{64}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - 3cv \quad e^3 \left(\frac{165}{64}m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev + 3cv \quad e^3 \left(\frac{7}{4}m^2 \right)$$

$\sin 2Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{9}{32}m + \frac{51}{128}m^2\right)$
$\sin 2Ev + 2gv - cv$	$e\gamma^2\left(-\frac{15}{32}m - \frac{325}{128}m^2\right)$
$\sin 2Ev - 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(\frac{51}{32}m - \frac{715}{256}m^2\right)$
$\sin 2Ev + 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(\frac{3}{4}m^2\right)$
$\sin 2Ev - 2c'mv - cv$	$e\varepsilon'^2\left(-\frac{255}{16}m - \frac{16455}{128}m^2 - \frac{194273}{256}m^3 - \frac{80893063}{24576}m^4\right)$
$\sin 2Ev + 2c'mv - cv$	$e\varepsilon'^2\left\{\left(\frac{45}{16}m + \frac{6399}{128}m^2 + \frac{89501}{256}m^3\right) - \frac{45}{32}me^2 - \frac{63}{32}m\gamma^2 + \frac{35}{8}m\varepsilon'^2\right\}$
$\sin 2Ev - 2c'mv + cv$	$e\varepsilon'^2\left(17.m^2\right)$
$\sin 2Ev + 2c'mv - 2cv$	$e^2\varepsilon'^2\left(-\frac{885}{64}m - \frac{297}{256}e^2.m^{-1}\right)$
$\sin 2Ev - 2c'mv - 2cv$	$e^2\varepsilon'^2\left(-\frac{765}{64}m\right)$
$\sin 2Ev + 2c'mv - 2gv$	$\gamma^2\varepsilon'^2\left(\frac{27}{64}m + \frac{135}{512}e^2.m^{-1}\right)$
$\sin 2Ev - 2c'mv - 2gv$	$\gamma^2\varepsilon'^2\left(-\frac{153}{64}m\right)$
$\sin 2Ev + 2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2\left(-\frac{105}{64}m\right)$
$\sin 2Ev - 2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2\left(\frac{3}{32}m\right)$
$\sin 2Ev - 2gv + 2cv$	$e^2\gamma^2\left(-\frac{69}{64}m\right)$
$\sin 2Ev - 4gv$	$\gamma^4\left(-\frac{3}{64}m\right)$
$\sin 2Ev - 4cv$	$e^4\left(-\frac{15}{64}m\right)$
$\sin 2Ev + 3c'mv - cv$	$e\varepsilon'^3\left(\frac{5}{32}m\right)$
$\sin 2Ev - 3c'mv - cv$	$e\varepsilon'^3\left(-\frac{845}{32}m\right)$
$\sin 2Ev + c'mv - 2gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{51}{32}m\right)$
$\sin 2Ev - c'mv - 2gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{119}{32}m\right)$
$\sin 2Ev - c'mv - 2gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{21}{32}m\right)$

$$\sin 2Ev + c'mv - 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(\ \frac{9}{32}m\right)$$

$$\sin 2Ev + c'mv + 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(\ \frac{15}{32}m\right)$$

$$\sin 2Ev - c'mv + 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{35}{32}m\right)$$

$$(^*)\ \sin Ev \quad b^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{15}{8}m + \frac{93}{8}m^2 + \frac{1773}{32}m^3 + \frac{17977}{64}m^4 + \frac{1213841}{768}m^5 + \frac{173945309}{18432}m^6\right)\\ + \frac{15}{8}me^2 - \frac{165}{32}m\gamma^2 + \frac{45}{8}m\varepsilon'^2\end{array}\right\}$$

$$\sin Ev - cv \quad eb^2\left(\ \frac{165}{32}m + \frac{6837}{256}m^2 + \frac{142083}{1024}m^3 + \frac{13284081}{16384}m^4\right)$$

$$\sin Ev + cv \quad eb^2\left(-\frac{45}{32}m - \frac{27}{4}m^2 - \frac{25693}{1024}m^3 - \frac{92053}{768}m^4\right)$$

$$\sin Ev + c'mv \quad \varepsilon'b^2\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{5}{2} + \frac{45}{4}m - \frac{2133}{32}m^2 + \frac{17089}{96}m^3\right) + \gamma^2\left(\frac{15}{8} + \frac{325}{16}m\right)\\ + e^2\left(-5 - \frac{1085}{8}m\right) + \varepsilon'^2\left(-\frac{5}{2} + \frac{375}{8}m\right)\end{array}\right\}$$

$$\sin Ev - c'mv \quad \varepsilon'b^2\left\{\left(-\frac{15}{8}m + \frac{393}{16}m^2 + \frac{5987}{128}m^3\right) - \frac{15}{8}me^2 - \frac{135}{64}m\gamma^2 + \frac{15}{2}m\varepsilon'^2\right\}$$

$$\sin Ev - 2cv \quad e^2b^2\left(\ \frac{45}{32}m\right)$$

$$\sin Ev + 2cv \quad e^2b^2\left(\ \frac{15}{16}m\right)$$

$$\sin Ev - 2gv \quad \gamma^2b^2\left(\ \frac{165}{64}m\right)$$

$$\sin Ev + 2gv \quad \gamma^2b^2\left(\ \frac{15}{64}m\right)$$

$$\sin Ev + 2c'mv \quad \varepsilon'^2b^2\left(\ \frac{15}{64}m\right)$$

$$\sin Ev - 2c'mv \quad \varepsilon'^2b^2\left(-\frac{435}{64}m\right)$$

$$\sin Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon'b^2\left(-\frac{25}{8} + \frac{1095}{32}m - \frac{15}{4}\gamma^2 . m^{-1}\right)$$

$$\sin Ev + c'mv + cv \quad e\varepsilon'b^2\left(\ \frac{15}{8} - \frac{135}{16}m\right)$$

(*) Dans tous les coëfficiens multipliés par b^2, il faudra changer b^2 en $b^2(1-2i) = b^2\left(\frac{M''-M}{M''+M}\right)$ pour tenir compte de la petite modification due aux perturbations de l'orbite du Soleil causées par l'action de la Lune.

$$\sin Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon'b^2\left(\frac{45}{64}m\right)$$

$$\sin Ev - c'mv + cv \quad e\varepsilon'b^2\left(\frac{45}{32}m\right)$$

$$\sin Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon'b^2\left(-\frac{25}{8}\right)$$

$$\sin Ev + c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon'b^2\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\sin Ev + c'mv - 2gv \quad \gamma^2\varepsilon'b^2\left(-\frac{25}{48}\right)$$

$$\sin Ev + c'mv + 2gv \quad \gamma^2\varepsilon'b^2\left(-\frac{5}{16}\right)$$

$$\sin 3Ev \quad b^2\left(-\frac{15}{32}m^2 - \frac{415}{128}m^3 - \frac{1141}{64}m^4 - \frac{538619}{6144}m^5\right)$$

$$\sin 3Ev - cv \quad eb^2\left(\frac{495}{256}m^2 + \frac{6645}{1024}m^3 - \frac{87663}{16384}m^4\right)$$

$$\sin 3Ev + cv \quad eb^2\left(\frac{125}{128}m^2\right)$$

$$\sin 3Ev + c'mv \quad \varepsilon'b^2\left(\frac{95}{32}m^2\right)$$

$$\sin 3Ev - c'mv \quad \varepsilon'b^2\left(-\frac{75}{32}m^2\right)$$

$$\sin 3Ev - 2cv \quad e^2b^2\left(\frac{175}{32}m\right)$$

$$\sin 3Ev - 2gv \quad \gamma^2b^2\left(\frac{25}{32}m\right)$$

$$\sin 3Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon'b^2\left(\frac{225}{64}m\right)$$

$$\sin 4Ev \quad \left\{\left(\frac{283}{256}m^4 + \frac{1991}{320}m^5 + \frac{641477}{28800}m^6\right) - \frac{975}{128}m^3e^2 - \frac{33}{128}m^3\gamma^2\right\}$$

$$\sin 4Ev - cv \quad e\left\{\left(\frac{15}{4}m^3 + \frac{369}{16}m^4 + \frac{250469}{2560}m^5 + \frac{326497277}{921600}m^6\right) - \frac{225}{64}m^2e^2 - \frac{45}{128}m^2\gamma^2\right\}$$

$$\sin 4Ev + cv \quad e\left(-3.m^4\right)$$

$$\sin 4Ev + c'mv \quad \varepsilon'\left\{\left(-\frac{283}{256}m^4 - \frac{5973}{1280}m^5\right) + \frac{1845}{256}m^3e^2\right\}$$

$$\sin 4Ev - c'mv \quad \varepsilon'\left\{\left(\frac{1981}{256}m^4 + \frac{13937}{256}m^5\right) - \frac{7355}{256}m^3e^2\right\}$$

$\sin 4Ev - 2cv \quad e^2\left(\frac{675}{256}m^2 + \frac{9045}{512}m^3 + \frac{574773}{8192}m^4 + \frac{10519499}{40960}m^5 + \frac{21099210263}{26214400}m^6\right)$

$\sin 4Ev - 2gv \quad \gamma^2\left(\frac{9}{256}m^2 + \frac{141}{512}m^3 - \frac{11257}{8192}m^4\right)$

$\sin 4Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon'\left(-\frac{45}{8}m^3 - \frac{4339}{256}m^4 + \frac{249497}{2560}m^5\right)$

$\sin 4Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon'\left(\frac{175}{8}m^3 + \frac{122869}{768}m^4 + \frac{922711}{1152}m^5\right)$

$\sin 4Ev - 3cv \quad e^3\left(\frac{225}{128}m^2\right)$

$\sin 4Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2\left(\frac{81}{256}m^2\right)$

$\sin 4Ev - 2gv + cv \quad e\gamma^2\left(-\frac{9}{256}m^2\right)$

$\sin 4Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon'\left(-\frac{675}{128}m^2\right)$

$\sin 4Ev - c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon'\left(\frac{1575}{128}m^2\right)$

$\sin 4Ev + c'mv - 2gv \quad \gamma^2\varepsilon'\left(-\frac{9}{128}m^2\right)$

$\sin 4Ev - c'mv - 2gv \quad \gamma^2\varepsilon'\left(\frac{21}{128}m^2\right).$

$L =$ *Latitude de la Lune* $=$

$\sin gv \quad \gamma\left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{8}\gamma^4 - \frac{9}{128}m^2\gamma^2 - \frac{9}{256}m^3\gamma^2\right)$

$\sin 3gv \quad \gamma^3\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{3}{32}m^2\right)$

$\sin 5gv \quad \gamma^5\left(\frac{1}{80}\right)$

$$\sin gv + cv \quad e\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(-m^2 + \frac{3}{8}m^3 + \frac{127}{32}m^4 + \frac{19045}{1536}m^5\right) - e^2\left(\frac{3}{4}m^2 + 6.m^3\right)\\ -\varepsilon'^2\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{11}{8}m^3\right) + \gamma^2\left(\frac{5}{8}m^2 - \frac{45}{32}m^3\right)\end{array}\right\}$$

$$\sin gv - cv \qquad e\gamma \left\{ \begin{array}{l} \left(3.m^2 + \frac{9}{2}m^3 + \frac{789}{64}m^4 + \frac{5795}{128}m^5\right) + e^2\left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{387}{64}m^3\right) \\ + \varepsilon'^2\left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{33}{2}m^3\right) - \gamma^2\left(\frac{5}{4}m^2 + \frac{297}{32}m^3\right) \end{array} \right\}$$

$$\sin gv - 2cv \qquad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{5}{8} + \frac{135}{64}m + \frac{659}{512}m^2 + \frac{13299}{4096}m^3\right) + e^2\left(\frac{5}{32} - \frac{135}{32}m\right) \\ + \frac{585}{128}m\varepsilon'^2 + \gamma^2\left(-\frac{25}{64} + \frac{945}{256}m\right) \end{array} \right\}$$

$$\sin gv + 2cv \qquad e^2\gamma\left(\frac{5}{32}\gamma^2 + \frac{15}{32}m^2\right)$$

$$\sin gv - 3cv \qquad e^3\gamma\left(-\frac{5}{8}m^2 - \frac{105}{32}m^3\right)$$

$$\sin 3gv - cv \qquad e\gamma^3\left(m^2 - \frac{9}{4}m^3\right)$$

$$\sin 3gv - 2cv \qquad e^2\gamma^3\left(-\frac{25}{64} + \frac{135}{64}m\right)$$

$$\sin gv + c'mv \qquad \varepsilon'\gamma\left\{\left(\frac{9}{8}m - \frac{69}{64}m^2 - \frac{975}{256}m^3 - \frac{65461}{4096}m^4\right) + \frac{9}{4}me^2 + \frac{81}{64}m\varepsilon'^2 - \frac{27}{32}m\gamma^2\right\}$$

$$\sin gv - c'mv \qquad \varepsilon'\gamma\left\{\left(-\frac{9}{8}m + \frac{9}{64}m^2 + \frac{999}{256}m^3 + \frac{106081}{4096}m^4\right) - \frac{9}{4}me^2 - \frac{81}{64}m\varepsilon'^2 + \frac{27}{32}m\gamma^2\right\}$$

$$\sin gv + 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\gamma\left(\frac{27}{32}m - \frac{165}{256}m^2\right)$$

$$\sin gv - 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\gamma\left\{\left(-\frac{27}{32}m + \frac{99}{256}m^2 + \frac{945}{512}m^3\right) - \frac{27}{16}me^2 - \frac{21}{32}m\varepsilon'^2 + \frac{81}{128}m\gamma^2\right\}$$

$$\sin gv + 3c'mv \qquad \varepsilon'^3\gamma\left(\frac{53}{64}m\right)$$

$$\sin gv - 3c'mv \qquad \varepsilon'^3\gamma\left(-\frac{53}{64}m\right)$$

$$\sin 3gv + c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^3\left(\frac{9}{32}m\right)$$

$$\sin 3gv - c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^3\left(-\frac{9}{32}m\right)$$

$$\sin gv + cv + c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma\left(-\frac{3}{2}m^2\right)$$

$$\sin gv - cv - c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma\left(\frac{9}{2}m^2\right)$$

$$\sin gv + cv - c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma\left(-\frac{3}{2}m^2\right)$$

$\sin gv - cv + c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma\left(\frac{9}{2}m^2\right)$

$\sin gv - 2cv - c'mv \qquad e^2\varepsilon'\gamma\left(\frac{135}{64}m\right)$

$\sin gv - 2cv + c'mv \qquad e^2\varepsilon'\gamma\left(-\frac{135}{64}m\right)$

$\sin gv - 2cv + 2c'mv \qquad e^2\varepsilon'^2\gamma\left(-\frac{405}{256}m\right)$

$\sin gv + cv - 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\gamma\left(-\frac{9}{4}m^2\right)$

$\sin gv - cv + 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\gamma\left(\frac{27}{4}m^2\right)$

$\sin gv - cv - 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\gamma\left(\frac{27}{4}m^2\right)$

$\sin fv \qquad \frac{D^2(K_{(2)}-\Psi)}{a^2m^2}\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}m-\frac{43}{18}m^2+\varepsilon'^2-\frac{1}{3}\gamma^2\right)\sin 2\omega$

$$\sin 2Ev - gv \quad \gamma\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{3}{8}m+\frac{3}{32}m^2-\frac{273}{512}m^3-\frac{4147}{2048}m^4-\frac{225439}{49152}m^5\right)\\ -\varepsilon'^2\left(\frac{15}{16}m+\frac{21}{8}m^2+\frac{6753}{1024}m^3\right)+e^2\left(\frac{3}{4}m+\frac{201}{64}m^2+\frac{1593}{256}m^3\right)\\ +\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m+\frac{21}{128}m^2+\frac{555}{2048}m^3\right)-\frac{3}{4}me^2\gamma^2+\frac{15}{32}m\varepsilon'^2\gamma^2\\ -\frac{15}{8}me^2\varepsilon'^2+\frac{9}{64}m\gamma^4+\frac{27}{64}me^4+\frac{39}{128}m\varepsilon'^4+\frac{45}{64}mb^4+\frac{9}{8}m^3(\varepsilon'^2-E'^2)\end{array}\right\}$$

$\sin 2Ev + gv \quad \gamma\left\{-\left(\frac{75}{128}m^4+\frac{2035}{1024}m^5\right)+\gamma^2\left(\frac{3}{32}m-\frac{9}{128}m^2-\frac{249}{2048}m^3\right)+\frac{225}{128}m^3e^2\right\}$

$\sin 2Ev + c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma\left(-\frac{3}{8}m-\frac{57}{64}m^2-\frac{327}{256}m^3-\frac{3}{4}me^2+\frac{3}{64}m\varepsilon'^2+\frac{3}{16}m\gamma^2\right)$

$\sin 2Ev - c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma\left(\frac{7}{8}m+\frac{65}{64}m^2-\frac{5}{256}m^3+\frac{7}{4}me^2-\frac{123}{64}m\varepsilon'^2-\frac{7}{16}m\gamma^2\right)$

$\sin 2Ev + c'mv + gv \quad \varepsilon'\gamma\left(-\frac{3}{32}m\gamma^2\right)$

$\sin 2Ev - c'mv + gv \quad \varepsilon'\gamma\left(\frac{7}{32}m\gamma^2\right)$

$$\sin 2Ev - gv - cv \quad e\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(-3.m^2-\frac{15}{2}m^3-\frac{1269}{64}m^4-\frac{4733}{128}m^5\right)\\ -\frac{9}{4}m^2e^2+\frac{15}{2}m^2\varepsilon'^2+\frac{9}{4}m^2\gamma^2\end{array}\right\}$$

$\sin 2Ev + gv + cv \quad e\gamma\left(m^4\right)$

$\sin 2Ev - gv + cv$	$e\gamma \left\{ \left(m^2 + \frac{31}{24} m^3 - \frac{67}{288} m^4 \right) + \frac{3}{4} m^2 e^2 - \frac{5}{2} m^2 \varepsilon'^2 - \frac{3}{4} m^2 \gamma^2 \right\}$
$\sin 2Ev + gv - cv$	$e\gamma \left\{ \left(-\frac{15}{8} m^3 - \frac{445}{64} m^4 - \frac{8915}{512} m^5 \right) + \frac{5}{8} m^2 e^2 - m^2 \gamma^2 \right\}$
$\sin 2Ev - 2cv + gv$	$e^2\gamma \left\{ \left(\frac{15}{64} m - \frac{915}{512} m^2 - \frac{2541}{256} m^3 \right) + \frac{105}{256} m e^2 - \frac{75}{128} m \varepsilon'^2 - \frac{225}{512} m \gamma^2 \right\}$
$\sin 2Ev + 2cv - gv$	$e^2\gamma \left(-\frac{15}{32} m^2 + \frac{93}{256} m^3 + \frac{15}{128} m \gamma^2 \right)$
$\sin 2Ev - 2cv - gv$	$e^2\gamma \left(-\frac{15}{16} m - \frac{333}{128} m^2 \right)$
$\sin 2Ev - 3gv$	$\gamma^3 \left(-\frac{3}{32} m + \frac{21}{64} m^2 \right)$
$\sin 2Ev - 2c'mv - gv$	$\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{51}{32} m + \frac{789}{256} m^2 \right)$
$\sin 2Ev + 2c'mv - gv$	$\varepsilon'^2\gamma \left\{ \left(-\frac{9}{32} m - \frac{93}{256} m^2 - \frac{2287}{512} m^3 \right) - \frac{9}{16} m e^2 - \frac{7}{16} m \varepsilon'^2 + \frac{9}{64} m \gamma^2 \right\}$
$\sin 2Ev - 3gv + cv$	$e\gamma^3 \left(m^2 \right)$
$\sin 2Ev + gv - 3cv$	$e^3\gamma \left(-\frac{15}{8} m^2 \right)$
$\sin 2Ev + 3c'mv - gv$	$\varepsilon'^3\gamma \left(-\frac{1}{64} m \right)$
$\sin 2Ev - 3c'mv - gv$	$\varepsilon'^3\gamma \left(\frac{169}{64} m \right)$
$\sin 2Ev + c'mv - 3gv$	$\varepsilon'\gamma^3 \left(\frac{3}{32} m \right)$
$\sin 2Ev - c'mv - 3gv$	$\varepsilon'\gamma^3 \left(-\frac{7}{32} m \right)$
$\sin 2Ev - 3gv + 2cv$	$e^2\gamma^3 \left(-\frac{225}{512} m \right)$
$\sin 2Ev + 2c'mv - 3gv$	$\varepsilon'^2\gamma^3 \left(\frac{9}{128} m \right)$
$\sin 2Ev + c'mv - gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma \left(-\frac{1}{2} m^2 \right)$
$\sin 2Ev - c'mv - gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma \left(\frac{7}{2} m^2 \right)$
$\sin 2Ev + c'mv - gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma \left(\frac{3}{2} m^2 \right)$.

$\sin 2Ev - c'mv - gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma$	$\left(-\frac{21}{2}m^2\right)$
$\sin 2Ev + c'mv + gv - 2cv$	$e^2\varepsilon'\gamma$	$\left(-\frac{15}{64}m\right)$
$\sin 2Ev + c'mv - gv - 2cv$	$e^2\varepsilon'\gamma$	$\left(\frac{15}{16}m\right)$
$\sin 2Ev - c'mv + gv - 2cv$	$e^2\varepsilon'\gamma$	$\left(\frac{35}{64}m\right)$
$\sin 2Ev - c'mv - gv - 2cv$	$e^2\varepsilon'\gamma$	$\left(-\frac{35}{16}m\right)$
$\sin 2Ev + 2c'mv - gv + cv$	$e\varepsilon'^2\gamma$	$\left(-\frac{9}{16}m^3\right)$
$\sin 2Ev + 2c'mv + gv - 2cv$	$e^2\varepsilon'^2\gamma$	$\left(-\frac{45}{256}m\right)$
$\sin 2Ev + 2c'mv - gv - 2cv$	$e^2\varepsilon'^2\gamma$	$\left(\frac{45}{64}m\right)$
$\sin Ev + gv$	γb^2	$\left(\frac{5}{8}m^2\right)$
$\sin Ev - gv$	γb^2	$\left(\frac{9}{4}m^2\right)$
$\sin Ev + gv - cv$	$e\gamma b^2$	$\left(\frac{75}{32}m\right)$
$\sin Ev - gv + cv$	$e\gamma b^2$	$\left(-\frac{45}{16}m\right)$
$\sin Ev - gv - cv$	$e\gamma b^2$	$\left(\frac{45}{16}m\right)$
$\sin Ev + c'mv + gv$	$\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(-\frac{5}{8}m^2 + \frac{505}{64}m^3\right)$
$\sin Ev + c'mv - gv$	$\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(-\frac{3}{2}m^2 + \frac{225}{16}m^3\right)$
$\sin Ev - c'mv + gv$	$\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(\frac{15}{8}m^2\right)$
$\sin Ev - c'mv - gv$	$\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(3.m^2\right)$
$\sin Ev + c'mv + gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(-\frac{5}{8} - \frac{185}{16}m\right)$
$\sin Ev + c'mv - gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(-\frac{5}{4} - \frac{55}{8}m\right)$
$\sin Ev + c'mv - gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(\frac{5}{6} - \frac{145}{16}m\right)$

$\sin Ev - c'mv + gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(\frac{245}{64}m\right)$
$\sin Ev - c'mv - gv + cv$	$e\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(-\frac{225}{64}m\right)$
$\sin 3Ev - gv$	γb^2	$\left(-\frac{5}{8}m^2\right)$
$\sin 3Ev - gv - cv$	$e\gamma b^2$	$\left(-\frac{25}{32}m\right)$
$\sin 3Ev + c'mv - gv$	$\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(\frac{15}{8}m^2\right)$
$\sin 3Ev + c'mv - gv - cv$	$e\varepsilon'\gamma b^2$	$\left(\frac{135}{64}m\right)$
$\sin 4Ev - gv$	γ	$\left(\frac{75}{128}m^4 + \frac{9}{256}m^2\gamma^2\right)$
$\sin 4Ev - 3gv$	γ^3	$\left(0.m^2\right)$
$\sin 4Ev - gv - cv$	$e\gamma$	$\left(\frac{15}{8}m^3 + \frac{645}{64}m^4\right)$
$\sin 4Ev - gv - 2cv$	$e^2\gamma$	$\left(\frac{225}{256}m^2\right)$.

§ 4.

Expression de la Longitude vraie de la Lune en fonction de sa Longitude moyenne.

49. Soit $nt+\varepsilon=v+\int\zeta dv+F(v)$ l'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie, telle qu'elle vient d'être rapportée dans le paragraphe précédent. La petitesse des coefficiens, jointe à l'excessive longueur de la période des termes dont se compose l'intégrale $\int\zeta dv$, permet d'en éliminer v en y faisant simplement $v=nt+\varepsilon$. De sorte que, nous avons l'équation

$$nt+\varepsilon-\int\zeta n dt=v+F(v);$$

où le premier membre est une fonction de t, et le second une fonction de v, seulement. Ainsi on peut, à l'aide de la série de *Lagrange*, tirer de là immédiatement la valeur de v, en posant

$$L'=v-F(v)+\frac{1}{2}\frac{d.\overline{F(v)}^2}{dv}-\frac{1}{2.3}\frac{d^2.\overline{F(v)}^3}{dv^2}+\text{etc.},$$

et prenant pour l'expression cherchée de v en fonction de t ce que devient le second membre de cette équation lorsque, après l'exécution des opérations indiquées, on y remplace la lettre v par le trinome $nt+\varepsilon-\int\zeta n dt$.

Toute la difficulté consiste donc dans la formation des puissances de $F(v)$; ou plutôt dans le choix convenable des termes qu'il faut conserver dans le développement de ces puissances. A cet égard il y a un principe fixe duquel on ne saurait s'écarter, fondé sur ceci: savoir, que, le développement de v en fonction de t, qu'on obtient par ce renversement de notre formule originale, ne peut être censé exact, analytiquement parlant, au de là des termes, qui, par leur ordre, ou par leur forme, différéroient de ceux que nous avons obtenu par l'intégration directe dans l'expression de $F(v)$.

D'après cela on conçoit, qu'il serait absurde de vouloir tenir compte dans $\frac{d.\overline{F(v)}^2}{dv}$, $\frac{d^2.\overline{F(v)}^3}{dv^2}$, etc. des termes de la forme

$$A \sin(5Ev + \alpha v), \quad A' \sin(6Ev + \alpha' v), \text{ etc. };$$

ou, des termes d'un ordre supérieur au huitième qui affecteraient des argumens semblables à ceux déjà renfermés dans $F(v)$. En effet; cette fonction n'en renferme aucun qui dépasse cet ordre, et ne comprend que des termes spéciaux du sixième, septième, ou huitième ordre, auxquels la nature peu convergente de certaines séries a forcé d'avoir égard : mais son caractère analytique et exempt d'exceptions, est, d'être exacte jusqu'aux quantités du cinquième ordre inclusivement.

Dans la formation des puissances successives de $F(v)$ on doit donc avoir le double but : de pouvoir en déduire par la différentiation les termes correspondans à ceux qu'on voit dans $F(v)$; et de pouvoir faire servir le développement du carré de $F(v)$ à la formation de celui du cube; ce dernier à la formation de la quatrième puissance; et ainsi de suite. Cependant cette règle doit être associée à une autre qui constitue une espèce d'exception. Voici en quoi elle consiste. Avant d'obtenir $F(v)$, notre méthode donne la valeur de $\frac{d.F(v)}{dv}$ avec toutes les parties qui concourent à la formation des différens termes dont on a voulu tenir compte. Si donc, par la destruction mutuelle de ces parties, quelques uns de ces termes ne paroissent pas dans l'expression de $F(v)$, cela ne prouve pas qu'il doit en arriver autant à l'ensemble de ceux du même ordre et affectés des mêmes argumens, qui pourraient naître du carré, du cube, etc. de $F(v)$. En conséquence, il faudra porter une attention particulière sur les termes de cette espèce, pour éviter toute inconséquence et demeurer fidèle aux principes que l'analyse prescrit de suivre dans les méthodes d'approximation.

50. En appliquant ces réflexions à notre expression de $F(v)$, et remarquant qu'elle renferme le terme du huitième ordre, de la forme $Ke^2m^6 . \sin 4Ev - 2cv$, on sentira aussitôt, que le terme correspondant fourni par le carré de $F(v)$ serait inexact, si en développant la valeur de $\overline{F(v)}^2$, on n'avait pas l'attention de considérer la combinaison du terme $-\frac{11}{8}m^2 \sin 2Ev$ avec le terme

$$-\frac{23625}{4096} m^4 e^2 \sin 6Ev - 2cv,$$

qui fait aussi partie de la valeur de δnt. En effet, nous avons (Voyez p. 500, 502, 516, 525 du 3.[ième] Vol.);

$$2\,\frac{\delta u}{u_1} = \cos 6Ev - 2cv \;\; e^2\left(\frac{675}{256}m^4\right);\;\; 4\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 = \cos 6Ev - 2cv \;\; e^2\left(-\frac{1125}{128}m^4\right);$$

$$8\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^3 = \cos 6Ev - 2cv \;\; e^2\left(\frac{675}{32}m^4\right);\; -m^2\int R_1 dv = \cos 6Ev - 2cv \;\; e^2\left(\frac{3375}{1024}m^4\right):$$

et comme il suffit, pour l'objet actuel, de poser l'équation

$$\frac{\delta . \delta nt}{dv} = m^2\int R_1 dv - \left\{2\frac{\delta u}{u_1} - 3\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^3\right\},$$

il est clair qu'on a;

$$\frac{d . \delta nt}{dv} = \cos 6Ev - 2cv \;\; e^2\left\{-\frac{675}{256} - \frac{3375}{512} - \frac{675}{64} - \frac{3375}{1024} = -\frac{23625}{1024}\right\} m^4;$$

d'où l'on tire,

$$\delta nt = \sin 6Ev - 2cv \;\; e^2\left(-\frac{23625}{4096}m^4\right).$$

Au reste, ce terme est le seul qu'il soit nécessaire d'ajouter à notre expression de δnt pour en déduire les puissances de $F(v)$, conformément aux préceptes qu'on vient d'exposer. Le doute analogue qu'on pourrait se proposer à l'égard du coefficient de l'argument $4Ev - cv$ disparoît, en observant que, dans δnt, nous avons

borné l'approximation au terme du *septième* ordre, de la forme $Km^6 e.\sin(4Ev-cv)$; et que la combinaison du terme $-\frac{11}{8}m^2\sin 2Ev$ avec celui affecté de l'argument $6Ev-cv$ donnerait nécessairement un terme du huitième ordre; puisque, dans la page 633 du 3.ième Volume, on a trouvé,

$$\delta u = \cos 6Ev-cv \quad e\left(\frac{1785}{1024}m^5\right).$$

51. Tels sont les principes que nous avons suivis dans la construction de nos résultats. Nous allons les présenter accompagnés des parties dont chaque terme se compose, afin d'en faciliter la vérification. Il est vrai que, pour l'objet unique qu'on a en vue dans ce paragraphe, on aurait pu en abréger l'exposition en donnant seulement les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{d.\overline{F(v)}^2}{dv}$, $\frac{d^2.\overline{F(v)}^3}{dv^2}$, etc.: mais nous ne voulons pas supprimer ici des résultats intermédiaires qui peuvent être utiles pour résoudre d'autres problèmes du même genre. S'il était question, par exemple, de traduire en fonction de t l'expression de la latitude ou de la parallaxe de la Lune, on aurait à transformer de la sorte une série de termes de la forme $\begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix}\, pv+q$; ce qui, d'après le même théorème de *Lagrange*, exigerait de former la fonction

$$\begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix}\, pv+q \mp p \begin{smallmatrix}\cos.\\ \sin.\end{smallmatrix}\, pv+q \times F(v) \pm \frac{p}{2}\,\frac{d.\left\{\begin{smallmatrix}\cos.\\ \sin.\end{smallmatrix}\, pv+q \times \overline{F(v)}^2\right\}}{dv} \mp \text{etc.}$$

et d'y changer ensuite, v en $nt+\varepsilon-\int\zeta ndt$. Or il est clair, que cette opération deviendra plus facile, en ayant déjà préparé le développement des puissances de $F(v)$.

Ces explications nous paroissent suffisantes pour rendre raison de la formation aussi bien que de la disposition des résultats suivans.

$$\{F(v)\}^2 =$$

$$\cos cv \; e \left\{ \begin{aligned}
&\tfrac{165}{32} m^3 + \left(\tfrac{3135}{128} + \tfrac{295}{16} - \tfrac{11}{4} = \tfrac{5143}{128}\right) m^4 \\
&+ \left(\tfrac{190817}{2048} + \tfrac{5605}{64} + \tfrac{4465}{96} - \tfrac{1309}{192} - \tfrac{59}{6} = \tfrac{431329}{2048}\right) m^5 \\
&+ \left(\tfrac{7394167}{24576} + \tfrac{1023473}{3072} + \tfrac{84835}{384} + \tfrac{14275}{144} - \tfrac{71071}{4608} - \tfrac{7021}{288} - \tfrac{893}{36} = \tfrac{65579597}{73728}\right) m^6 \\
&- \tfrac{3}{2} e^2 - \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{675}{64} - \tfrac{675}{64} = \tfrac{5}{4}\right) m^2 e^2 \\
&+ \left(\tfrac{405}{32} - \tfrac{135}{128} - \tfrac{165}{64} - \tfrac{12825}{256} - \tfrac{9045}{256} + \tfrac{165}{64} + \tfrac{45}{8} + \tfrac{345}{16} + \tfrac{12825}{256} = \tfrac{885}{256}\right) m^3 e^2 \\
&+ \left\{ \begin{aligned}
&\tfrac{2577}{32} - \tfrac{3}{32} + \tfrac{1911}{512} - \tfrac{4455}{512} - \tfrac{295}{32} - \tfrac{780615}{4096} \\
&- \tfrac{171855}{1024} - \tfrac{506535}{4096} + \tfrac{1749}{256} + \tfrac{295}{32} + \tfrac{1785}{128} + \tfrac{603}{32} \\
&+ \tfrac{935285}{4096} + \tfrac{6555}{64} + \tfrac{780615}{4096} - \tfrac{65}{16} = \tfrac{307809}{2048}
\end{aligned} \right\} m^4 e^2 \\
&+ \left(\tfrac{27}{4} + \tfrac{27}{4} = \tfrac{27}{2}\right) m^2 \varepsilon'^2 + \left(\tfrac{1863}{32} + \tfrac{3987}{32} - \tfrac{825}{64} - \tfrac{825}{64} + \tfrac{165}{64} + \tfrac{2695}{64} = \tfrac{6455}{32}\right) m^3 \varepsilon'^2 \\
&+ \left\{ \begin{aligned}
&\tfrac{54405}{128} - \tfrac{6615}{64} + \tfrac{111105}{128} - \tfrac{6615}{64} - \tfrac{1815}{64} \\
&- \tfrac{1475}{32} - \tfrac{15675}{256} - \tfrac{1475}{32} + \tfrac{55}{8} + \tfrac{55}{8} + \tfrac{165}{512} \\
&+ \tfrac{295}{64} - \tfrac{11}{16} + \tfrac{136675}{512} + \tfrac{14455}{64} - \tfrac{539}{16} = \tfrac{353705}{256}
\end{aligned} \right\} m^4 \varepsilon'^2 \\
&- \tfrac{45}{64} m^2 \gamma^2 - \left(\tfrac{231}{64} + \tfrac{855}{256} + \tfrac{705}{256} - \tfrac{33}{128} - \tfrac{3}{8} = \tfrac{1161}{128}\right) m^3 \gamma^2 \\
&- \left(\tfrac{5643}{256} + \tfrac{413}{32} + \tfrac{52041}{4096} + \tfrac{13395}{1024} + \tfrac{25745}{4096} - \tfrac{737}{512} - \tfrac{59}{64} - \tfrac{119}{128} - \tfrac{47}{32} = \tfrac{127511}{2048}\right) m^4 \gamma^2 \\
&+ \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{2}\right) e^2 \gamma^2 + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{16}\right) \gamma^4 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\right) e^4 + \tfrac{135}{64} m e^2 \gamma^2 \\
&- \left(\tfrac{3}{16} + \tfrac{27}{16} = \tfrac{15}{8}\right) m^2 e^2 E'^2 - \tfrac{63}{16} m^2 e^2 (\varepsilon'^2 - E'^2) + \left(\tfrac{2475}{256} - \tfrac{675}{256} = \tfrac{225}{32}\right) m^2 b^4 \\
&+ \left\{ \begin{aligned}
&\tfrac{243}{32} - \tfrac{27}{8} - \tfrac{27}{8} + \tfrac{243}{32} - \tfrac{243}{64} - \tfrac{243}{64} + \tfrac{3375}{128} + \tfrac{3375}{128} \\
&- \tfrac{3375}{128} - \tfrac{3375}{128} + \tfrac{675}{64} + \tfrac{3675}{64} - \tfrac{675}{64} - \tfrac{3675}{64} = \tfrac{27}{32}
\end{aligned} \right\} m^2 e^2 \varepsilon'^2 \\
&- \left(\tfrac{243}{16} + \tfrac{243}{32} + \tfrac{243}{16} + \tfrac{243}{32} - \tfrac{225}{128} - \tfrac{225}{128} + \tfrac{45}{64} + \tfrac{245}{64} = \tfrac{2981}{64}\right) m^2 \gamma^2 \varepsilon'^2 - \tfrac{135}{128} m \gamma^4
\end{aligned} \right\}$$

$$+$$

$$
\cos cv\; e \left\{
\begin{aligned}
&+\left\{\begin{aligned}&\tfrac{75}{32}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{3}{32}+\tfrac{891}{512}+\tfrac{945}{128}+\tfrac{45}{128}\\ &+\tfrac{585}{64}-\tfrac{135}{256}-\tfrac{45}{128}-\tfrac{855}{128}-\tfrac{945}{128}=\tfrac{3145}{512}\end{aligned}\right\} m^2 e^2 \gamma^2 \\
&+\left(\tfrac{1}{8}-\tfrac{1331}{1024}-\tfrac{11}{16}+\tfrac{11}{64}+\tfrac{63}{128}+\tfrac{135}{256}-\tfrac{9}{256}+\tfrac{81}{512}-\tfrac{459}{512}=-\tfrac{1479}{1024}\right) m^2\gamma^4 \\
&+\left(\tfrac{243}{32}+\tfrac{243}{32}+\tfrac{243}{32}+\tfrac{243}{32}+\tfrac{243}{64}+\tfrac{243}{64}=\tfrac{1215}{32}\right) m^2 \varepsilon'^4+\left(\tfrac{125}{16}-\tfrac{75}{16}=\tfrac{25}{8}\right)\varepsilon'^2 b^4 \\
&+\left(\tfrac{807}{128}-\tfrac{3}{16}+\tfrac{891}{128}+\tfrac{17}{64}-\tfrac{1}{48}+\tfrac{675}{128}+\tfrac{675}{256}-\tfrac{675}{128}+\tfrac{225}{256}-\tfrac{675}{128}=\tfrac{4441}{384}\right) m^2 e^4 \\
&-\left(\tfrac{3}{32}+\tfrac{3}{32}+\tfrac{5}{96}+\tfrac{1}{24}=\tfrac{9}{32}\right) e^6+\left(\tfrac{3}{64}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{64}+\tfrac{1}{32}=0\right)\gamma^6 \\
&+\left(\tfrac{1}{16}-\tfrac{7}{32}-\tfrac{45}{64}-\tfrac{3}{64}+\tfrac{1}{48}=-\tfrac{85}{96}\right) e^4\gamma^2 \\
&+\left(\tfrac{5}{32}+\tfrac{15}{64}-\tfrac{37}{32}-\tfrac{1}{32}+\tfrac{3}{16}-\tfrac{55}{128}-\tfrac{15}{16}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{3}{64}=-\tfrac{275}{128}\right) e^2\gamma^4
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\cos 2cv\; e^2 \left\{
\begin{aligned}
&-2+\gamma^2-3.m^2+\tfrac{2}{3}e^2-\left(\tfrac{15}{2}+\tfrac{45}{16}-\tfrac{495}{128}=\tfrac{825}{128}\right) m^3 \\
&-\left(\tfrac{9}{8}-\tfrac{637}{64}-\tfrac{253}{32}-\tfrac{885}{64}+\tfrac{285}{8}+\tfrac{595}{32}-\tfrac{715}{256}=\tfrac{5341}{256}\right) m^4 \\
&+\left\{\begin{aligned}&\tfrac{137413}{3072}-\tfrac{135}{64}+\tfrac{2057627}{24576}+\tfrac{1357}{48}+\tfrac{4465}{128}\\ &-\tfrac{17347}{128}-\tfrac{11305}{128}-\tfrac{32305}{768}+\tfrac{1771}{384}+\tfrac{3835}{384}=-\tfrac{506335}{8192}\end{aligned}\right\} m^5 \\
&+\left\{\begin{aligned}&\tfrac{146597}{12288}-\tfrac{2025}{2048}+\tfrac{1911}{256}+\tfrac{75587039}{147456}+\tfrac{11036363}{36864}\\ &+\tfrac{20539}{288}+\tfrac{14275}{192}-\tfrac{672197}{1536}-\tfrac{2064293}{6144}-\tfrac{613795}{3072}\\ &-\tfrac{1024945}{18432}+\tfrac{191025}{65536}+\tfrac{113927}{11520}+\tfrac{9499}{576}+\tfrac{58045}{2304}=\tfrac{4495817}{2949120}\end{aligned}\right\} m^6 \\
&+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{15}{128}=\tfrac{47}{128}\right) e^4+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{32}+\tfrac{3}{64}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{9}{64}\right)\gamma^4-\tfrac{9}{2}m^2 E'^2 \\
&-\left(\tfrac{15}{8}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}=\tfrac{23}{12}\right) e^2\gamma^2+\left(\tfrac{297}{16}-\tfrac{17}{24}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{225}{32}-\tfrac{2025}{256}=\tfrac{13421}{768}\right) m^2 e^2 \\
&+\left(\tfrac{297}{64}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{45}{64}-\tfrac{135}{256}=\tfrac{1425}{256}\right) m^2\gamma^2-\left(\tfrac{81}{16}+\tfrac{81}{16}-\tfrac{81}{16}=\tfrac{81}{16}\right) m^2\varepsilon'^2-\tfrac{21}{2}m^2(\varepsilon'^2-E'^2)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\cos 3cv\; e^3 \left\{ \tfrac{3}{2}+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{9}{8}=\tfrac{5}{4}\right) m^2-\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{8}=\tfrac{1}{2}\right)\gamma^2-\left(\tfrac{5}{16}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{16}\right) c^2 \right\}
$$

$$
\cos 4cv\; e^4 \left(-\tfrac{2}{3}-\tfrac{9}{32}=-\tfrac{91}{96}\right)
$$

$$\cos 5cv \qquad e^5\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{4}=\frac{9}{16}\right)$$

$$\cos 2gv \qquad \gamma^2\left\{\left(2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\right)e^2-\frac{135}{16}me^2+\frac{99}{128}m^3+\left(\frac{177}{64}-\frac{121}{64}+\frac{121}{256}=\frac{345}{256}\right)m^4\right\}$$

$$\cos 4gv \qquad \gamma^4\left(-\frac{1}{32}\right)$$

$$\cos 2gv-cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}+\left(\frac{11}{8}-\frac{3}{8}+\frac{135}{64}=\frac{199}{64}\right)m^2+\left(\frac{15}{8}-\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{23}{16}\right)e^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\right)\gamma^2\\ -\left(\frac{405}{64}+\frac{135}{32}=\frac{675}{64}\right)me^2+\left(\frac{165}{256}-\frac{33}{64}-\frac{45}{128}-\frac{561}{256}-\frac{165}{32}+\frac{2565}{256}=\frac{627}{256}\right)m^3\end{array}\right\}$$

$$\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{11}{8}-\frac{3}{8}=1\right)m^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\right)\gamma^2-\left(\frac{15}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=3\right)e^2\right\}$$

$$\cos 2gv-2cv \quad e^2\gamma^2\left\{-\left(2-\frac{3}{16}=\frac{29}{16}\right)+\frac{135}{16}m\right\}$$

$$\cos 2gv+2cv \quad e^2\gamma^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=-\frac{11}{16}\right)$$

$$\cos 4gv-cv \quad e\gamma^4\left(-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{5}{16}\right)$$

$$\cos 4gv+cv \quad e\gamma^4\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}\right)$$

$$\cos 2gv+3cv \quad e^3\gamma^2\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{12}=\frac{31}{48}\right)$$

$$\cos 2gv-3cv \quad e^3\gamma^2\left\{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}\right)+\left(\frac{135}{32}-\frac{405}{128}=\frac{135}{128}\right)m\right\}$$

$$\cos c'mv \quad \varepsilon'\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{847}{128}-\frac{121}{128}=\frac{363}{64}\right)m^4+\left(\frac{4543}{192}+\frac{4543}{128}-\frac{649}{384}-\frac{649}{192}=\frac{649}{12}\right)m^5\\ +\left(\frac{77033}{512}-\frac{319}{4608}-\frac{3481}{576}-\frac{9823}{1152}+\frac{24367}{192}+\frac{68761}{1152}=\frac{247615}{768}\right)m^6\\ +\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=0\right)me^2+\left(\frac{1329}{16}-\frac{621}{16}-\frac{225}{16}+\frac{525}{16}=63\right)m^2e^2\\ +\left\{\begin{array}{l}\frac{37035}{64}-\frac{18135}{64}-\frac{27}{8}+\frac{27}{8}+\frac{495}{128}-\frac{1155}{128}-\frac{3465}{256}\\ -\frac{225}{128}-\frac{4275}{64}+\frac{26625}{128}+\frac{9975}{64}+\frac{495}{256}=\frac{73455}{128}\end{array}\right\}m^3e^2\\ +\left\{\begin{array}{l}\frac{3599473}{1024}-\frac{2061269}{1024}-\frac{1863}{64}-\frac{405}{128}+\frac{3987}{64}+\frac{405}{128}+\frac{1089}{512}+\frac{885}{64}\\ -\frac{21813}{512}-\frac{2065}{64}-\frac{18585}{256}+\frac{283695}{512}-\frac{4275}{512}-\frac{260205}{1024}+\frac{490365}{512}\\ +\frac{505875}{512}+\frac{607145}{1024}-2+14+\frac{885}{256}+\frac{6633}{1024}-\frac{46431}{1024}=\frac{2155905}{512}\end{array}\right\}m^4e^2\end{array}\right\}$$

$$\cos 2c'mv \qquad \varepsilon'^2 \left\{ -\frac{9}{2}m^2 + \left(\frac{27}{8} - \frac{27}{8} = 0\right) m e^2 \right\}$$

$$\cos cv + c'mv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} 6.m - \left(\frac{735}{8} - \frac{9}{2} - \frac{385}{32} + \frac{165}{64} = \frac{4987}{64}\right) m^3 \\ + \left(\frac{135}{32} - \frac{1261}{2} + \frac{19525}{256} + \frac{2065}{48} + \frac{11}{8} - \frac{3135}{256} - \frac{295}{64} - \frac{77}{8} = -\frac{204325}{384}\right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{359601}{1024} - \frac{572357}{192} - \frac{2205}{32} - \frac{1911}{128} + \frac{104725}{384} + \frac{31255}{288} + \frac{3685}{768} \\ + \frac{59}{12} - \frac{190817}{4096} - \frac{5605}{256} - \frac{145}{768} - \frac{413}{8} - \frac{9163}{384} = -\frac{90939253}{36864} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{18398633}{16384} - \frac{3273241}{288} - \frac{3783}{8} - \frac{33075}{512} - \frac{137413}{2048} + \frac{642923}{512} \\ + \frac{1585075}{2304} + \frac{99925}{432} + \frac{364441}{9216} + \frac{19765}{1152} + \frac{893}{72} - \frac{7394167}{49152} \\ - \frac{1023473}{12288} - \frac{2755}{3072} + \frac{5645}{576} - \frac{7003}{32} - \frac{49147}{384} - \frac{497497}{9216} = -\frac{510303229}{55296} \end{array} \right\} m^6 \\ + \frac{27}{4} m \varepsilon'^2 - \left(\frac{27}{4} + \frac{3}{2} = \frac{33}{4}\right) m \gamma^2 + \left(\frac{27}{4} + \frac{27}{8} - \frac{27}{16} = \frac{135}{16}\right) m e^2 \end{array} \right.$$

$$\cos cv - c'mv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -6.m + \left(\frac{735}{8} - \frac{9}{2} - \frac{165}{32} + \frac{1155}{64} = \frac{6417}{64}\right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1261}{2} - \frac{135}{32} - \frac{165}{256} - \frac{295}{16} \\ - \frac{77}{8} + \frac{21945}{256} + \frac{6195}{64} + \frac{11}{8} = \frac{25007}{32} \end{array} \right\} m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{572357}{192} + \frac{2205}{32} + \frac{1911}{128} + \frac{208043}{1024} - \frac{295}{128} - \frac{9955}{256} - \frac{413}{12} \\ + \frac{1335719}{4096} + \frac{117705}{256} + \frac{105045}{256} + \frac{59}{24} + \frac{1309}{384} - \frac{4465}{96} = \frac{53428201}{12288} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{3273241}{288} + \frac{3783}{8} + \frac{33075}{512} + \frac{137413}{2048} + \frac{108521237}{49152} + \frac{1115867}{1536} \\ - \frac{4465}{768} - \frac{14275}{144} - \frac{204875}{1024} - \frac{53395}{384} - \frac{6251}{72} + \frac{51759169}{49152} \\ + \frac{7164311}{4096} + \frac{1995855}{1024} + \frac{91155}{64} + \frac{29}{288} + \frac{7021}{1152} + \frac{71071}{9216} = \frac{1516059467}{73728} \end{array} \right\} m^6 \\ - \frac{27}{4} m \varepsilon'^2 + \left(\frac{27}{4} + \frac{3}{2} = \frac{33}{4}\right) m \gamma^2 - \left(\frac{27}{4} + \frac{27}{8} - \frac{27}{16} = \frac{135}{16}\right) m e^2 \end{array} \right.$$

$$\cos cv + 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2 \left\{ \frac{9}{2}m - \frac{27}{4}m^2 + \left(\frac{27}{8} - \frac{5175}{64} - \frac{1863}{32} + \frac{2805}{128} - \frac{385}{64} = -\frac{15335}{128}\right) m^3 \right\}$$

$$\cos cv - 2c'mv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{9}{2}m - \frac{27}{4}m^2 + \left(\frac{5175}{64} - \frac{27}{8} - \frac{3987}{32} - \frac{495}{128} + \frac{2805}{64} - \frac{1155}{64} = -\frac{3225}{128}\right)m^3 \\ -\frac{7}{2}m\varepsilon'^2 - \left(\frac{81}{16} + \frac{81}{32} - \frac{81}{64} = \frac{405}{64}\right)me^2 + \left(\frac{81}{16} + \frac{9}{8} = \frac{99}{16}\right)m\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos cv + 3c'mv \quad e\varepsilon'^3 \left(\frac{53}{12}m \right)$$

$$\cos cv - 3c'mv \quad e\varepsilon'^3 \left(-\frac{53}{12}m \right)$$

$$\cos 2cv + c'mv \quad e^2\varepsilon' \left\{ \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\right)m + \frac{621}{16}m^2 \right\}$$

$$\cos 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\right)m - \frac{1329}{16}m^2 - \left(\frac{81}{16} - \frac{81}{32} = \frac{81}{32}\right)m\varepsilon'^2 \\ +\left(\frac{3}{16} - \frac{37035}{64} - \frac{27}{8} - \frac{2205}{64} - \frac{495}{128} - \frac{105}{4} + \frac{15}{2} + \frac{3465}{256} = -\frac{160101}{256}\right)m^3 \\ +\left(\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{81}{32} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{213}{32}\right)me^2 + \left(\frac{81}{8} + \frac{9}{8} - \frac{81}{32} - \frac{3}{16} = \frac{273}{32}\right)m\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2cv - 2c'mv \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{27}{16} - \frac{27}{8} = -\frac{27}{16} \right\} m$$

$$\cos 2cv + 2c'mv \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{27}{8} - \frac{27}{16} = \frac{27}{16} \right\} m$$

$$\cos 3cv - c'mv \quad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{27}{8} + \frac{27}{16} - 1 = \frac{65}{16} \right\} m$$

$$\cos 3cv + c'mv \quad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{27}{8} - \frac{27}{16} + 1 = -\frac{65}{16} \right\} m$$

$$\cos 2gv + c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2 \left(-\frac{3}{4}m \right)$$

$$\cos 2gv - c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}m - \left(\frac{735}{64} + \frac{33}{16} + \frac{99}{128} - \frac{693}{256} = \frac{2973}{256}\right)m^3 + \frac{27}{32}m\varepsilon'^2 \\ -\left(\frac{27}{32} + \frac{3}{8} = \frac{39}{32}\right)m\gamma^2 - \left(\frac{27}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{32} + \frac{45}{16} + \frac{9}{16} - \frac{9}{4} = \frac{243}{32}\right)me^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2gv + cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{16} - \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{21}{16} \right\} m$$

$$\cos 2gv - cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{8} + \frac{9}{16} + 3 = \frac{75}{16} \right\} m$$

$$\cos 2gv + cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{8} - \frac{9}{16} + \frac{3}{4} = \frac{21}{16} \right\} m$$

$$\cos 2gv - cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{8} - \frac{9}{16} - 3 = -\frac{75}{16} \right\} m$$

$$\cos 2gv - 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \gamma^2 \left(\quad \frac{9}{16} m \right)$$

$$\cos 2gv + 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \gamma^2 \left(- \frac{9}{16} m \right)$$

$$\cos 2Ev \left\{ \begin{array}{l}
- \frac{3113}{2048} m^6 - \left(\frac{21901}{2560} + \frac{16697}{3072} = \frac{214891}{15360} \right) m^7 \\
- \left(\frac{7056247}{230400} + \frac{117469}{3840} + \frac{252719}{18432} = \frac{34526749}{460800} \right) m^8 - \frac{15}{2} m e^2 \\
- \left(4 + \frac{285}{8} = \frac{317}{8} \right) m^2 e^2 - \left(\frac{17347}{128} + \frac{119}{12} + \frac{45}{8} = \frac{58009}{384} \right) m^3 e^2 \\
- \left(\frac{672197}{1536} + \frac{6461}{288} + \frac{225}{16} + \frac{855}{32} + \frac{675}{128} + 3 = \frac{2346011}{4608} \right) m^4 e^2 \\
- \left\{ \begin{array}{l} \frac{43889975}{36864} + \frac{204989}{6912} + \frac{5535}{64} + \frac{4275}{64} + \frac{12825}{512} - \frac{9555}{512} \\ + \frac{52041}{512} + \frac{119}{16} + \frac{45}{16} - \frac{10725}{1024} - \frac{12735}{4096} = \frac{40870007}{27648} \end{array} \right\} m^5 e^2 \\
+ \left(\frac{33}{16} + \frac{231}{16} = \frac{67}{4} \right) m^3 \varepsilon'^2 + \left(\frac{59}{16} + \frac{1239}{16} = \frac{649}{8} \right) m^4 \varepsilon'^2 - \left(\frac{21}{16} + \frac{9}{16} = \frac{15}{8} \right) m^2 \gamma^2 \varepsilon'^2 \\
+ \left(\frac{29}{192} - \frac{8085}{256} + \frac{21009}{64} - \frac{56595}{256} = \frac{7273}{96} \right) m^5 \varepsilon'^2 + \left(\frac{363}{1024} + \frac{849}{4096} = \frac{2301}{4096} \right) m^5 \gamma^2 \\
+ \left(\frac{15}{4} + \frac{15}{4} + \frac{135}{64} = \frac{615}{64} \right) m e^4 + \left(\frac{405}{32} + \frac{159}{16} + \frac{69}{16} - \frac{195}{128} = \frac{3249}{128} \right) m^2 e^4 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{5843}{32} + \frac{8423}{256} + \frac{187057}{4096} - \frac{161}{64} - \frac{30375}{4096} \\ + \frac{45}{16} + \frac{4455}{128} + \frac{45}{16} + \frac{45}{256} + \frac{3375}{256} = \frac{624685}{2048} \end{array} \right\} m^3 e^4 \\
+ \left(\frac{21}{4} + \frac{3}{8} + \frac{15}{8} = \frac{15}{2} \right) m e^2 \gamma^2 + \left(\frac{513}{16} + \frac{67}{32} + \frac{285}{32} + 1 = \frac{705}{16} \right) m^2 e^2 \gamma^2 \\
+ \left(\frac{37575}{256} + \frac{6893}{1536} + \frac{17347}{512} + \frac{63}{16} + \frac{4455}{512} + \frac{119}{48} + \frac{9}{32} + \frac{675}{512} = \frac{7051}{128} \right) m^3 e^2 \gamma^2 \\
+ \frac{75}{4} m e^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{165}{4} + 10 - \frac{135}{16} + \frac{315}{16} + \frac{135}{16} - \frac{315}{16} = \frac{205}{4} \right) m^2 e^2 \varepsilon'^2 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{225}{16} - \frac{133123}{256} + \frac{1027}{24} - \frac{297}{64} + \frac{297}{128} + \frac{2079}{128} + \frac{15975}{128} \\ + \frac{21735}{128} - \frac{9}{4} + \frac{135}{128} + \frac{19935}{128} - \frac{63}{4} - \frac{5949}{64} = - \frac{83545}{768} \end{array} \right\} m^3 e^2 \varepsilon'^2 \\
- \frac{135}{16} m^3 e^2 E'^2 - \left(\frac{135}{4} + \frac{315}{16} = \frac{855}{16} \right) m^3 e^2 \left(\varepsilon'^2 - E'^2 \right) + \frac{9}{64} m \gamma^4 \\
- \left(\frac{11}{32} + \frac{11}{128} = \frac{55}{128} \right) m^2 \gamma^4 - \left(\frac{1883}{12288} + \frac{99}{256} + \frac{85}{384} + \frac{81}{4096} = \frac{4799}{6144} \right) m^3 \gamma^4
\end{array} \right\}$$

+

$$\cos 2Ev \left\{\begin{array}{l}
-\frac{45}{128} m\varepsilon'^2\gamma^4 - \left\{\begin{array}{l}\frac{99}{128}+\frac{3}{32}+\frac{303}{128}+\frac{21}{16}-\frac{15}{16}+\frac{75}{128} \\ +\frac{135}{256}-\frac{45}{256}+\frac{15}{32}+\frac{51}{32}+\frac{9}{128}=\frac{865}{128}\end{array}\right\} me^2\gamma^4 \\
-\left(\frac{177}{64}+\frac{15}{16}+\frac{279}{32}+\frac{15}{16}+\frac{225}{64}+\frac{171}{128}+\frac{45}{256}-\frac{27}{256}=\frac{585}{32}\right) me^4\gamma^2 \\
-\frac{195}{32} me^2\varepsilon'^4 - \left(\frac{75}{8}+\frac{75}{8}+\frac{675}{128}=\frac{3075}{128}\right) me^4\varepsilon'^2 - \left(\frac{15}{16}+\frac{105}{8}+\frac{75}{16}=\frac{75}{4}\right) me^2\varepsilon'^2\gamma^2 \\
-\left(\frac{111}{64}+\frac{297}{128}+\frac{2079}{128}+\frac{519}{64}=\frac{909}{32}\right) m^3\gamma^2\varepsilon'^2 + \left(\frac{15}{16}+\frac{45}{256}+\frac{225}{256}+\frac{45}{128}=\frac{75}{32}\right) me^6 \\
+\left(\frac{297}{128}-\frac{33}{128}+\frac{2079}{128}+\frac{1683}{64}-\frac{4059}{128}=\frac{825}{64}\right) m^3\varepsilon'^4 - \left(\frac{33}{256}+\frac{9}{128}-\frac{3}{256}=\frac{3}{16}\right) m\gamma^6 \\
-\frac{225}{128} m^2 b^4 - \left(\frac{1395}{64}+\frac{225}{256}=\frac{5805}{256}\right) m^3 b^4 - \frac{105}{16} me^2 b^4 - \frac{75}{16} m\varepsilon'^2 b^4
\end{array}\right\}$$

$$\cos (2Ev-cv)\, e \left\{\begin{array}{l}
\frac{11}{4} m^2 + \frac{59}{6} m^3 + \left(\frac{893}{36}+\frac{33}{16}=\frac{3869}{144}\right) m^4 \\
+\left(\frac{2855}{54}+\frac{59}{8}+\frac{495}{256}-\frac{165}{32}=\frac{394141}{6912}\right) m^5 \\
+\left(\frac{4133959}{41472}+\frac{893}{48}+\frac{885}{128}-\frac{7007}{1024}-\frac{4059}{128}-\frac{295}{16}+\frac{283}{128}=\frac{4220807}{82944}\right) m^6 \\
+\left\{\begin{array}{l}\frac{202916651}{1244160}+\frac{2855}{72}+\frac{4465}{256}-\frac{37583}{1536}-\frac{1511543}{49152} \\ -\frac{2755159}{20480}-\frac{7257}{64}-\frac{4465}{96}+\frac{1991}{160}+\frac{33677}{6144}=-\frac{2220303871}{19906560}\end{array}\right\} m^7 \\
-\left(\frac{45}{8}+\frac{45}{8}=\frac{45}{4}\right) me^2 - \left(\frac{603}{32}+\frac{23}{2}-\frac{3}{2}=\frac{923}{32}\right) m^2 e^2 \\
-\left(\frac{33769}{512}+\frac{135}{32}+\frac{187057}{1536}+\frac{135}{32}-\frac{119}{32}+\frac{10125}{1024}=\frac{621599}{3072}\right) m^3 e^2 \\
-\left\{\begin{array}{l}\frac{1185143}{6144}+\frac{1809}{128}+\frac{3267}{256}+\frac{2025}{512}+\frac{6871549}{9216}+\frac{69}{8}+\frac{2025}{512} \\ -\frac{1}{8}-\frac{6461}{768}-\frac{2475}{512}+\frac{135675}{2048}+\frac{192375}{4096}-\frac{675}{64}=\frac{39489835}{36864}\end{array}\right\} m^4 e^2 \\
-\frac{3}{8} m\gamma^2 - \left(\frac{47}{32}+\frac{11}{16}=\frac{69}{32}\right) m^2\gamma^2 - \left(\frac{5149}{1536}+\frac{59}{24}+\frac{9}{32}=\frac{3119}{512}\right) m^3\gamma^2 \\
-\left(\frac{91745}{18432}+\frac{893}{144}+\frac{141}{128}+\frac{3267}{1024}+\frac{135}{512}-\frac{495}{1024}-\frac{45}{64}=\frac{89383}{6144}\right) m^4\gamma^2 \\
+\left(\frac{45}{4}+\frac{105}{4}-\frac{55}{8}=\frac{245}{8}\right) m^2\varepsilon'^2 \\
+\left(\frac{45}{32}-\frac{295}{12}+\frac{5325}{32}+\frac{99}{64}+\frac{693}{64}=\frac{7469}{48}\right) m^3\varepsilon'^2
\end{array}\right\}$$

$+$

$$\cos 2Ev - cv\, e \left\{\begin{array}{l} + \left\{\begin{array}{l} \frac{98073}{128} - \frac{5491}{72} - \frac{165}{32} - \frac{56739}{128} - \frac{11025}{64} \\ + \frac{25725}{64} + \frac{177}{64} + \frac{6831}{512} + \frac{3717}{64} + \frac{102333}{512} = \frac{6923}{36} \end{array}\right\} m^4 \varepsilon'^2 + \frac{99}{32} m^4 E'^2 \\ + \left(\frac{231}{32} + \frac{33}{4} = \frac{495}{32}\right) m^4(\varepsilon'^2 - E'^2) + \left(\frac{225}{16} + \frac{225}{16} = \frac{225}{8}\right) m e^2 \varepsilon'^2 + \frac{15}{16} m \varepsilon'^2 \gamma^2 \\ - \left(\frac{45}{32} + \frac{15}{32} - \frac{45}{32} = \frac{15}{32}\right) m e^4 + \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{128} - \frac{15}{128} + \frac{9}{16} = \frac{57}{64}\right) m\gamma^4 \\ + \left(\frac{39}{8} + \frac{45}{32} + \frac{45}{32} + \frac{57}{16} - \frac{9}{64} = \frac{711}{64}\right) m e^2 \gamma^2 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev + cv\, e \left\{\begin{array}{l} - \frac{11}{4} m^2 - \frac{59}{6} m^3 - \left(\frac{893}{36} + \frac{33}{16} = \frac{3869}{144}\right) m^4 \\ - \left(\frac{2855}{54} + \frac{59}{8} + \frac{495}{256} + \frac{4245}{1024} = \frac{1833739}{27648}\right) m^5 \\ - \left(\frac{4133959}{41472} + \frac{893}{48} + \frac{885}{128} - \frac{7007}{1024} + \frac{5973}{256} + \frac{80655}{4096} - \frac{33}{8} = \frac{40653227}{331776}\right) m^6 \\ + \left(\frac{45}{8} + \frac{45}{16} = \frac{135}{16}\right) m e^2 + \left(\frac{603}{32} + \frac{65}{16} + \frac{855}{64} = \frac{2321}{64}\right) m^2 e^2 \\ + \left(\frac{33769}{512} + \frac{135}{32} + \frac{161}{24} + \frac{52041}{1024} + \frac{15}{64} = \frac{393025}{3072}\right) m^3 e^2 \\ + \left\{\begin{array}{l} \frac{1185143}{6144} + \frac{1809}{128} + \frac{3267}{256} + \frac{2025}{512} + \frac{10357}{720} + \frac{195}{64} \\ - \frac{675}{64} + \frac{672197}{4096} + \frac{285}{256} - \frac{6075}{256} + \frac{14625}{512} = \frac{73854547}{184320} \end{array}\right\} m^4 e^2 \\ + \frac{3}{8} m\gamma^2 + \left(\frac{47}{32} + \frac{11}{16} = \frac{69}{32}\right) m^2\gamma^2 + \left(\frac{5149}{1536} + \frac{59}{24} + \frac{9}{32} = \frac{3119}{512}\right) m^3\gamma^2 \\ + \left(\frac{91745}{18432} + \frac{893}{144} + \frac{141}{128} + \frac{3267}{1024} + \frac{135}{512} + \frac{495}{512} = \frac{102613}{6144}\right) m^4\gamma^2 \\ + \frac{55}{8} m^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{295}{12} - 3 - 21 + \frac{693}{64} + \frac{99}{64} = \frac{311}{24}\right) m^3 \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{5491}{72} + \frac{165}{32} - \frac{335}{32} - \frac{2715}{32} + \frac{3717}{64} + \frac{47817}{512} + \frac{177}{64} + \frac{14619}{512} = \frac{194569}{1152}\right) m^4 \varepsilon'^2 \\ - \frac{99}{32} m^4 E'^2 - \left(\frac{33}{4} + \frac{231}{32} = \frac{495}{32}\right) m^4(\varepsilon'^2 - E'^2) - \frac{15}{16} m \varepsilon'^2 \gamma^2 \\ - \left(\frac{225}{16} + \frac{225}{32} = \frac{675}{32}\right) m e^2 \varepsilon'^2 - \left(\frac{39}{8} + \frac{45}{32} + \frac{9}{32} + \frac{63}{32} + \frac{15}{64} = \frac{561}{64}\right) m e^2 \gamma^2 \\ - \left(\frac{45}{32} + \frac{75}{32} + \frac{45}{32} + \frac{15}{16} - \frac{15}{32} = \frac{45}{8}\right) m e^4 \\ - \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{51}{128} + \frac{9}{64} = \frac{117}{128}\right) m\gamma^4 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev-2cv \quad e^2\left\{\begin{array}{l} \frac{15}{2}m+\left(\frac{285}{8}-\frac{33}{32}=\frac{1107}{32}\right)m^2+\left(\frac{17347}{128}+\frac{45}{8}-\frac{59}{16}=\frac{17595}{128}\right)m^3 \\ +\left(\frac{672197}{1536}+\frac{855}{32}+\frac{675}{128}-\frac{893}{96}-\frac{11}{128}-\frac{7425}{2048}=\frac{935131}{2048}\right)m^4 \\ +\left\{\begin{array}{l} \frac{43889975}{36864}+\frac{52041}{512}+\frac{12825}{512}-\frac{9555}{512}-\frac{2855}{144} \\ -\frac{59}{192}+\frac{4455}{512}-\frac{99495}{4096}-\frac{13275}{1024}+\frac{15}{2}=\frac{3862837}{3072} \end{array}\right\}m^5 \\ -\frac{75}{4}m\varepsilon'^2-\left(\frac{21}{4}-\frac{9}{64}+\frac{15}{8}=\frac{447}{64}\right)m\gamma^2-\left(\frac{15}{4}-\frac{135}{64}=\frac{105}{64}\right)me^2 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev+2cv \quad e^2\left\{\begin{array}{l} \left(4+\frac{33}{32}=\frac{161}{32}\right)m^2+\left(\frac{119}{12}+\frac{59}{16}=\frac{653}{48}\right)m^3 \\ -\left(\frac{3}{8}+\frac{9}{64}=\frac{33}{64}\right)m\gamma^2-\left(\frac{15}{4}+\frac{135}{64}+\frac{5}{4}=\frac{455}{64}\right)me^2 \\ +\left(\frac{6461}{288}+3+\frac{893}{96}+\frac{11}{128}=\frac{40115}{1152}\right)m^4 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev-2gv \quad \gamma^2\left(-\frac{11}{32}m^2-\frac{59}{48}m^3\right)$$

$$\cos 2Ev+2gv \quad \gamma^2\left\{\frac{11}{32}m^2+\frac{59}{48}m^3-\frac{3}{64}m\gamma^2-\left(\frac{15}{16}+\frac{45}{64}+\frac{15}{16}=\frac{165}{64}\right)me^2\right\}$$

$$\cos 2Ev+2c'mv \quad \varepsilon'^2\left\{\left(\frac{99}{32}-\frac{33}{16}=\frac{33}{32}\right)m^3+\frac{45}{8}me^2\right\}$$

$$\cos 2Ev-2c'mv \quad \varepsilon'^2\left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{231}{16}+\frac{99}{32}=\frac{561}{32}\right)m^3-\left(\frac{1239}{16}+\frac{177}{16}=\frac{177}{2}\right)m^4-\frac{255}{8}me^2 \\ +\left(\frac{56595}{256}-\frac{21009}{64}-\frac{893}{32}+\frac{56925}{1024}=-\frac{81415}{1024}\right)m^5 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev+c'mv+cv \quad e\varepsilon'\left\{\begin{array}{l} \frac{11}{8}m^2+\left(\frac{59}{24}-6+\frac{99}{32}=-\frac{43}{96}\right)m^3 \\ -\frac{3}{8}m\gamma^2-\left(\frac{45}{8}+\frac{45}{16}=\frac{135}{16}\right)me^2 \\ +\left(\frac{29}{288}+\frac{33}{32}-\frac{119}{8}+\frac{177}{16}+\frac{6831}{256}=\frac{55303}{2304}\right)m^4 \\ +\left\{\begin{array}{l} \frac{59}{32}-\frac{1129}{216}+\frac{495}{512}-\frac{6461}{192}+\frac{735}{8}+\frac{893}{32} \\ +\frac{12213}{128}+\frac{199485}{1024}+\frac{4245}{1024}-\frac{9905}{1024}=\frac{10185805}{27648} \end{array}\right\}m^5 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev + c'mv\ \varepsilon' \left\{\begin{array}{l}
\frac{33}{8}m^3 + \frac{59}{4}m^4 - \left(\frac{8085}{128} - \frac{893}{24} = \frac{9967}{384}\right)m^5 \\
+\left(\frac{2855}{36} - \frac{14455}{64} - \frac{13871}{32} + \frac{3113}{2048} - \frac{21791}{4096} = -\frac{21522037}{36864}\right)m^6 \\
+\left\{\begin{array}{l} \frac{4133959}{27648} - \frac{218785}{384} - \frac{74399}{48} - \frac{6295927}{3072} \\ + \frac{65703}{10240} + \frac{16697}{3072} - \frac{153307}{5120} - \frac{116879}{4096} = -\frac{1116359147}{276480} \end{array}\right\} m^7 \\
+\frac{15}{2}me^2 + \left(\frac{15}{16} + 2 - \frac{135}{16} + \frac{135}{16} = \frac{47}{16}\right)m^2e^2 \\
+\left(\frac{45}{8} - \frac{18913}{64} + \frac{335}{48} - \frac{1809}{64} + \frac{297}{64} + \frac{2565}{64} + \frac{9315}{128} - \frac{9}{2} = -\frac{76103}{384}\right)m^3e^2 \\
+\left\{\begin{array}{l} \frac{45}{64} - \frac{9865567}{3072} + \frac{675}{128} + \frac{33131}{576} + \frac{3}{2} - \frac{101307}{1024} \\ + \frac{33075}{256} + \frac{531}{32} + \frac{32175}{256} + \frac{156123}{1024} + \frac{176985}{512} \\ + \frac{272025}{512} - \frac{357}{32} - \frac{1329}{16} + \frac{675}{32} - \frac{525}{16} = -\frac{39236641}{9216} \end{array}\right\} m^4e^2 \\
+\left\{\begin{array}{l} \frac{675}{1024} - \frac{918041071}{36864} - \frac{56739}{256} - \frac{9555}{512} + \frac{3002915}{6912} + \frac{335}{64} \\ + \frac{45}{32} - \frac{1185143}{4096} + \frac{443205}{1024} + \frac{2679}{64} + \frac{56745}{64} + \frac{57525}{128} \\ + \frac{4894373}{4096} + \frac{2016591}{4096} + \frac{10772487}{8192} + \frac{5168475}{2048} - \frac{6461}{256} \\ + \frac{30919035}{8192} - \frac{52717}{256} - \frac{37035}{64} - \frac{12735}{4096} - \frac{20295}{2048} + \frac{65085}{1024} \\ + \frac{12825}{128} - \frac{12915}{64} - \frac{26625}{128} + \frac{29715}{4096} + \frac{75075}{2048} = -\frac{1648417561}{110592} \end{array}\right\} m^5e^2 \\
-\frac{9}{16}m^2\gamma^2 - \left(\frac{141}{64} + \frac{297}{64} = \frac{219}{32}\right)m^3\gamma^2 + \left(\frac{297}{64} - \frac{165}{16} + \frac{693}{64} = \frac{165}{32}\right)m^3\varepsilon'^2 \\
-\frac{15}{16}me^2\varepsilon'^2 - \left(\frac{15}{4} + \frac{15}{4} + \frac{135}{64} = \frac{615}{64}\right)me^4 \\
-\left(\frac{21}{4} + \frac{15}{8} + \frac{3}{8} = \frac{15}{2}\right)me^2\gamma^2 - \frac{9}{64}m\gamma^4 + \frac{75}{16}mb^4
\end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev - c'mv + cv\ e\varepsilon' \left\{\begin{array}{l}
-\frac{77}{8}m^2 - \left(\frac{413}{8} - 6 + \frac{99}{32} = \frac{1559}{32}\right)m^3 \\
+\frac{7}{8}m\gamma^2 + \left(\frac{105}{8} + \frac{105}{16} = \frac{315}{16}\right)me^2 \\
+\left(\frac{119}{8} - \frac{7003}{32} - \frac{231}{32} - \frac{177}{16} - \frac{14619}{256} = -\frac{71515}{256}\right)m^4 \\
+\left\{\begin{array}{l} \frac{6461}{192} - \frac{6077}{8} - \frac{1239}{32} - \frac{3465}{512} - \frac{735}{8} - \frac{893}{32} \\ - \frac{26137}{128} - \frac{407385}{1024} - \frac{29715}{1024} + \frac{4245}{1024} = -\frac{4663747}{3072} \end{array}\right\} m^5
\end{array}\right\}$$

$$
\cos 2Ev - c'mv\ \varepsilon' \left\{
\begin{array}{l}
-\frac{33}{8}m^3 - \frac{59}{4}m^4 + \left(\frac{8085}{128} - \frac{893}{24} = \frac{9967}{384}\right) m^5 \\
+\left(\frac{14455}{64} + \frac{13871}{32} - \frac{2855}{36} - \frac{21791}{2048} + \frac{3113}{4096} = \frac{21017731}{36864}\right) m^6 \\
+\left\{\begin{array}{l}
\quad \frac{218785}{384} - \frac{4133959}{27648} + \frac{74399}{48} + \frac{6295927}{3072} \\
-\frac{153307}{2048} - \frac{116879}{3072} + \frac{21901}{5120} + \frac{16697}{12288} = \frac{2163400123}{552960}
\end{array}\right\} m^7 \\
-\frac{35}{2}me^2 - \left(\frac{1775}{16} + 14 + \frac{135}{16} - \frac{135}{16} = \frac{1999}{16}\right) m^2e^2 \\
-\left\{\begin{array}{l}
\quad \frac{32691}{64} + \frac{105}{8} + \frac{905}{16} - \frac{1809}{64} \\
+\frac{297}{64} - \frac{9}{2} + \frac{2565}{64} + \frac{19935}{128} = \frac{95767}{128}
\end{array}\right\} m^3e^2 \\
-\left\{\begin{array}{l}
\quad \frac{1672603}{1024} + \frac{5325}{64} + \frac{1575}{128} + \frac{18625}{64} + \frac{21}{2} - \frac{101307}{1024} \\
+\frac{33075}{256} + \frac{531}{32} + \frac{32175}{256} - \frac{357}{32} - \frac{621}{16} + \frac{156123}{1024} \\
-\frac{225}{16} + \frac{378765}{512} + \frac{555525}{512} + \frac{2625}{32} = \frac{4298975}{1024}
\end{array}\right\} m^4e^2 \\
-\left\{\begin{array}{l}
\quad \frac{19371751}{12288} + \frac{98073}{256} + \frac{79875}{1024} - \frac{22295}{512} + \frac{2715}{64} + \frac{315}{32} \\
+\frac{1036373}{768} - \frac{1185143}{4096} + \frac{443205}{1024} + \frac{2679}{64} + \frac{56745}{64} \\
+\frac{57525}{128} + \frac{4894373}{4096} - \frac{6461}{256} - \frac{24633}{256} - \frac{18135}{64} \\
+\frac{2016591}{4096} + \frac{23054163}{8192} + \frac{10554975}{2048} - \frac{80905}{2048} \\
+\frac{53992095}{8192} - \frac{89145}{4096} + \frac{614345}{1024} + \frac{49875}{128} - \frac{5535}{64} \\
-\frac{225}{128} + \frac{12735}{4096} + \frac{10725}{2048} = \frac{44298989}{2048}
\end{array}\right\} m^5e^2 \\
+\frac{9}{16}m^2\gamma^2 + \left(\frac{141}{64} + \frac{297}{64} = \frac{219}{32}\right) m^3\gamma^2 + \left(\frac{49}{4} + \frac{35}{8} + \frac{7}{8} = \frac{35}{2}\right) me^2\gamma^2 \\
+\left(\frac{165}{16} - \frac{297}{64} + \frac{561}{16} + \frac{99}{64} = \frac{1353}{32}\right) m^3\varepsilon'^2 + \frac{615}{16}me^2\varepsilon'^2 \\
+\frac{21}{64}m\gamma^4 + \left(\frac{35}{4} + \frac{35}{4} + \frac{315}{64} = \frac{1435}{64}\right) me^4
\end{array}
\right\}
$$

$$\cos 2Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{45}{4} - \frac{11}{8} = \frac{79}{8}\right) m^2 + \left(\frac{855}{16} + \frac{99}{32} - \frac{59}{24} = \frac{5191}{96}\right) m^3 \\ + \frac{3}{8} m\gamma^2 + \left(\frac{45}{8} + \frac{45}{8} = \frac{45}{4}\right) m e^2 \\ + \left(\frac{52041}{256} - \frac{29}{288} - \frac{33}{32} - \frac{11025}{64} + \frac{177}{16} + \frac{14619}{256} = \frac{1765}{18}\right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1129}{216} - \frac{59}{32} - \frac{495}{512} + \frac{672197}{1024} - \frac{209475}{256} - \frac{18915}{16} \\ + \frac{893}{32} + \frac{26137}{128} + \frac{407385}{1024} + \frac{495}{64} - \frac{1155}{64} = -\frac{4990219}{6912} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{7007}{2048} - \frac{4777597}{82944} - \frac{29}{384} - \frac{885}{512} + \frac{43889975}{24576} \\ - \frac{12750045}{4096} - \frac{359385}{64} - \frac{2861785}{512} + \frac{2855}{48} \\ + \frac{395599}{768} + \frac{728355}{512} + \frac{1981}{256} + \frac{39594203}{16384} + \frac{47729}{2048} \\ + \frac{885}{32} - \frac{283}{128} - \frac{28413}{256} - \frac{6195}{64} = -\frac{11810964607}{1327104} \end{array} \right\} m^6 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{45}{4} - \frac{77}{8} = \frac{13}{8}\right) m^2 - \left(\frac{855}{16} + \frac{99}{32} - \frac{413}{8} = \frac{157}{32}\right) m^3 \\ - \frac{7}{8} m\gamma^2 - \left(\frac{105}{8} + \frac{105}{8} = \frac{105}{4}\right) m e^2 \\ + \left(\frac{7003}{32} + \frac{231}{32} - \frac{52041}{256} + \frac{11025}{64} - \frac{177}{16} - \frac{6831}{256} = \frac{10067}{64}\right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{6077}{8} + \frac{1239}{32} + \frac{3465}{512} - \frac{672197}{1024} + \frac{209475}{256} + \frac{18915}{16} \\ - \frac{893}{32} - \frac{12213}{128} - \frac{199485}{1024} - \frac{1925}{64} + \frac{165}{64} = \frac{461693}{256} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{6303041}{3072} + \frac{21009}{128} + \frac{18585}{512} - \frac{49049}{2048} + \frac{359385}{64} \\ - \frac{43889975}{24576} + \frac{12750045}{4096} + \frac{2861785}{512} - \frac{2855}{48} \\ - \frac{61617}{256} - \frac{356655}{512} - \frac{22673959}{16384} - \frac{1351559}{6144} - \frac{10325}{96} \\ + \frac{1981}{128} + \frac{4059}{256} + \frac{295}{64} - \frac{283}{256} = \frac{493232713}{49152} \end{array} \right\} m^6 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ -\frac{15}{2} m + \left(\frac{33}{64} - \frac{15}{16} + \frac{135}{16} + \frac{135}{16} = \frac{1053}{64}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev - c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{35}{2}m + \left(\frac{1775}{16} - \frac{231}{64} - \frac{135}{16} - \frac{135}{16} = \frac{5789}{64}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev + c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ -2 - \frac{33}{64} = -\frac{161}{64} \right\} m^2$$

$$\cos 2Ev - c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ 14 + \frac{231}{64} = \frac{1127}{64} \right\} m^2$$

$$\cos 2Ev + c'mv + 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2 \left(-\frac{11}{64} m^2 \right)$$

$$\cos 2Ev + c'mv - 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{11}{64} + \frac{27}{16} = \frac{119}{64} \right\} m^2$$

$$\cos 2Ev - c'mv + 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{77}{64} m^2 \right)$$

$$\cos 2Ev - c'mv - 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{77}{64} - \frac{27}{16} = -\frac{185}{64} \right\} m^2$$

$$\cos 2Ev - 3cv \quad e^3 \left\{ \left(\frac{45}{8} - \frac{45}{16} = \frac{45}{16}\right) m + \left(\frac{23}{2} - \frac{855}{64} + \frac{11}{24} = -\frac{269}{192}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev + 3cv \quad e^3 \left\{ -\frac{65}{16} - \frac{3}{2} - \frac{11}{24} = -\frac{289}{48} \right\} m^2$$

$$\cos 2Ev - 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{8} m + \left(\frac{11}{4} + \frac{1}{2} - \frac{11}{8} = \frac{15}{8}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \left(\frac{9}{8} - \frac{15}{16} = \frac{3}{16}\right) m - \left(\frac{11}{4} + \frac{285}{64} - \frac{11}{32} = \frac{439}{64}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev + 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\frac{11}{16} - \frac{1}{2} - \frac{11}{32} = -\frac{49}{32} \right\} m^2$$

$$\cos 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{15}{16} m + \left(\frac{11}{16} + \frac{285}{64} + \frac{11}{8} = \frac{417}{64}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev - 2c'mv - cv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{105}{4} + \frac{135}{16} - \frac{187}{8} = \frac{181}{16}\right) m^2 \\ +\left(\frac{1003}{6} - \frac{5325}{32} - \frac{2565}{64} - \frac{693}{64} - \frac{297}{128} = -\frac{20147}{384}\right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{70039}{72} + \frac{561}{32} - \frac{98073}{128} + \frac{25725}{64} - \frac{156123}{1024} \\ + \frac{77625}{512} - \frac{3717}{64} - \frac{47817}{512} - \frac{531}{64} - \frac{15279}{1024} = \frac{2075959}{4608} \end{array} \right\} m^4 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + 2c'mv - cv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{45}{4} - \frac{135}{16} = \frac{45}{16}\right) m^2 + \left(\frac{2565}{64} - \frac{99}{64} + \frac{297}{128} - \frac{45}{32} = \frac{5049}{128}\right) m^3 \\ + \frac{9}{32} m\gamma^2 - \left(\frac{885}{32} - \frac{135}{32} = \frac{375}{16}\right) m e^2 - \frac{297}{128} e^4 . m^{-1} \end{array} \right\}$$

$\cos 2Ev - 2c'mv + cv \quad e\varepsilon'^2 \left(-\frac{187}{8} m^2\right)$

$\cos 2Ev - 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{51}{16} + \frac{27}{64} = \frac{231}{64} \right\} m$

$\cos 2Ev + 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{15}{16} + \frac{45}{64} + \frac{15}{4} = \frac{345}{64} \right\} m$

$\cos 2Ev - 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{9}{16} - \frac{27}{64} - \frac{45}{64} + \frac{15}{16} = \frac{3}{8} \right\} m$

$\cos 2Ev - 4cv \qquad e^4 \left\{ \frac{5}{4} - \frac{135}{64} = -\frac{55}{64} \right\} m$

$\cos 2Ev - 4gv \qquad \gamma^4 \left(-\frac{9}{64} m\right)$

$\cos 2Ev + c'mv - 3cv \quad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{45}{8} + \frac{45}{16} = -\frac{45}{16} \right\} m$

$\cos 2Ev - c'mv - 3cv \quad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{105}{8} - \frac{105}{16} = \frac{105}{16} \right\} m$

$\cos 2Ev + c'mv - 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{9}{8} m \right)$

$\cos 2Ev + c'mv - 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{8} + \frac{15}{16} = -\frac{3}{16} \right\} m$

$\cos 2Ev - c'mv - 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left(-\frac{21}{8} m \right)$

$\cos 2Ev - c'mv - 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{21}{8} - \frac{35}{16} = \frac{7}{16} \right\} m$

$\cos 2Ev + c'mv + 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left(-\frac{15}{16} m \right)$

$\cos 2Ev - c'mv + 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{35}{16} m \right)$

$$\cos Ev \, b^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{165}{64} m^3 - \frac{15}{2} m\varepsilon'^2 + \left(\frac{165}{16} + \frac{45}{16} = \frac{105}{8} \right) m e^2 - \left(\frac{1023}{64} + \frac{295}{32} - \frac{165}{256} = \frac{6287}{256} \right) m^4 \\ - \left(\frac{19503}{256} + \frac{1829}{32} + \frac{4465}{192} - \frac{4565}{1024} - \frac{295}{128} = \frac{460285}{3072} \right) m^5 \\ - \left\{ \begin{array}{l} \frac{197747}{512} + \frac{34869}{128} + \frac{27683}{192} + \frac{14275}{288} - \frac{12551}{512} \\ - \frac{24485}{1536} - \frac{4465}{768} + \frac{4245}{8192} = \frac{59471725}{73728} \end{array} \right\} m^6 \end{array} \right\}$$

$$\cos Ev - cv \qquad eb^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{4}m - \left(\frac{93}{4} + \frac{225}{32} = \frac{969}{32}\right) m^2 \\ -\left(\frac{1773}{16} + \frac{45}{16} - \frac{495}{256} + \frac{1395}{32} + \frac{4275}{128} = \frac{48303}{256}\right) m^3 \end{array} \right\}$$

$$\cos Ev + cv \qquad eb^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{4}m + \frac{93}{4}m^2 + \left(\frac{1773}{16} + \frac{45}{16} - \frac{1815}{256} + \frac{225}{128} + \frac{15}{4} = \frac{28683}{256}\right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{17977}{32} + \frac{279}{16} + \frac{675}{256} - \frac{75207}{2048} - \frac{3245}{128} \\ -\frac{1375}{1024} + \frac{6225}{512} + \frac{93}{4} + \frac{4275}{512} + \frac{595}{64} = \frac{1170419}{2048} \end{array} \right\} m^4 \end{array} \right\}$$

$$\cos Ev + c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{45}{8}m^2 + \left(\frac{165}{64} + \frac{165}{128} - \frac{279}{8} = -\frac{3969}{128}\right) m^3 \\ -\left(\frac{25}{4} + \frac{15}{4} = 10\right) e^2 + \left(\frac{1095}{16} + \frac{135}{8} = \frac{1365}{16}\right) me^2 - \frac{15}{4} . e^2 \gamma^2 . m^{-1} \end{array} \right\}$$

$$\cos Ev - c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{45}{8} + \frac{55}{16} = \frac{145}{16}\right) m^2 + \left(\frac{279}{8} - \frac{495}{32} + \frac{295}{24} - \frac{1155}{128} = \frac{8707}{384}\right) m^3 \\ -\frac{45}{8} m \varepsilon'^2 + \left(\frac{45}{32} - \frac{45}{16} + \frac{375}{32} = \frac{165}{16}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos Ev + 2cv \qquad e^2 b^2 \left\{ -\frac{45}{16} - \frac{45}{32} = -\frac{135}{32} \right\} m$$

$$\cos Ev - 2cv \qquad e^2 b^2 \left\{ \frac{45}{32} - \frac{165}{16} = -\frac{285}{32} \right\} m$$

$$\cos Ev - c'mv + cv \quad e\varepsilon' b^2 \left(-\frac{15}{4} m \right)$$

$$\cos Ev + c'mv + cv \quad e\varepsilon' b^2 \left(-5 + \frac{45}{2} m \right)$$

$$\cos Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' b^2 \left(5 - \frac{45}{2} m \right)$$

$$\cos Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{15}{4} + \frac{75}{8} = \frac{105}{8} \right\} m$$

$$\cos Ev + c'mv - 2cv \quad e^2 \varepsilon' b^2 \left\{ \frac{25}{4} - \frac{15}{8} = \frac{35}{8} \right\}$$

$$\cos Ev + c'mv + 2cv \quad e^2 \varepsilon' b^2 \left\{ \frac{15}{4} + \frac{15}{8} = \frac{45}{8} \right\}$$

$$\cos Ev + 2gv \qquad \gamma^2 b^2 \left(-\frac{15}{32} m \right)$$

$$\cos Ev - 2gv \qquad \gamma^2 b^2 \left(\frac{15}{32} m \right)$$

$\cos Ev + c'mv + 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2 b^2 \left(\frac{5}{8} \right)$

$\cos Ev + c'mv - 2gv \quad \varepsilon'\gamma^2 b^2 \left(-\frac{5}{8} \right)$

$\cos Ev + 2c'mv \quad \varepsilon'^2 b^2 \left(\frac{15}{2} m \right)$

$\cos 3Ev \quad b^2 \left\{ \frac{165}{64} m^3 + \left(\frac{1023}{64} + \frac{295}{32} = \frac{1613}{64} \right) m^4 + \left(\frac{19503}{256} + \frac{1829}{32} + \frac{4465}{192} + \frac{4245}{2048} = \frac{974855}{6144} \right) m^5 \right\}$

$$\cos 3Ev - cv \quad eb^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{15}{16} + \frac{225}{32} = \frac{255}{32} \right) m^2 + \left(\frac{1815}{256} + \frac{1395}{32} + \frac{4275}{128} + \frac{415}{64} = \frac{23185}{256} \right) m^3 \\ + \left(\frac{75207}{2048} + \frac{3245}{128} + \frac{26595}{128} + \frac{260205}{2048} + \frac{225}{32} + \frac{1141}{32} + \frac{45}{64} + \frac{26505}{128} = \frac{331449}{512} \right) m^4 \end{array} \right\}$$

$\cos 3Ev + cv \quad eb^2 \left(-\frac{15}{16} m^2 \right)$

$\cos 3Ev + c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left(-\frac{55}{16} m^2 \right)$

$\cos 3Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' b^2 \left(-\frac{75}{8} m \right)$

$$\cos 4Ev \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{121}{128} m^4 - \frac{649}{96} m^5 - \left(\frac{3481}{288} + \frac{9823}{576} = \frac{1865}{64} \right) m^6 \\ + \frac{33}{128} m^3 \gamma^2 + \left(\frac{15}{2} + \frac{15}{2} + \frac{495}{128} = \frac{2415}{128} \right) m^3 e^2 \end{array} \right\}$$

$\cos 4Ev + cv \quad e \left\{ \frac{283}{128} + \frac{11}{4} = \frac{635}{128} \right\} m^4$

$$\cos 4Ev - cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} -\frac{165}{32} m^3 - \left(\frac{283}{128} + \frac{3135}{128} + \frac{295}{16} = \frac{2889}{64} \right) m^4 \\ + \frac{45}{64} m^2 \gamma^2 + \left(\frac{675}{128} + \frac{675}{64} = \frac{2025}{128} \right) m^2 e^2 \\ - \left(\frac{1991}{160} + \frac{190817}{2048} + \frac{5605}{64} + \frac{4465}{96} = \frac{7363727}{30720} \right) m^5 \\ - \left(\frac{641477}{14400} + \frac{849}{512} + \frac{7394167}{24576} + \frac{1023473}{3072} + \frac{14275}{144} + \frac{84835}{384} = \frac{480201287}{614400} \right) m^6 \end{array} \right\}$$

$$\cos 4Ev + c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \frac{121}{128} m^4 + \left(\frac{649}{384} + \frac{649}{192} - \frac{849}{256} = \frac{449}{256} \right) m^5 \\ \left(\frac{33}{128} + \frac{33}{256} = \frac{99}{256} \right) m^3 \gamma^2 - \left(\frac{45}{4} + \frac{495}{128} + \frac{495}{256} + \frac{15}{4} + \frac{15}{2} = \frac{7245}{256} \right) m^3 e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 4Ev - c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{847}{128} m^4 - \left(\frac{4543}{128} + \frac{4543}{192} - \frac{849}{256} = \frac{42883}{768} \right) m^5 + \left(\frac{77}{128} + \frac{231}{256} = \frac{385}{256} \right) m^3 \gamma^2 \\ + \left(\frac{175}{4} + \frac{1155}{128} + \frac{3465}{256} + \frac{105}{4} + \frac{35}{2} = \frac{28175}{256} \right) m^3 e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 4Ev - 2cv \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{225}{32} m^2 - \left(\frac{15}{2} + \frac{495}{128} + \frac{4275}{64} = \frac{10005}{128} \right) m^3 \\ + \left(\frac{849}{1024} - \frac{369}{8} - \frac{253}{32} - \frac{885}{64} - \frac{81225}{512} - \frac{260205}{1024} = -\frac{245647}{512} \right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{5973}{1280} - \frac{250469}{1280} - \frac{45}{8} - \frac{2057627}{24576} - \frac{1357}{48} \\ - \frac{4465}{128} - \frac{3360985}{4096} - \frac{4943895}{4096} = -\frac{291357671}{122880} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{641477}{38400} - \frac{326497277}{460800} - \frac{1107}{32} - \frac{675}{128} + \frac{283}{4096} \\ - \frac{75587039}{147456} - \frac{20539}{288} - \frac{11036363}{36864} - \frac{14275}{192} - \frac{300918409}{131072} \\ - \frac{219449875}{98304} + \frac{259875}{32768} - \frac{63858715}{16384} = -\frac{198072600817}{29491200} \end{array} \right\} m^6 \end{array} \right\}$$

$$\cos 4Ev - 3cv \quad e^3 \left\{ -\frac{675}{128} - \frac{675}{64} = -\frac{2025}{128} \right\} m^2$$

$$\cos 4Ev - 2gv \quad \gamma^2 \left\{ -\frac{99}{128} m^3 + \left(\frac{121}{64} - \frac{177}{64} + \frac{283}{1024} = -\frac{613}{1024} \right) m^4 \right\}$$

$$\cos 4Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{128} - \frac{135}{64} = -\frac{279}{128} \right\} m^2$$

$$\cos 4Ev - 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left(\frac{9}{128} m^2 \right)$$

$$\cos 4Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left(\frac{225}{16} m^2 \right)$$

$$\cos 4Ev - c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left(-\frac{525}{16} m^2 \right)$$

$$\cos 4Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{165}{32} + \frac{165}{64} = \frac{495}{64} \right) m^3 \\ + \left(\frac{283}{128} - \frac{45}{4} + \frac{165}{256} + \frac{295}{16} + \frac{3135}{256} + \frac{295}{64} = \frac{8448}{128} \right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{5973}{640} - \frac{1107}{16} - \frac{2547}{1024} - \frac{208043}{1024} + \frac{295}{128} \\ + \frac{4465}{96} + \frac{145}{768} + \frac{190817}{4096} + \frac{5605}{256} = -\frac{3031539}{20480} \end{array} \right\} m^5 \end{array} \right\}$$

$$\cos 4Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{aligned} & -\left(\frac{385}{32} + \frac{1155}{64} = \frac{1925}{64}\right) m^3 \\ & + \left(\frac{45}{4} - \frac{1981}{128} - \frac{19525}{256} - \frac{2065}{48} - \frac{21945}{256} - \frac{6195}{64} = -\frac{58759}{192}\right) m^4 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{1107}{16} - \frac{13937}{128} + \frac{2547}{1024} - \frac{359601}{1024} - \frac{104725}{384} \\ & - \frac{31255}{288} - \frac{1335719}{4096} - \frac{117705}{256} - \frac{105045}{256} = -\frac{72468983}{36864} \end{aligned} \right\} m^5 \end{aligned} \right\}$$

$$\cos 6Ev - 2cv \qquad e^2 \left\{ \frac{7425}{2048} + \frac{225}{16} = \frac{36225}{2048} \right\} m^4.$$

$$\{F(v)\}^3 = \quad F(v) \times \{F(v)\}^2 =$$

$$\sin cv \quad e \left\{ \begin{aligned} & - 2 . e^2 - \left(\frac{121}{64} + \frac{121}{64} = \frac{121}{32}\right) m^4 - \left(\frac{649}{96} + \frac{649}{96} + \frac{649}{96} + \frac{649}{96} = \frac{649}{24}\right) m^5 \\ & - \left(\frac{9823}{576} + \frac{3481}{144} + \frac{42559}{2304} + \frac{9823}{576} + \frac{3481}{144} + \frac{42559}{2304} = \frac{15283}{128}\right) m^6 \\ & - \left(3 + \frac{3}{2} + \frac{225}{16} + \frac{225}{16} = \frac{261}{8}\right) m^2 e^2 - \left(9 + 9 = 18\right) m^2 \varepsilon'^2 + \left(1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right) e^2 \gamma^2 \\ & - \left(\frac{9}{16} + \frac{9}{16} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8}\right) e^4 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}\right) \gamma^4 \\ & + \left(\frac{33}{128} + \frac{33}{128} + \frac{33}{128} + \frac{33}{128} = \frac{33}{32}\right) m^3 \gamma^2 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{495}{256} - \frac{825}{128} - \frac{45}{32} + \frac{495}{128} + \frac{495}{64} + \frac{495}{128} + \frac{1485}{256} \\ & - \frac{4755}{64} - \frac{4275}{64} - \frac{16605}{256} - \frac{4275}{64} - \frac{15}{2} + \frac{495}{128} = -\frac{66825}{256} \end{aligned} \right\} m^3 e^2 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & - \frac{9}{4} - \frac{5341}{256} + \frac{637}{128} + \frac{15429}{1024} + \frac{6633}{512} + \frac{885}{64} + \frac{885}{32} + \frac{10153}{512} + \frac{6633}{512} \\ & + \frac{885}{64} + \frac{2655}{128} + \frac{25531}{1024} - \frac{290045}{1024} - \frac{90345}{256} - \frac{260205}{1024} - \frac{263925}{1024} \\ & - \frac{315495}{1024} - \frac{260205}{1024} - \frac{317}{8} - \frac{595}{32} - \frac{161}{32} + \frac{885}{64} + \frac{253}{32} + \frac{715}{256} = -\frac{1643801}{1024} \end{aligned} \right\} m^4 c^2 \\ & + \left(\frac{517}{512} + \frac{59}{64} + \frac{59}{64} + \frac{759}{512} + \frac{517}{512} + \frac{59}{64} + \frac{59}{64} + \frac{759}{512} = \frac{555}{64}\right) m^4 \gamma^2 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{14961}{128} + \frac{2205}{16} + \frac{19251}{128} + \frac{2205}{16} + \frac{605}{128} - \frac{2695}{128} + \frac{605}{128} + \frac{605}{128} \\ & + \frac{1005}{32} + \frac{869}{256} - \frac{121}{256} + \frac{1001}{256} - \frac{5929}{256} - \frac{495}{64} - \frac{1155}{64} = \frac{33621}{64} \end{aligned} \right\} m^4 \varepsilon'^2 \end{aligned} \right\}$$

$+$

$\sin cv \quad e$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{81}{16}-\frac{81}{16}-\frac{405}{32}-\frac{81}{8}-\frac{405}{32}-\frac{81}{8}-\frac{81}{32}-\frac{81}{32}-\frac{225}{16}-\frac{225}{16}\\ -\frac{1225}{16}+\frac{1125}{32}+\frac{1125}{32}+\frac{1125}{32}-\frac{81}{16}-\frac{81}{16}-\frac{1225}{16}=-\frac{4369}{32}\end{array}\right\}m^2e^2\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1425}{256}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{297}{128}-\frac{135}{512}-\frac{135}{128}-\frac{135}{256}-\frac{405}{512}\\ -\frac{135}{256}+\frac{225}{16}-\frac{135}{256}+\frac{6705}{512}+\frac{45}{64}+\frac{315}{32}+\frac{315}{32}=\frac{27261}{512}\end{array}\right\}m^2e^2\gamma^2$$

$$+\left(\frac{99}{8}+\frac{81}{8}+\frac{99}{8}+\frac{81}{8}+\frac{1125}{32}=\frac{2565}{32}\right)m^2\varepsilon'^2\gamma^2-\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}\right)m^2e^2E'^2$$

$$-\left(\frac{21}{2}+\frac{21}{4}=\frac{63}{4}\right)m^2e^2\left(\varepsilon'^2-E'^2\right)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{13421}{768}+\frac{1}{2}+\frac{297}{32}-\frac{15}{32}-\frac{3}{64}-\frac{15}{32}-\frac{3}{64}+\frac{1}{2}-\frac{17}{48}-\frac{2025}{512}\\ -\frac{2025}{128}+\frac{225}{32}+\frac{1575}{512}-\frac{2025}{128}-\frac{6075}{512}+\frac{9225}{512}+\frac{225}{32}+\frac{225}{32}=\frac{5401}{256}\end{array}\right\}m^2e^4$$

$$-\left(\frac{81}{8}+\frac{81}{8}+\frac{81}{8}+\frac{81}{8}+\frac{81}{16}+\frac{81}{16}=\frac{405}{8}\right)m^2\varepsilon'^4$$

$$+\left(\frac{199}{512}+\frac{11}{64}+\frac{1}{8}-\frac{9}{256}+\frac{135}{512}+\frac{11}{64}-\frac{81}{256}-\frac{27}{512}-\frac{9}{256}=\frac{349}{512}\right)m^2\gamma^4$$

$$-\left(\frac{225}{64}+\frac{225}{64}=\frac{225}{32}\right)m^2b^4+\left(\frac{3}{64}+\frac{1}{32}+\frac{3}{64}+\frac{1}{32}=\frac{5}{32}\right)\gamma^6$$

$$+\left(\frac{47}{128}-\frac{3}{32}+\frac{3}{128}-\frac{3}{32}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{91}{576}+\frac{15}{128}-\frac{3}{16}=-\frac{13}{1152}\right)e^6$$

$$+\left(\frac{3}{16}-\frac{23}{12}-\frac{1}{6}-\frac{15}{16}+\frac{3}{64}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}-\frac{1}{6}+\frac{1}{16}=-\frac{85}{32}\right)e^4\gamma^2$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{64}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{128}+\frac{23}{128}+\frac{15}{64}+\frac{3}{8}+\frac{15}{64}\\ -\frac{5}{4}+\frac{3}{64}-\frac{29}{32}-\frac{5}{16}-\frac{1}{32}-\frac{11}{128}=-\frac{47}{128}\end{array}\right\}e^2\gamma^4$$

$$-\left(\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=\frac{25}{2}\right)\varepsilon'^2b^4$$

$\sin 3cv \qquad e^3\left\{2-\left(1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\right)\gamma^2-\left(\frac{91}{96}+\frac{2}{3}+\frac{9}{16}=\frac{209}{96}\right)e^2+\left(3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\right)m^2\right\}$

$\sin 4cv \qquad e^4\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{9}{4}\right)$

$\sin 5cv \qquad e^5\left(\frac{91}{16}+\frac{9}{16}+\frac{1}{3}=\frac{59}{32}\right)$

$\sin 2gv \qquad \gamma^2\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\right)e^2+\left(\frac{121}{512}+\frac{121}{512}=\frac{121}{256}\right)m^4\right\}$

$$\sin 2cv \quad e^2 \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3\right)e^2-\left(\frac{165}{32}+\frac{165}{32}+\frac{165}{32}=\frac{495}{32}\right)m^3+\left(\frac{45}{64}+\frac{45}{64}+\frac{45}{64}=\frac{135}{64}\right)m^2\gamma^2 \\ & +\left(\frac{9}{8}+\frac{5}{4}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{675}{64}+\frac{2025}{128}-\frac{675}{128}-\frac{675}{64}=\frac{979}{64}\right)m^2 e^2 \\ & -\left(\frac{27}{2}+\frac{27}{8}+\frac{27}{8}+\frac{27}{4}+\frac{27}{4}=\frac{135}{4}\right)m^2 \varepsilon'^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{4}\right)e^2\gamma^2 \\ & +\left(\frac{91}{256}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{5}{32}+\frac{1}{2}=\frac{227}{256}\right)e^4+\left(\frac{11}{128}-\frac{29}{128}-\frac{3}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=-\frac{33}{64}\right)\gamma^4 \\ & +\left(\frac{11}{4}-\frac{295}{16}+\frac{1771}{512}-\frac{295}{16}-\frac{5143}{128}-\frac{12177}{512}-\frac{3135}{128}=-\frac{30495}{256}\right)m^4 \\ & +\left\{ \begin{aligned} & \frac{7183}{768}-\frac{431329}{2048}-\frac{193545}{2048}-\frac{21771}{256}-\frac{4465}{96}+\frac{9499}{768} \\ & -\frac{19345}{384}-\frac{5605}{64}-\frac{190817}{2048}+\frac{59}{6}+\frac{1309}{192}=-\frac{1289059}{2048} \end{aligned} \right\} m^5 \\ & +\left\{ \begin{aligned} & \frac{441265}{18432}-\frac{65579597}{73728}-\frac{15429}{512}-\frac{7425}{2048}-\frac{10286441}{32768}-\frac{346035}{1024} \\ & +\frac{81675}{65536}-\frac{109839}{512}-\frac{14275}{144}+\frac{38527}{384}+\frac{143773}{4608}-\frac{9168695}{73728}-\frac{367555}{1536} \\ & -\frac{1023473}{3072}-\frac{7394167}{24576}+\frac{3869}{144}+\frac{7021}{288}+\frac{71071}{4608}-\frac{63675}{16384}=-\frac{1573016723}{589824} \end{aligned} \right\} m^6 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{5}{2}+\frac{29}{16}-\frac{3}{16}-\frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{67}{16}\right)e^2-\left(\frac{135}{16}+\frac{135}{16}=\frac{135}{8}\right)me^2 \\ & +\left(\frac{99}{128}+\frac{165}{256}+\frac{99}{128}+\frac{165}{256}+\frac{99}{128}+\frac{165}{256}=\frac{1089}{256}\right)m^3 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{-\frac{5}{2}-\frac{11}{16}-\frac{3}{16}-1=-\frac{35}{8}\right\} e^2$$

$$\sin 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}\right)$$

$$\sin 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}\right)$$

$$\sin 2gv - 3cv \quad e^3\gamma^2 \left\{ \left(-\frac{29}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}-1=-\frac{39}{16}\right)+\left(\frac{135}{16}+\frac{135}{32}=\frac{405}{32}\right)m \right\}$$

$$\sin 2gv + 3cv \quad e^3\gamma^2 \left(\frac{11}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{21}{16}\right)$$

$$\sin 4gv - cv \quad e\gamma^4 \left(-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}=-\frac{3}{32}\right)$$

$$\sin 4gv + cv \quad e\gamma^4 \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{3}{32}\right)$$

$$\sin c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{aligned} & \left(6+6=12\right) m e^2 + \left(\frac{363}{128}+\frac{363}{128}=\frac{363}{64}\right) m^5 \\ & + \left(\frac{649}{64}+\frac{649}{64}+\frac{649}{64}+\frac{649}{64}=\frac{649}{16}\right) m^6 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{9}{2}-\frac{4987}{64}-\frac{6417}{64}+\frac{9}{2}+\frac{165}{32}+\frac{385}{32}+\frac{1185}{64} \\ & +\frac{195}{64}-\frac{165}{64}-\frac{1155}{64}+\frac{165}{32}+\frac{385}{32}=-\frac{1071}{8} \end{aligned} \right\} m^3 e^2 \end{aligned} \right)$$

$$\sin cv+c'mv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=-\frac{9}{2}\right) m e^2 \\ & + \left(\frac{495}{64}-\frac{363}{64}+\frac{143}{128}+\frac{121}{128}+\frac{495}{64}+\frac{121}{128}-\frac{847}{128}=\frac{99}{16}\right) m^4 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{15429}{256}-\frac{649}{12}+\frac{1727}{512}+\frac{767}{192}-\frac{473}{1536}+\frac{649}{192}+\frac{885}{32} \\ & +\frac{9405}{256}-\frac{33}{8}+\frac{649}{192}+\frac{649}{384}-\frac{4543}{192}-\frac{4543}{128}=\frac{365}{16} \end{aligned} \right\} m^5 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{1293987}{4096}-\frac{247615}{768}-\frac{1089}{256}-\frac{121275}{1024}-\frac{110737}{1024} \\ & +\frac{9263}{768}+\frac{11609}{1152}+\frac{608333}{36864}-\frac{2537}{2304}+\frac{9823}{1152}-\frac{49835}{1024} \\ & +\frac{16815}{128}+\frac{572451}{4096}-\frac{59}{4}-\frac{1309}{128}+\frac{42559}{4608}+\frac{3481}{576} \\ & +\frac{319}{4608}-\frac{297913}{4608}-\frac{24367}{192}-\frac{77033}{512}=-\frac{1312561}{4096} \end{aligned} \right\} m^6 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin cv-c'mv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}\right) m e^2 \\ & + \left(\frac{847}{128}-\frac{363}{64}-\frac{495}{64}-\frac{869}{128}-\frac{495}{64}+\frac{121}{128}-\frac{847}{128}=-\frac{1727}{64}\right) m^4 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{17149}{512}-\frac{649}{12}-\frac{15429}{256}-\frac{57101}{1536}-\frac{4661}{192}+\frac{4543}{192} \\ & -\frac{885}{32}-\frac{9405}{256}+\frac{33}{8}+\frac{649}{192}-\frac{4543}{192}-\frac{4543}{128}+\frac{649}{384}=-\frac{178945}{768} \end{aligned} \right\} m^5 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{121275}{1024}-\frac{247615}{768}-\frac{1089}{256}-\frac{1293987}{4096}-\frac{19415}{288} \\ & -\frac{306269}{2304}-\frac{70547}{1152}+\frac{786665}{4096}+\frac{91981}{768}+\frac{68761}{1152}-\frac{49835}{1024} \\ & -\frac{16815}{128}+\frac{319}{4608}-\frac{572451}{4096}+\frac{59}{4}+\frac{1309}{128}+\frac{42559}{4608} \\ & +\frac{3481}{576}-\frac{24367}{192}-\frac{77033}{512}-\frac{297913}{4608}=-\frac{38180261}{36864} \end{aligned} \right\} m^6 \end{aligned} \right\}$$

$\sin cv - 2c'mv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \left(9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}\right) m^2 + \left(\frac{27}{16} + \frac{27}{16} - \frac{27}{16} + \frac{27}{16} = \frac{27}{8}\right) m e^2 \right.$

$\sin cv + 2c'mv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \left(9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}\right) m^2 \right\}$

$$\sin 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(6 + 3 = 9\right) m \\ + \left(\frac{9}{2} - \frac{6417}{64} + \frac{9}{2} - \frac{735}{16} + \frac{165}{32} - \frac{1155}{64} - \frac{1155}{64} + \frac{165}{32} = - \frac{10431}{64}\right) m^3 \\ + \left(\frac{27}{4} + \frac{27}{8} = \frac{81}{8}\right) m \varepsilon'^2 - \left(\frac{33}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{27}{8} = \frac{117}{8}\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{135}{16} - 1 + \frac{27}{16} - \frac{27}{16} + \frac{65}{16} - 1 + \frac{27}{8} = \frac{111}{8}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$\sin 2cv + c'mv \quad e^2\varepsilon' \left(- 6 - 3 = - 9\right) m$

$\sin 2gv - c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2 \left\{ - \frac{21}{16} - \frac{75}{16} - 3 - \frac{3}{4} - \frac{15}{4} - \frac{9}{16} + \frac{9}{16} = - \frac{27}{2} \right\} m e^2$

$\sin 2cv + 2c'mv \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ - \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = - \frac{27}{4} \right\} m$

$\sin 2cv - 2c'mv \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \right\} m$

$\sin 3cv + c'mv \quad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0 \right\} m$

$\sin 3cv - c'mv \quad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0 \right\} m$

$\sin 2gv + cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \right\} m$

$\sin 2gv - cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = - \frac{9}{4} \right\} m$

$\sin 2gv + cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = - \frac{9}{4} \right\} m$

$\sin 2gv - cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \right\} m$

$$
\sin 2Ev \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{1331}{2048}m^6-\left(\frac{7139}{1536}+\frac{7139}{3072}=\frac{7139}{1024}\right)m^7-\left(\frac{11}{4}+\frac{11}{4}=\frac{11}{2}\right)m^2e^2\\
&-\left(\frac{20515}{1024}+\frac{38291}{2304}+\frac{108053}{18432}=\frac{261217}{6144}\right)m^8-\left(\frac{59}{6}+\frac{59}{6}=\frac{59}{3}\right)m^3e^2\\
&-\left(\frac{3869}{144}+\frac{33}{16}+\frac{3869}{144}+\frac{33}{16}+\frac{2475}{256}+\frac{2475}{256}=\frac{88931}{1152}\right)m^4e^2\\
&-\left\{\begin{aligned}&\frac{394141}{6912}+\frac{1833739}{27648}+\frac{59}{8}+\frac{495}{256}-\frac{26565}{2048}\\&-\frac{5445}{4096}+\frac{77145}{1024}+\frac{47025}{1024}+\frac{43335}{512}+\frac{47025}{1024}\\&-\frac{165}{32}+\frac{4245}{1024}-\frac{165}{32}+\frac{495}{256}+\frac{59}{8}=\frac{41285999}{110592}\end{aligned}\right\}m^5e^2\\
&+\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}\right)me^2\gamma^2+\left(\frac{69}{32}+\frac{11}{16}+\frac{69}{32}+\frac{11}{16}=\frac{91}{16}\right)m^2e^2\gamma^2\\
&+\left(\frac{3119}{512}+\frac{59}{24}+\frac{3119}{512}+\frac{9}{32}+\frac{59}{24}+\frac{675}{512}+\frac{675}{512}+\frac{9}{32}=\frac{7795}{384}\right)m^3e^2\gamma^2\\
&+\left(\frac{363}{2048}+\frac{363}{4096}=\frac{1089}{4096}\right)m^5\gamma^2\\
&+\left(\frac{55}{8}-\frac{245}{8}-\frac{45}{4}-\frac{105}{4}-\frac{45}{4}-\frac{105}{4}=-\frac{395}{4}\right)m^2e^2\varepsilon'^2\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{311}{24}-\frac{7467}{48}-\frac{117}{64}-\frac{99}{64}-\frac{693}{64}-\frac{711}{64}-\frac{405}{16}\\&-\frac{45}{32}-\frac{5325}{32}-3-21-\frac{141}{32}-\frac{5997}{32}=-\frac{27691}{48}\end{aligned}\right\}m^3e^2\varepsilon'^2\\
&-\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}=\frac{15}{8}\right)me^2\varepsilon'^2\gamma^2-\left(\frac{59}{384}+\frac{59}{384}=\frac{59}{192}\right)m^3\gamma^4+\frac{3}{512}m\gamma^6\\
&+\left(\frac{45}{4}+\frac{135}{16}+\frac{45}{16}+\frac{45}{16}+\frac{45}{16}=\frac{225}{8}\right)me^4-\left(\frac{11}{256}+\frac{11}{256}=\frac{11}{128}\right)m^2\gamma^4\\
&-\left(\frac{225}{8}+\frac{675}{32}+\frac{225}{32}+\frac{225}{32}+\frac{225}{32}=\frac{1125}{16}\right)me^4\varepsilon'^2+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{32}=\frac{27}{16}\right)m^3\gamma^2\varepsilon'^2\\
&+\left(\frac{923}{32}+\frac{2321}{64}+\frac{3321}{256}-\frac{483}{256}+\frac{855}{64}-\frac{3}{2}+\frac{23}{4}+\frac{65}{32}=\frac{5641}{64}\right)m^2e^4\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{10125}{1024}-\frac{10125}{1024}+\frac{621599}{3072}+\frac{393025}{3072}+\frac{405}{64}+\frac{52785}{1024}+\frac{15}{64}-\frac{653}{128}\\&+\frac{135}{32}+\frac{187057}{3072}-\frac{119}{32}+\frac{30375}{1024}+\frac{52041}{1024}+\frac{75}{32}+\frac{161}{48}+\frac{135}{16}=\frac{138061}{256}\end{aligned}\right\}m^3e^4\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{15}{32}-\frac{45}{8}-\frac{315}{512}+\frac{15}{32}+\frac{1365}{512}-\frac{15}{32}-\frac{45}{32}\\&+\frac{45}{32}+\frac{15}{64}-\frac{15}{16}-\frac{75}{64}+\frac{15}{16}=-\frac{1035}{256}\end{aligned}\right\}me^6
\end{aligned}
\right\}
$$

$+$

$$
\sin 2Ev \left\{
\begin{array}{l}
-\left\{\begin{array}{l}
\frac{711}{64}+\frac{45}{16}+\frac{561}{64}+\frac{135}{64}+\frac{1341}{512}+\frac{15}{64}-\frac{99}{512} \\
+\frac{15}{16}+\frac{9}{64}+\frac{63}{32}-\frac{9}{64}+\frac{57}{32}+\frac{45}{32}=\frac{8589}{256}
\end{array}\right\} m e^4 \gamma^2 \\
-\left\{\begin{array}{l}
\frac{57}{64}+\frac{3}{32}+\frac{117}{128}+\frac{3}{32}-\frac{165}{512}+\frac{45}{128}+\frac{45}{64} \\
+\frac{9}{16}+\frac{15}{32}+\frac{3}{128}-\frac{15}{128}+\frac{51}{128}+\frac{9}{128}=\frac{2115}{512}
\end{array}\right\} m e^2 \gamma^4 \\
-\left(\frac{99}{16}+\frac{99}{16}=\frac{99}{8}\right) m^4 \varepsilon'^2-\left(\frac{177}{8}+\frac{177}{8}=\frac{177}{4}\right) m^5 \varepsilon'^2
\end{array}
\right.
$$

$$
\sin(2Ev-cv)\, e \left\{
\begin{array}{l}
-\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{2}=15\right) m e^2-\left(\frac{317}{8}+\frac{1107}{32}-\frac{33}{32}-\frac{33}{32}+2=\frac{2373}{32}\right) m^2 e^2 \\
-\left(\frac{59009}{384}+\frac{45}{8}+\frac{17595}{128}+\frac{45}{8}-\frac{59}{16}-\frac{59}{16}+\frac{119}{24}+\frac{3375}{256}=\frac{240497}{768}\right) m^3 e^2 \\
-\left\{\begin{array}{l}
\frac{2346011}{4608}+\frac{951}{32}+\frac{675}{128}+\frac{935131}{2048}+\frac{3321}{128}+\frac{675}{128}-\frac{3869}{384} \\
-\frac{11}{128}-\frac{893}{96}+\frac{9185}{2048}-\frac{22275}{2048}-\frac{7425}{1024}+3+\frac{6461}{576}-\frac{7425}{1024} \\
+\frac{225}{16}-\frac{7425}{2048}+\frac{150075}{1024}+\frac{64125}{1024}-\frac{7425}{1024}-\frac{55}{64}=\frac{7451543}{6144}
\end{array}\right\} m^4 e^2 \\
-\left(\frac{1815}{512}+\frac{1815}{512}=\frac{1815}{256}\right) m^5 \\
-\left(\frac{56573}{2048}+\frac{3113}{2048}+\frac{3245}{256}+\frac{31779}{1024}+\frac{3245}{256}-\frac{121}{128}+\frac{3113}{2048}=\frac{176341}{2048}\right) m^6 \\
-\left\{\begin{array}{l}
\frac{4744619}{32768}+\frac{214891}{15360}+\frac{303437}{3072}+\frac{49115}{1536}+\frac{81000997}{491520}+\frac{56817}{512} \\
+\frac{49115}{1536}-\frac{649}{96}-\frac{14399}{6144}+\frac{21901}{2560}+\frac{16697}{3072}=\frac{49329391}{81920}
\end{array}\right\} m^7 \\
+\left(\frac{67}{4}-\frac{237}{16}-\frac{39}{16}+\frac{33}{16}+\frac{231}{16}=16\right) m^3 \varepsilon'^2 \\
+\left(-\frac{297}{32}-\frac{5191}{64}-\frac{471}{64}-\frac{297}{64}+\frac{59}{16}+\frac{1239}{16}-\frac{297}{64}+\frac{649}{8}=\frac{1767}{32}\right) m^4 \varepsilon'^2 \\
+\left(\frac{75}{4}+\frac{75}{4}=\frac{75}{2}\right) m e^2 \varepsilon'^2+\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{8}+\frac{447}{64}+\frac{15}{8}-\frac{9}{64}+\frac{3}{16}=\frac{585}{32}\right) m e^2 \gamma^2 \\
+\left(\frac{615}{64}+\frac{105}{64}-\frac{405}{128}+\frac{135}{128}+\frac{135}{64}-\frac{135}{64}+\frac{15}{8}=\frac{705}{64}\right) m e^4 \\
+\left(\frac{9}{64}-\frac{15}{128}+\frac{3}{128}+\frac{9}{64}=\frac{3}{16}\right) m \gamma^4 \\
+\left(\frac{495}{1024}+\frac{495}{1024}+\frac{495}{1024}+\frac{495}{1024}=\frac{495}{256}\right) m^4 \gamma^2
\end{array}
\right.
$$

$$\sin 2Ev+cv\ \ e\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{4}=\frac{45}{4}\right)me^2+\left(\frac{317}{8}+\frac{161}{32}+\frac{33}{32}+\frac{33}{32}+\frac{285}{16}=\frac{2065}{32}\right)m^2e^2\\
&+\left(\frac{58009}{384}+\frac{45}{8}+\frac{653}{48}+\frac{59}{16}+\frac{59}{16}+\frac{17347}{256}+\frac{45}{8}=\frac{192811}{768}\right)m^3e^2\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{2346011}{4608}+\frac{951}{32}+\frac{675}{128}+\frac{40115}{1152}+\frac{483}{128}+\frac{3869}{384}\\&+\frac{11}{128}+\frac{893}{96}+\frac{55}{64}+\frac{672197}{3072}+\frac{855}{32}+\frac{12375}{1024}\\&+\frac{36225}{1024}-\frac{7425}{1024}+\frac{225}{16}+\frac{7425}{1024}=\frac{8387333}{9216}\end{aligned}\right\}m^4e^2\\
&-\left(\frac{1815}{512}+\frac{1815}{512}=\frac{1815}{256}\right)m^5\\
&+\left(\frac{3113}{2048}-\frac{56573}{2048}-\frac{3245}{256}+\frac{6985}{2048}-\frac{3245}{256}-\frac{34485}{4096}+\frac{3113}{2048}=-\frac{225049}{4096}\right)m^6\\
&-\left(\frac{67}{4}+\frac{33}{16}+\frac{231}{16}+\frac{33}{16}+\frac{231}{16}=\frac{199}{4}\right)m^3\varepsilon'^2-\left(\frac{75}{8}+\frac{75}{4}=\frac{225}{8}\right)me^2\varepsilon'^2\\
&-\left(\frac{4677}{64}-\frac{43}{64}+\frac{297}{64}+\frac{297}{64}+\frac{297}{32}+\frac{59}{16}+\frac{1239}{16}+\frac{649}{8}=\frac{8103}{32}\right)m^4\varepsilon'^2\\
&-\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{8}+\frac{33}{64}+\frac{9}{64}+\frac{21}{8}+\frac{15}{8}=\frac{465}{32}\right)me^2\gamma^2-\left(\frac{9}{64}+\frac{9}{64}+\frac{9}{64}=\frac{27}{64}\right)m\gamma^4\\
&-\left(\frac{615}{64}+\frac{455}{64}+\frac{135}{32}+\frac{5}{4}+\frac{15}{8}+\frac{5}{4}+\frac{135}{64}+\frac{135}{64}=\frac{945}{32}\right)me^4\\
&+\left(\frac{495}{1024}+\frac{495}{1024}+\frac{495}{1024}=\frac{1485}{1024}\right)m^4\gamma^2
\end{aligned}\right.$$

$$\sin 2Ev-2cv\ \ e^2\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{11}{8}+\frac{11}{4}=\frac{33}{8}\right)m^2+\left(\frac{59}{6}+\frac{59}{12}=\frac{59}{4}\right)m^3\\
&-\left(\frac{45}{4}+\frac{45}{16}-\frac{45}{16}+\frac{45}{16}-\frac{45}{16}=\frac{45}{4}\right)me^2-\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{16}=\frac{9}{16}\right)m\gamma^2\\
&+\left(\frac{3869}{144}+\frac{33}{16}+\frac{893}{72}+\frac{33}{16}-\frac{2475}{512}-\frac{2475}{256}=\frac{44381}{1536}\right)m^4
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 2Ev+2cv\ \ e^2\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{11}{8}+\frac{11}{4}=\frac{33}{8}\right)m^2+\left(\frac{59}{6}+\frac{59}{12}=\frac{59}{4}\right)m^3\\
&-\left(\frac{135}{16}+\frac{45}{16}+\frac{45}{16}+\frac{45}{16}=\frac{135}{8}\right)me^2-\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{16}=\frac{9}{16}\right)m\gamma^2\\
&+\left(\frac{3869}{144}+\frac{33}{32}+\frac{893}{72}+\frac{33}{16}=\frac{4067}{96}\right)m^4
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 2Ev-2gv\ \ \gamma^2\left\{\ \frac{15}{16}-\frac{3}{16}-\frac{9}{8}=-\frac{3}{8}\right\}me^2$$

$$\sin 2Ev + 2gv \quad \gamma^2 \left\{ -\frac{15}{16} - \frac{15}{16} = -\frac{15}{8} \right\} m e^2$$

$$\sin 2Ev - 3cv \quad e^3 \left\{ \left(\frac{15}{2} + \frac{15}{4} = \frac{45}{4} \right) m + \left(\frac{1107}{32} - \frac{33}{32} - \frac{33}{32} + \frac{285}{16} = \frac{1611}{32} \right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + 3cv \quad e^3 \left\{ -2 - \frac{33}{32} - \frac{33}{32} - \frac{161}{32} = -\frac{191}{32} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l}
-\left(\frac{3993}{1024} - \frac{1331}{2048} + \frac{9317}{4096} = \frac{22627}{4096} \right) m^6 \\
-\left\{ \begin{array}{l} \frac{9339}{4096} + \frac{7139}{192} + \frac{7139}{512} - \frac{4939}{4096} - \frac{7139}{3072} \\ + \frac{49973}{3072} + \frac{49973}{4096} + \frac{9339}{4096} = \frac{61919}{768} \end{array} \right\} m^7 \\
-\left(\frac{79}{8} - \frac{11}{8} + \frac{45}{4} + \frac{45}{4} = 31 \right) m^2 e^2 \\
-\left(\frac{5191}{96} + \frac{43}{96} + \frac{951}{16} - \frac{99}{32} - \frac{99}{32} + \frac{855}{16} + 6 = \frac{4013}{24} \right) m^3 e^2 \\
+\left\{ \begin{array}{l} \frac{55303}{2304} - \frac{1765}{18} - \frac{237}{32} + \frac{33}{32} - \frac{58009}{256} + \frac{11025}{64} \\ + \frac{177}{16} + \frac{6831}{256} + \frac{177}{16} + \frac{14619}{256} - \frac{693}{16} + \frac{74805}{512} \\ - \frac{52041}{256} - \frac{119}{8} + \frac{2475}{256} - \frac{5775}{256} + \frac{7425}{512} = -\frac{164279}{1152} \end{array} \right\} m^4 e^2 \\
+\left\{ \begin{array}{l} \frac{4990219}{6912} - \frac{5191}{128} - \frac{3555}{512} + \frac{10185805}{27648} - \frac{43}{128} + \frac{495}{512} \\ - \frac{2346011}{3072} + \frac{18915}{16} + \frac{232995}{256} + \frac{3869}{128} + \frac{12213}{128} \\ + \frac{199485}{512} + \frac{3869}{128} + \frac{26137}{128} + \frac{407385}{4096} - \frac{808005}{2048} \\ + \frac{185955}{4096} + \frac{12705}{4096} + \frac{77145}{256} + \frac{2475}{2048} - \frac{1239}{8} + \frac{16335}{2048} \\ + \frac{1021625}{1024} + \frac{1420495}{2048} - \frac{672197}{1024} - \frac{6461}{192} + \frac{6417}{64} \\ - \frac{101115}{512} - \frac{292875}{2048} - \frac{165}{64} - \frac{9905}{1024} - \frac{195}{64} + \frac{4245}{1024} \\ - \frac{495}{64} + \frac{51645}{1024} + \frac{141075}{2048} - \frac{79695}{4096} - \frac{5445}{4096} = \frac{428159807}{110592} \end{array} \right\} m^5 e^2 \\
-\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \right) m e^2 \gamma^2 - \left(\frac{45}{4} + \frac{135}{16} + \frac{45}{16} + \frac{45}{16} = \frac{405}{16} \right) m e^4
\end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l}
-\left(\frac{3993}{1024}+\frac{9317}{2048}-\frac{1331}{4096}=\frac{33275}{4096}\right)m^6 \\
+\left\{\begin{array}{l} \frac{9339}{4096}-\frac{7139}{192}-\frac{7139}{512}-\frac{471713}{12288}-\frac{49973}{3072} \\ +\frac{7139}{3072}+\frac{7139}{12288}+\frac{9339}{4096}=-\frac{302027}{3072} \end{array}\right\} m^7 \\
+\left(\frac{13}{8}-\frac{77}{8}+\frac{45}{4}+\frac{45}{4}=\frac{29}{2}\right)m^2e^2 \\
+\left(\frac{157}{32}-\frac{1559}{32}+\frac{951}{16}+\frac{99}{32}-\frac{99}{32}+\frac{855}{16}+6=\frac{1201}{16}\right)m^3e^2 \\
+\left\{\begin{array}{l} \frac{39}{32}-\frac{10067}{64}-\frac{71515}{256}-\frac{231}{32}+\frac{58009}{256}-\frac{11025}{64} \\ +\frac{177}{16}+\frac{6831}{256}-\frac{177}{16}-\frac{14619}{256}-\frac{693}{16}-\frac{96255}{512} \\ +\frac{52041}{256}+\frac{119}{8}-\frac{28875}{512}+\frac{2475}{256}-\frac{5775}{256}=-\frac{64151}{128} \end{array}\right\} m^4e^2 \\
+\left\{\begin{array}{l} \frac{471}{128}-\frac{461693}{256}+\frac{585}{512}-\frac{4663747}{3072}-\frac{4677}{128}-\frac{3465}{512} \\ -\frac{18915}{16}+\frac{2346011}{3072}-\frac{232995}{256}+\frac{3869}{128}+\frac{12213}{128}-\frac{3869}{128} \\ +\frac{199485}{512}-\frac{26137}{128}-\frac{407385}{4096}-\frac{808005}{2048}-\frac{1239}{8} \\ +\frac{16335}{2048}-\frac{375105}{256}-\frac{1828845}{2048}+\frac{672197}{1024}-\frac{293795}{512} \\ -\frac{548625}{2048}+\frac{6461}{192}-\frac{4987}{64}-\frac{26565}{4096}-\frac{5445}{4096}+\frac{43335}{512} \\ +\frac{2475}{2048}-\frac{180005}{1024}-\frac{292875}{2048}+\frac{1155}{64}+\frac{4245}{1024}+\frac{1185}{64} \\ -\frac{29715}{1024}+\frac{1925}{64}+\frac{309923}{4096}+\frac{38115}{4096}=-\frac{31747151}{4096} \end{array}\right\} m^5e^2 \\
+\left(\frac{7}{8}+\frac{7}{8}=\frac{7}{4}\right)me^2\gamma^2+\left(\frac{105}{4}+\frac{315}{16}+\frac{105}{16}+\frac{105}{16}=\frac{945}{16}\right)me^4
\end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev - 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\left\{ \left(\frac{99}{32}+\frac{99}{16}=\frac{297}{32}\right)m^4+\left(\frac{177}{16}+\frac{177}{8}=\frac{531}{16}\right)m^5 \right\}$$

$$\sin 2Ev - 2gv + cv \qquad e\gamma^2\left\{ \frac{11}{32}+\frac{11}{32}+\frac{11}{32} = \frac{33}{32}\right\} m^3$$

$$\sin 2Ev - 2gv - cv \qquad e\gamma^2\left\{ -\frac{11}{32}-\frac{11}{32}-\frac{11}{32}=-\frac{33}{32}\right\} m^3$$

$$\sin 2Ev + 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\frac{11}{32} - \frac{11}{32} - \frac{11}{32} = -\frac{33}{32} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{11}{32} + \frac{11}{32} + \frac{11}{32} = \frac{33}{32} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev - 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{9}{8} + \frac{9}{16} = \frac{27}{16} \right\} m$$

$$\sin 2Ev + 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{15}{16} + \frac{15}{16} = \frac{15}{8} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{3}{16} - \frac{15}{16} - \frac{15}{16} + \frac{9}{16} = -\frac{9}{8} \right\} m$$

$$\sin 2Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{15}{2} + \frac{15}{2} = 15\right) me^2 + \left(\frac{33}{8} + \frac{33}{8} + \frac{33}{8} = \frac{99}{8}\right) m^3 \\ & + \left(\frac{59}{4} + \frac{59}{4} + \frac{59}{4} = \frac{177}{4}\right) m^4 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{99}{32} - \frac{9967}{384} + \frac{3869}{96} - \frac{8085}{128} - \frac{70587}{1024} + \frac{893}{24} \\ & + \frac{5445}{1024} - \frac{5445}{512} + \frac{1815}{1024} - \frac{12705}{1024} = -\frac{47821}{512} \end{aligned} \right\} m^5 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{177}{16} - \frac{21522037}{36864} + \frac{1485}{512} + \frac{394141}{4608} - \frac{14455}{64} \\ & - \frac{13871}{32} - \frac{275077}{512} - \frac{126201}{256} + \frac{2855}{36} + \frac{37873}{2048} \\ & + \frac{9735}{512} - \frac{3245}{32} - \frac{103455}{2048} - \frac{121}{128} + \frac{3245}{1024} \\ & + \frac{56573}{4096} + \frac{847}{256} + \frac{3113}{128} - \frac{222453}{2048} - \frac{68145}{1024} \\ & - \frac{21791}{4096} - \frac{495}{64} = -\frac{28920463}{12288} \end{aligned} \right\} m^6 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv + cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{aligned} & -\left(\frac{15}{2} + \frac{15}{4} = \frac{45}{4}\right) me^2 - \left(\frac{33}{8} + \frac{33}{8} + \frac{33}{8} = \frac{99}{8}\right) m^3 \\ & - \left(\frac{59}{4} + \frac{59}{4} + \frac{59}{4} = \frac{177}{4}\right) m^4 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{9967}{384} - \frac{99}{32} - \frac{3869}{96} + \frac{8085}{128} + \frac{54857}{1024} \\ & - \frac{893}{24} + \frac{1815}{1024} + \frac{1815}{1024} - \frac{4235}{1024} = \frac{15743}{256} \end{aligned} \right\} m^5 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{35}{2}+\frac{35}{2}=35\right)me^2-\left(\frac{33}{8}+\frac{33}{8}+\frac{33}{8}=\frac{99}{8}\right)m^3 \\ -\left(\frac{59}{4}+\frac{59}{4}+\frac{59}{4}=\frac{177}{4}\right)m^4 \\ +\left\{ \begin{array}{l} \frac{9967}{384}-\frac{99}{32}-\frac{3869}{96}+\frac{8085}{128}+\frac{54857}{1024}-\frac{893}{24} \\ -\frac{21175}{1024}-\frac{5445}{512}+\frac{1815}{1024}-\frac{12705}{1024}=-\frac{10311}{512} \end{array} \right\} m^5 \\ +\left\{ \begin{array}{l} \frac{21017731}{36864}-\frac{177}{16}-\frac{1485}{512}-\frac{394141}{4608}+\frac{14455}{64} \\ +\frac{13871}{32}-\frac{2855}{36}+\frac{495}{64}+\frac{2247575}{6144}+\frac{294233}{1536} \\ -\frac{646349}{3072}+\frac{3245}{1024}-\frac{113575}{1536}-\frac{3245}{32}+\frac{3113}{4096} \\ -\frac{103455}{2048}+\frac{847}{128}+\frac{31779}{2048}-\frac{68145}{1024}-\frac{396011}{4096} \\ -\frac{121}{256}-\frac{21791}{2048}=\frac{12671795}{12288} \end{array} \right\} m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv + cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{35}{2}+\frac{35}{4}=\frac{105}{4}\right)me^2+\left(\frac{33}{8}+\frac{33}{8}+\frac{33}{3}=\frac{99}{8}\right)m^3 \\ +\left(\frac{59}{4}+\frac{59}{4}+\frac{59}{4}=\frac{177}{4}\right)m^4 \\ +\left\{ \begin{array}{l} \frac{3869}{96}-\frac{8085}{128}-\frac{9967}{384}+\frac{99}{32}-\frac{70587}{1024} \\ +\frac{893}{24}-\frac{12705}{1024}-\frac{12705}{1024}+\frac{1815}{1024}=-\frac{51451}{512} \end{array} \right\} m^5 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - 2c'mv - cv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{39}{16}-\frac{561}{32}-\frac{99}{32}-\frac{99}{32}+\frac{135}{16}-\frac{231}{16}=-\frac{873}{32}\right)m^3 \\ +\left\{ \begin{array}{l} \frac{471}{64}-\frac{177}{2}-\frac{177}{16}-\frac{177}{16}+\frac{297}{64} \\ +\frac{2565}{64}-\frac{1239}{16}+\frac{297}{64}=-\frac{4203}{32} \end{array} \right\} m^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev + 2c'mv - cv \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \frac{45}{8}me^2+\left(\frac{33}{32}+\frac{237}{16}+\frac{99}{32}+\frac{99}{32}+\frac{135}{16}-\frac{33}{16}=\frac{909}{32}\right)m^3 \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ -\frac{11}{8}-\frac{11}{16}=-\frac{33}{16} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev - c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{77}{8}+\frac{77}{16} = \frac{231}{16} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{45}{4} + \frac{45}{4} - \frac{11}{16} = \frac{349}{16} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev - c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ -\frac{45}{4} - \frac{45}{4} + \frac{77}{16} = -\frac{283}{16} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + c'mv - 3cv \quad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{15}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{45}{4} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - c'mv - 3cv \quad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{35}{2} + \frac{35}{4} = \frac{105}{4} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - 4cv \quad e^4 \left\{ \frac{45}{16} - \frac{45}{16} + \frac{45}{16} - \frac{45}{16} = 0 \right\} m$$

$$\sin Ev \quad b^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{15}{4} + \frac{15}{4} = \frac{15}{2}\right) m e^2 + \left(\frac{1815}{1024} + \frac{1815}{1024} = \frac{1815}{512}\right) m^5 \\ + \left(\frac{69157}{4096} + \frac{3245}{512} + \frac{17743}{1024} + \frac{3245}{512} - \frac{1815}{8192} = \frac{382283}{8192}\right) m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin Ev + cv \quad eb^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{165}{64} + \frac{165}{64} + \frac{165}{64} = \frac{495}{64}\right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{6287}{256} + \frac{10659}{512} + \frac{295}{32} + \frac{2475}{512} + \frac{2475}{512} \\ + \frac{1023}{64} + \frac{295}{32} - \frac{165}{256} - \frac{165}{256} = \frac{45147}{512} \end{array} \right\} m^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin Ev + c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left\{ -\left(5 + 5 = 10\right) e^2 + \left(\frac{45}{2} + \frac{45}{2} = 45\right) m e^2 \right\}$$

$$\sin Ev - c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{15}{4} - \frac{105}{8} - \frac{75}{8} = -\frac{105}{4} \right\} m e^2$$

$$\sin Ev - 2cv \quad e^2 b^2 \left\{ -\frac{15}{4} - \frac{15}{8} = -\frac{45}{8} \right\} m$$

$$\sin Ev + 2cv \quad e^2 b^2 \left\{ -\frac{15}{4} - \frac{15}{8} = -\frac{45}{8} \right\} m$$

$$\sin Ev + c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2} \right\}$$

$$\sin Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2} \right\}$$

$$\sin 3Ev \quad b^2 \left\{ \frac{1815}{1024} + \frac{1815}{2048} = \frac{5445}{2048} \right\} m^5$$

$$\sin 3Ev - cv \quad eb^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{165}{64} + \frac{165}{64} + \frac{165}{64} = \frac{495}{64}\right) m^3 \\ + \left(\frac{1613}{64} + \frac{10659}{512} + \frac{295}{32} + \frac{2475}{512} + \frac{1023}{64} + \frac{295}{32} + \frac{2475}{512} = \frac{46137}{512}\right) m^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4Ev \qquad \left\{ \frac{165}{32}+\frac{165}{32}+\frac{165}{32}=\frac{495}{32} \right\} m^3 e^2$$

$$\sin 4Ev + cv \qquad e\left\{ \frac{121}{64}+\frac{121}{128}=\frac{363}{128} \right\} m^4$$

$$\sin 4Ev - cv \qquad e\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{225}{32}+\frac{225}{16}=\frac{675}{32}\right) m^2 e^2 - \left(\frac{121}{128}+\frac{121}{64}=\frac{363}{128}\right) m^4 \\ -\left(\frac{649}{96}+\frac{649}{96}+\frac{649}{96}=\frac{649}{32}\right) m^5 \\ -\left(\frac{1865}{64}+\frac{363}{512}+\frac{42559}{2304}+\frac{3481}{144}+\frac{9823}{576}=\frac{45849}{512}\right) m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4Ev + c'mv \qquad \varepsilon'\left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{363}{256}+\frac{363}{128}=\frac{1089}{256}\right) m^5 \\ -\left(\frac{495}{64}+\frac{165}{32}+\frac{165}{64}+\frac{165}{64}+\frac{165}{32}=\frac{1485}{64}\right) m^3 e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4Ev - c'mv \qquad \varepsilon'\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{363}{256}+\frac{363}{128}=\frac{1089}{256}\right) m^5 \\ +\left(\frac{1925}{64}+\frac{385}{32}+\frac{1155}{64}+\frac{1155}{64}+\frac{385}{32}=\frac{5775}{64}\right) m^3 e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4Ev - 2cv \qquad e^2\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{165}{32}+\frac{165}{32}+\frac{165}{32}=\frac{495}{32}\right) m^3 \\ -\left(\frac{2889}{64}-\frac{363}{1024}+\frac{12177}{512}+\frac{295}{16}+\frac{295}{16}+\frac{3135}{128}+\frac{283}{256}=\frac{134187}{1024}\right) m^4 \\ +\left\{ \begin{array}{l} \frac{649}{256}-\frac{7363727}{30720}-\frac{495}{128}-\frac{193545}{2048}-\frac{21771}{256}-\frac{4465}{96} \\ -\frac{19345}{384}-\frac{5605}{64}-\frac{190817}{2048}-\frac{1991}{320}=-\frac{7213511}{10240} \end{array} \right\} m^5 \\ +\left\{ \begin{array}{l} \frac{5595}{512}-\frac{480201287}{614400}-\frac{8667}{256}-\frac{7425}{2048}+\frac{121}{4096} \\ -\frac{346035}{1024}-\frac{849}{512}-\frac{10286441}{32768}-\frac{109839}{512}-\frac{14275}{144} \\ +\frac{398475}{32768}-\frac{1970705}{18432}-\frac{367555}{1536}+\frac{2475}{256}-\frac{641477}{28800} \\ -\frac{1023473}{3072}-\frac{7394167}{24576}=-\frac{3386511701}{1228800} \end{array} \right\} m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4Ev - 2gv \qquad \gamma^2\left\{ \frac{121}{1024}+\frac{121}{512}=\frac{363}{1024} \right\} m^4$$

$$\sin 4Ev - 3cv \qquad e^3\left\{ -\frac{225}{32}-\frac{225}{16}=-\frac{675}{32} \right\} m^2$$

$$\sin 4Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{495}{64}+\frac{869}{128}+\frac{495}{64}-\frac{121}{128}-\frac{121}{128}=\frac{2607}{128}\right)m^4 \\ -\left\{ \begin{array}{l} \frac{8667}{128}-\frac{449}{256}+\frac{1089}{1024}+\frac{57101}{1536}+\frac{4661}{192}+\frac{885}{32} \\ +\frac{9405}{32}-\frac{649}{384}-\frac{649}{192}+\frac{849}{256}=\frac{459039}{1024} \end{array} \right\} m^5 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{495}{64}-\frac{847}{128}+\frac{143}{128}+\frac{495}{64}-\frac{847}{128}=\frac{429}{128}\right)m^4 \\ +\left\{ \begin{array}{l} \frac{8667}{128}-\frac{42883}{768}+\frac{1089}{1024}+\frac{1727}{512}+\frac{767}{192}+\frac{885}{32} \\ +\frac{9405}{256}-\frac{4543}{192}-\frac{4543}{128}+\frac{849}{256}=\frac{29555}{1024} \end{array} \right\} m^5 \end{array} \right\}$$

$$\sin 6Ev - 2cv \qquad e^2 \left\{ \frac{2475}{256}+\frac{2475}{512}=\frac{7425}{512} \right\} m^4.$$

$$\{F(v)\}^4 = \{F(v)\}^2 \times \{F(v)\}^2 =$$

$$\cos cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} \left(3-3=0\right)e^4+\left(\frac{165}{8}+\frac{165}{8}-\frac{165}{8}-\frac{165}{16}=\frac{165}{16}\right)m^3e^2 \\ +\left(\frac{45}{32}-\frac{45}{16}+\frac{45}{16}-\frac{45}{16}=-\frac{45}{32}\right)m^2e^2\gamma^2 \\ +\left(\frac{295}{4}-\frac{295}{4}-\frac{5143}{64}-\frac{3487}{32}+\frac{3487}{32}+\frac{12177}{128}+\frac{295}{4}-\frac{1771}{128}=\frac{1195}{16}\right)m^4e^2 \\ +\left(\frac{27}{2}+\frac{27}{2}-27=0\right)m^2e^2\varepsilon'^2 \\ +\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+\frac{675}{8}-\frac{675}{8}-\frac{2025}{32}+\frac{675}{32}=-\frac{675}{16}\right)m^2e^4 \\ +\left(1-1+1+\frac{1}{8}-\frac{91}{64}=-\frac{19}{64}\right)e^6+\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4}+\frac{29}{32}-\frac{11}{32}-\frac{3}{8}=\frac{3}{16}\right)e^2\gamma^4 \\ +\left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-1=0\right)e^4\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2cv \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{121}{16}m^4-\left(\frac{649}{24}+\frac{649}{24}=\frac{649}{12}\right)m^5 \\ +\left(\frac{27225}{2048}-\frac{42559}{576}-\frac{3481}{36}-\frac{42559}{576}+\frac{27225}{4096}=-\frac{919669}{4096}\right)m^6 \\ -\frac{225}{4}m^2e^2-36.m^2\varepsilon'^2+\left(\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+\frac{91}{48}=\frac{37}{48}\right)e^4 \end{array} \right\}$$

$$\cos 3cv \qquad e^3\left(\ 3 . e^2\right)$$

$$\cos 4cv \qquad e^4\left(\ 2\ \right)$$

$$\cos 5cv \qquad e^5\left(-3\ \right)$$

$$\cos 2gv - cv \qquad e\gamma^2\left(-\ e^2\ \right)$$

$$\cos 2gv + cv \qquad e\gamma^2\left(\ e^2\ \right)$$

$$\cos 2gv - 3cv \qquad e^3\gamma^2\left(\ 1\ \right)$$

$$\cos 2gv + 3cv \qquad e^3\gamma^2\left(-1\ \right)$$

$$\cos cv - c'mv \qquad e\varepsilon'\left\{\begin{array}{l} -12 . me^2 - \left(\frac{363}{32} + \frac{363}{32} = \frac{363}{16}\right) m^5 \\ -\left(\frac{649}{16} + \frac{649}{16} + \frac{649}{16} + \frac{649}{16} = \frac{649}{4}\right) m^6 \end{array}\right\}$$

$$\cos cv + c'mv \qquad e\varepsilon'\left\{\begin{array}{l} 12 . me^2 + \left(\frac{363}{32} + \frac{363}{32} = \frac{363}{16}\right) m^5 \\ +\left(\frac{649}{16} + \frac{649}{16} + \frac{649}{16} + \frac{649}{16} = \frac{649}{4}\right) m^6 \end{array}\right\}$$

$$\cos cv - 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\left(-9 . me^2\right)$$

$$\cos 2cv - c'mv \qquad e^2\varepsilon'\left(\ 9 + 9 = 18\right) me^2$$

$$\cos 2gv - c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^2\left\{\ 3 + 3 = 6\right\} me^2$$

$$\cos 3cv - c'mv \qquad e^3\varepsilon'\left(\ 12 . m\right)$$

$$\cos 3cv + c'mv \qquad e^3\varepsilon'\left(-12 . m\right)$$

$$\cos 2Ev - cv \qquad e\left\{\begin{array}{l} +\frac{11}{2} m^2 e^2 + \frac{59}{3} m^3 e^2 + \frac{1331}{512} m^6 + \left(\frac{7139}{384} + \frac{7139}{768} = \frac{7139}{256}\right) m^7 \\ +\left(\frac{2475}{64} - \frac{2475}{64} + \frac{3869}{72} + \frac{33}{4} + \frac{2475}{64} - \frac{2475}{128} = \frac{93683}{1152}\right) m^4 e^2 \\ -\frac{3}{4} me^2\gamma^2 - \left(\frac{45}{4} - \frac{45}{4} + \frac{135}{8} + \frac{45}{8} = \frac{45}{2}\right) me^4 + \left(\frac{99}{4} + \frac{99}{4} = \frac{99}{2}\right) m^4\varepsilon'^2 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev \left\{\begin{array}{l} -15.me^4-\left(\frac{33}{8}-\frac{33}{8}+\frac{1107}{16}+\frac{161}{16}=\frac{317}{4}\right)m^2e^4 \\ +\left(\frac{1815}{128}-\frac{1815}{128}+\frac{1815}{256}-\frac{1815}{128}=-\frac{1815}{256}\right)m^5e^2 \\ +\left(\frac{59}{4}-\frac{59}{4}-\frac{17595}{64}-\frac{45}{2}-\frac{653}{24}-\frac{3375}{64}=-\frac{36227}{96}\right)m^3e^4 \\ +\left(\frac{9}{16}-\frac{15}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}\right)me^2\gamma^4+\frac{75}{2}me^4\varepsilon'^2-\left(\frac{39}{4}-\frac{33}{4}+\frac{237}{4}-\frac{231}{4}=3\right)m^3e^2\varepsilon'^2 \\ +\left(\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{447}{32}+\frac{15}{2}+\frac{33}{32}=\frac{45}{2}\right)me^4\gamma^2 \\ +\left(\frac{135}{8}-\frac{405}{32}+\frac{105}{32}+5+\frac{455}{32}+\frac{135}{32}=\frac{495}{16}\right)me^6 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev+cv \quad e\left\{\begin{array}{l} -\frac{1331}{512}m^6-\frac{11}{2}m^2e^2-\frac{59}{3}m^3e^2 \\ -\left(\frac{2475}{64}+\frac{3869}{72}+\frac{33}{4}+\frac{2475}{64}=\frac{40127}{288}\right)m^4e^2+\frac{3}{4}me^2\gamma^2 \\ +\left(\frac{45}{4}+\frac{45}{2}+\frac{45}{4}=45\right)me^4-\left(\frac{99}{4}+\frac{99}{4}=\frac{99}{2}\right)m^4\varepsilon'^2 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev+c'mv \quad \varepsilon'\left\{\begin{array}{l} \frac{3993}{1024}m^7+15.me^4+\left(\frac{33}{2}+\frac{33}{2}=33\right)m^3e^2+\left(59+59=118\right)m^4e^2 \\ +\left\{\begin{array}{l} \frac{13035}{256}+\frac{3869}{24}+\frac{3869}{24}-\frac{54857}{256}-\frac{70587}{256}+\frac{1815}{256} \\ -\frac{5445}{128}-\frac{1815}{256}+\frac{5445}{256}+\frac{4235}{256}+\frac{2145}{256}=-\frac{43403}{384} \end{array}\right\}m^5e^2 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev-c'mv \quad \varepsilon'\left\{\begin{array}{l} -\frac{3993}{1024}m^7-35.me^4-\left(\frac{33}{2}+\frac{33}{2}=33\right)m^3e^2-\left(59+59=118\right)m^4e^2 \\ +\left\{\begin{array}{l} \frac{12705}{256}-\frac{3869}{24}-\frac{3869}{24}+\frac{54857}{256}+\frac{70587}{256}-\frac{2145}{256} \\ -\frac{12705}{256}-\frac{21175}{256}-\frac{1815}{256}-\frac{13035}{256}-\frac{5445}{128}=-\frac{577}{24} \end{array}\right\}m^5e^2 \end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev+c'mv-cv \quad e\varepsilon'\left\{\frac{5445}{256}+\frac{3993}{256}-\frac{1331}{512}+\frac{5445}{256}+\frac{9317}{1024}=\frac{46187}{1024}\right\}m^6$$

$$\cos 2Ev-c'mv-cv \quad e\varepsilon'\left\{\frac{3993}{256}-\frac{5445}{256}+\frac{9317}{512}-\frac{5445}{256}-\frac{1331}{1024}=-\frac{10285}{1024}\right\}m^6$$

$$\cos 2Ev-2c'mv-cv \quad e\varepsilon'^2\left\{-\frac{99}{8}-\frac{99}{8}=-\frac{99}{4}\right\}m^4$$

$\cos 2Ev - 2cv \quad e^2\left(\quad 15 . me^2\right)$

$\cos 2Ev + 2cv \quad e^2\left(\quad 15 . me^2\right)$

$\cos 2Ev - 3cv \quad e^3\left(-\frac{11}{2}\ m^2\ \right)$

$\cos 2Ev + 3cv \quad e^3\left(\ \frac{11}{2}\ m^2\ \right)$

$\cos 2Ev - 4cv \quad e^4\left(-15.\ \ m\ \right)$

$$\cos 4Ev - 2cv \quad e^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{121}{64}+\frac{121}{32}=\frac{363}{64}\right)m^4+\left(\frac{649}{48}+\frac{649}{24}=\frac{649}{16}\right)m^5 \\ +\left(\frac{1865}{32}+\frac{363}{128}-\frac{27225}{1024}+\frac{3481}{72}+\frac{42559}{576}=\frac{160527}{1024}\right)m^6\end{array}\right\}$$

$\cos 4Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon'\left\{-\frac{363}{64}-\frac{363}{32}=-\frac{1089}{64}\right\}m^5$

$\cos 4Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon'\left\{\ \frac{363}{64}+\frac{363}{32}\ =\ \frac{1089}{64}\right\}m^5.$

$$F(v)^5 = \left\{F(v)\right\}^3 \times \left\{F(v)\right\}^2 =$$

$$\sin cv \quad e\left\{\begin{array}{l}-\left(2+2=4\right)e^4+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{8}-\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{91}{96}-\frac{27}{16}+\frac{2}{3}+\frac{209}{96}=-\frac{89}{48}\right)e^6 \\ +\left(1+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{2}=5\right)e^4\gamma^2-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}\right)e^2\gamma^4 \\ -\left(18+36+36=90\right)m^2e^2\varepsilon'^2 \\ -\left(3+\frac{261}{8}+\frac{225}{4}+\frac{225}{4}+\frac{675}{16}+\frac{675}{16}+3+\frac{9}{2}=240\right)m^2e^4 \\ -\left(\frac{121}{32}+\frac{121}{16}+\frac{121}{16}+\frac{363}{64}+\frac{363}{64}=\frac{121}{4}\right)m^4e^2\end{array}\right.$$

$\sin 2cv \qquad e^2\left(\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}=\frac{15}{4}\right)e^4$

$\sin 3cv \qquad e^3\left(\ \ 2e^2\right)$

$\sin 5cv \qquad e^5\left(-2\ \ \right)$

$\sin 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon'\left(\ \ 6+6+12=24\right)me^2$

$$\sin 2Ev \left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{11}{4}+\frac{11}{4}+\frac{33}{8}+\frac{33}{8}=\frac{55}{4}\right)m^2e^4-\left(\frac{59}{6}+\frac{59}{6}+\frac{59}{4}+\frac{59}{4}=\frac{295}{6}\right)m^3e^4 \\ +\left(\frac{45}{4}+\frac{135}{16}+\frac{45}{4}+\frac{45}{16}+\frac{45}{4}-\frac{135}{16}+\frac{45}{4}+\frac{135}{8}+\frac{135}{16}=\frac{585}{8}\right)me^6 \\ +\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{9}{16}+\frac{9}{16}=\frac{15}{8}\right)me^4\gamma^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev - cv \quad e\left(-\frac{15}{2}-\frac{15}{2}-\frac{45}{4}-\frac{45}{4}=-\frac{75}{2}\right)me^4$$

$$\sin 2Ev + cv \quad e\left(\quad 15+\frac{15}{2}+\frac{15}{2}=30\right)me^4.$$

$$\left\{F(v)\right\}^6=\left\{F(v)\right\}^3\times\left\{F(v)\right\}^3=$$

$$\cos cv \quad e\left(\quad 6-6-\frac{9}{2}=-\frac{9}{2}\right)e^6$$

$$\cos 2cv \quad e^2\left(-2-4=-6\right)e^4$$

$$\cos 2Ev \quad \left(-30-\frac{45}{2}-\frac{45}{2}=-75\right)me^6.$$

$$\left\{F(v)\right\}^7=\left\{F(v)\right\}^4\times\left\{F(v)\right\}^3=2e^4\cos 4cv\times 2e^3\sin 3cv=\sin cv \quad e\left(-2.e^6\right).$$

$$-F(nt)+\frac{1}{2}\frac{d.F\overline{(nt)}^2}{ndt}-\frac{1}{2.3}\frac{d^2.F\overline{(nt)}^3}{n^2dt^2}+\ldots-\frac{1}{2.3\ldots7}\frac{d^6.F\overline{(nt)}^7}{n^6dt^6}=$$

$$\sin c.nt \quad e \left\{\begin{array}{l} 2+\frac{3}{2}m^2-\left(\frac{165}{64}-\frac{45}{32}=\frac{75}{64}\right)m^3-\left(\frac{637}{128}+\frac{5143}{256}+\frac{121}{192}=\frac{19735}{768}\right)m^4 \\ -\frac{1}{2}\gamma^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}\right)e^2-\left(\frac{137413}{6144}+\frac{431329}{4096}-\frac{495}{256}+\frac{649}{144}=\frac{4801303}{36864}\right)m^5 \\ -\left(\frac{146597}{24576}+\frac{65579597}{147456}-\frac{15429}{1024}-\frac{37125}{2048}+\frac{15283}{768}-\frac{121}{128}=\frac{64359347}{147456}\right)m^6 \\ -\left(\frac{297}{32}-\frac{5}{8}+\frac{9}{16}+\frac{87}{16}-\frac{1}{2}=\frac{453}{32}\right)m^2e^2 \\ + \quad -\left(\frac{5415}{128}+\frac{885}{512}+\frac{675}{128}+\frac{22275}{512}-\frac{75}{16}-\frac{55}{128}=\frac{11225}{128}\right)m^3e^2 \end{array}\right\}$$

$$
\sin c.nt\; e \left\{\begin{array}{l}
-\left\{\begin{array}{l} \frac{775721}{4096}+\frac{307809}{4096}+\frac{15}{32}+\frac{12213}{512}+\frac{1643801}{6144} \\ -\frac{261}{32}-\frac{1345}{128}-\frac{1195}{384}-\frac{121}{120}=\frac{4098181}{7680}\end{array}\right\} m^4 e^2 \\
-\left(\frac{297}{128}-\frac{45}{128}=\frac{63}{32}\right)m^2\gamma^2+\left(\frac{15}{16}+\frac{1161}{256}+\frac{11}{64}=\frac{1445}{256}\right)m^3\gamma^2 \\
+\left(\frac{47545}{4096}+\frac{127511}{4096}-\frac{135}{512}+\frac{185}{128}=\frac{22487}{512}\right)m^4\gamma^2-\left(\frac{27}{4}+3=\frac{39}{4}\right)m^2\varepsilon'^2 \\
-\frac{6455}{64}m^3\varepsilon'^2-\left(\frac{353705}{512}-\frac{81}{16}-\frac{11207}{128}-\frac{9}{2}=\frac{303981}{512}\right)m^4\varepsilon'^2 \\
+E'^2\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{165}{32}m^3-\frac{147}{256}m^4\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{32}+\frac{1}{48}=\frac{35}{96}\right)\gamma^4 \\
+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{48}+\frac{1}{30}=\frac{21}{80}\right)e^4+\left(\frac{15}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{15}{16}\right)e^2\gamma^2+\frac{135}{256}m\gamma^4 \\
+\left(\frac{227}{256}+\frac{1479}{2048}+\frac{9}{128}+\frac{349}{3072}+\frac{1}{32}=\frac{11207}{6144}\right)m^2\gamma^4 \\
+\left(\frac{2369}{512}-\frac{4441}{768}-\frac{3}{16}+\frac{9}{32}+\frac{5401}{2048}+\frac{1}{32}-\frac{1}{4}-\frac{225}{128}+2-\frac{1}{10}=\frac{46043}{30720}\right)m^2e^4 \\
+\frac{45}{16}m^2E'^4-\left(\frac{1215}{64}+\frac{135}{16}=\frac{1755}{64}\right)m^2\varepsilon'^4-\left(\frac{25}{16}+\frac{25}{12}=\frac{175}{48}\right)\varepsilon'^2b^4 \\
-\left(\frac{225}{64}+\frac{75}{64}-\frac{135}{128}=\frac{465}{128}\right)m^2b^4-\left(\frac{135}{64}+\frac{135}{128}=\frac{405}{128}\right)me^2\gamma^2 \\
+\left(\frac{1447}{64}-\frac{3145}{1024}+\frac{3}{16}+\frac{9}{8}+\frac{9087}{1024}-\frac{3}{8}-1-\frac{15}{16}=\frac{14035}{512}\right)m^2e^2\gamma^2 \\
-\frac{453}{128}m^2E'^2\gamma^2+\left(\frac{2981}{128}+\frac{855}{64}=\frac{4691}{128}\right)m^2\varepsilon'^2\gamma^2 \\
-\left(\frac{27}{64}+\frac{27}{32}+\frac{4369}{192}-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1081}{48}\right)m^2e^2\varepsilon'^2 \\
-\left(\frac{225}{16}+\frac{9}{8}-\frac{15}{16}=\frac{57}{4}\right)m^2e^2E'^2-\left(\frac{45}{128}-\frac{5}{192}=\frac{125}{384}\right)\gamma^6 \\
+\left(\frac{9}{64}-\frac{13}{6912}+\frac{89}{5760}+\frac{1}{160}-\frac{19}{1536}-\frac{1}{2520}=\frac{71453}{483840}\right)e^6 \\
+\left(\frac{37}{128}+\frac{275}{256}-\frac{47}{768}+\frac{1}{192}+\frac{1}{128}=\frac{505}{384}\right)e^2\gamma^4 \\
-\left(\frac{85}{192}-\frac{85}{192}+\frac{5}{8}+\frac{1}{24}=\frac{2}{3}\right)e^4\gamma^2 \\
+\left\{\begin{array}{l}\frac{21}{4}m^2+\frac{165}{32}m^3-\frac{7167}{256}m^4+\frac{501}{128}m^2\gamma^2+\frac{75}{16}b^4 \\ +\left(\frac{5619}{256}+\frac{63}{32}-\frac{21}{8}=\frac{5451}{256}\right)m^2e^2+\frac{105}{16}m^2(\varepsilon'^2+E'^2)\end{array}\right\}(\varepsilon'^2-E'^2)
\end{array}\right\}
$$

$$\sin 2c.nt\; e^2 \left\{ \begin{array}{l}
\left(2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}\right) + \left(3 - \frac{3}{2} - \frac{1}{16} = \frac{23}{16}\right) m^2 - \left(1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}\right) \gamma^2 \\
+ \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{8} = \frac{29}{24}\right) e^2 + \frac{135}{128} m\gamma^2 + \left(\frac{405}{64} + \frac{825}{128} - \frac{225}{16} - \frac{165}{16} = -\frac{1485}{128}\right) m^3 \\
+ \left(\frac{2577}{64} + \frac{5341}{256} - \frac{4071}{64} - \frac{9}{4} - \frac{10165}{128} - \frac{121}{48} = -\frac{66559}{768}\right) m^4 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{506335}{8192} + \frac{671823}{4096} - \frac{2475}{512} - \frac{675}{32} - \frac{265493}{1024} \\ - \frac{1289059}{3072} + \frac{495}{32} - \frac{649}{36} = - \frac{35503355}{73728} \end{array} \right\} m^5 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{525476519}{491520} - \frac{4495817}{2949120} - \frac{16023}{1024} - \frac{185625}{4096} - \frac{12213}{128} - \frac{12822631}{12288} \\ - \frac{1573016723}{884736} + \frac{30495}{256} + \frac{37125}{256} - \frac{919669}{12288} + \frac{363}{64} = - \frac{15175956299}{8847360} \end{array} \right\} m^6 \\
+ \left(\frac{807}{256} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 3 - \frac{13421}{768} + \frac{979}{96} - \frac{75}{4} = -\frac{591}{24}\right) m^2 e^2 \\
+ \left(\frac{75}{64} + 3 + \frac{3}{4} - \frac{1425}{256} + \frac{45}{32} = \frac{195}{256}\right) m^2 \gamma^2 + \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{32} = \frac{141}{32}\right) m^2 E'^2 \\
+ \left(\frac{81}{16} - \frac{9}{4} - \frac{45}{2} - 12 = -\frac{507}{16}\right) m^2 \varepsilon'^2 + \frac{21}{2} m^2 \left(\varepsilon'^2 - E'^2\right) \\
+ \left(\frac{227}{384} - \frac{3}{64} - \frac{47}{128} + \frac{37}{144} - \frac{1}{2} + \frac{4}{15} = \frac{289}{1440}\right) e^4 + \left(\frac{23}{12} - \frac{7}{6} - \frac{7}{64} = \frac{123}{192}\right) e^2 \gamma^2 \\
- \left(\frac{37}{64} + \frac{9}{64} + \frac{11}{32} = \frac{17}{16}\right) \gamma^4
\end{array} \right.$$

$$\sin 3c.nt\; e^3 \left\{ \begin{array}{l}
\left(3 + \frac{1}{3} - \frac{9}{4} = \frac{13}{12}\right) + \left(\frac{27}{16} - \frac{17}{48} - \frac{15}{8} + \frac{27}{4} - \frac{9}{2} = \frac{41}{24}\right) m^2 \\
+ \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{32} - \frac{209}{64} + \frac{27}{8} - \frac{27}{20} = -\frac{327}{320}\right) e^2 + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{23}{16}\right) \gamma^2
\end{array} \right\}$$

$$\sin 4c.nt\; e^4 \left(\frac{91}{48} - \frac{5}{32} - 6 + \frac{16}{3} = \frac{103}{96} \right)$$

$$\sin 5c.nt\; e^5 \left(\frac{3}{40} - \frac{45}{32} + \frac{1475}{192} - \frac{125}{8} + \frac{125}{12} = \quad \frac{1097}{960} \right)$$

$$\sin g.nt - f.nt \;\; \gamma \frac{D^2}{a^2} \left(\Psi - K_{(2)}\right) \left(\frac{19}{3} . m^{-2} + \frac{13}{8} . m^{-1} \right) \sin 2\omega$$

$$\sin 2g.nt\; \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l}
- \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \gamma^2 - \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3} - \frac{15}{16} = \frac{43}{48}\right) e^2 + \frac{11}{16} m^2 + \left(\frac{135}{16} - \frac{405}{128} = \frac{675}{128}\right) m e^2 \\
- \left(\frac{33}{128} + \frac{99}{128} = \frac{33}{32}\right) m^3 - \left(\frac{449}{512} + \frac{345}{256} - \frac{121}{384} = \frac{2933}{1536}\right) m^4
\end{array} \right\}$$

$$\sin 4g.nt \qquad \gamma^4 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32} \right)$$

$$\sin 2g.nt - c.nt \qquad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} - \left(1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \right) + \frac{135}{32} m + \left(\frac{1331}{256} - \frac{199}{128} + \frac{9}{16} = \frac{1077}{256} \right) m^2 \\ + \left(\frac{19131}{2048} + \frac{207}{128} - \frac{627}{512} + \frac{363}{512} = \frac{21387}{2048} \right) m^3 - \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8} \right) \gamma^2 \\ + \left(\frac{55}{32} - \frac{23}{32} + \frac{67}{96} - \frac{1}{24} = \frac{53}{32} \right) e^2 + \frac{405}{128} m \gamma^2 + \frac{585}{64} m \varepsilon'^2 \\ - \left(\frac{135}{8} + \frac{45}{16} - \frac{675}{128} = \frac{1845}{128} \right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2g.nt + c.nt \qquad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} \right) m^2 \\ + \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{8} \right) \gamma^2 - \left(\frac{5}{8} - \frac{9}{2} + \frac{105}{16} - \frac{9}{8} = \frac{25}{16} \right) e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2g.nt - 2c.nt \quad e^2\gamma^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{135}{64} m \right)$$

$$\sin 2g.nt + 2c.nt \quad e^2\gamma^2 \left(\frac{11}{8} - 2 - \frac{3}{16} = -\frac{13}{16} \right)$$

$$\sin 2g.nt - 3c.nt \quad e^3\gamma^2 \left\{ \left(\frac{9}{32} + \frac{11}{24} - \frac{13}{32} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24} \right) - \left(\frac{135}{32} - \frac{135}{256} - \frac{135}{64} = \frac{405}{256} \right) m \right\}$$

$$\sin 2g.nt + 3c.nt \quad e^3\gamma^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{155}{96} + \frac{175}{32} - \frac{125}{24} = -\frac{59}{48} \right)$$

$$\sin 4g.nt - c.nt \qquad e\gamma^4 \left(\frac{15}{32} - \frac{9}{64} - \frac{9}{64} = \frac{3}{16} \right)$$

$$\sin 4g.nt + c.nt \qquad e\gamma^4 \left(\frac{3}{64} - \frac{5}{16} + \frac{25}{64} = \frac{1}{8} \right)$$

$$\sin c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} - 3.m + \frac{735}{16} m^3 + \frac{1261}{4} m^4 + \left(\frac{572357}{384} - \frac{363}{128} = \frac{142817}{96} \right) m^5 \\ + \left(\frac{3273241}{576} - \frac{649}{24} = \frac{3257665}{576} \right) m^6 \\ + \left(\frac{973306967}{55296} - \frac{247615}{1536} + \frac{121}{128} = \frac{964444099}{55296} \right) m^7 - \frac{27}{8} m e^2 - \frac{2925}{32} m^2 e^2 \\ - \left(\frac{444943}{512} + \frac{63}{2} - 2 = \frac{460047}{512} \right) m^3 e^2 - \left(\frac{37759097}{6144} + \frac{73455}{256} = \frac{39522017}{6144} \right) m^4 e^2 \\ + \left(\frac{7087468819}{294912} - \frac{2155905}{1024} - \frac{357}{16} = \frac{6459987955}{294912} \right) m^5 e^2 \\ - \frac{27}{8} m \varepsilon'^2 + \gamma^2 \left(\frac{27}{8} m - \frac{117}{32} m^2 - \frac{19097}{512} m^3 \right) \end{array} \right\}$$

$$\sin 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2 \left\{ -\frac{9}{4}m + \left(\frac{5175}{128} + \frac{9}{2} = \frac{5751}{128}\right)m^3 + \frac{13871}{32}m^4 - \frac{81}{32}me^2 + \frac{81}{32}m\gamma^2 - \frac{7}{4}m\varepsilon'^2 \right\}$$

$$\sin 3c'm.nt \qquad \varepsilon'^3\left(-\frac{53}{24}m\right)$$

$$\sin 4c'm.nt \qquad \varepsilon'^4\left(-\frac{77}{32}m\right)$$

$$\sin c.nt + c'm.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{aligned} &-\left(3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}\right)m - \left(3 + \frac{621}{32} = \frac{717}{32}\right)m^2 \\ &-\left(\frac{18135}{128} - \frac{4987}{128} - \frac{9}{4} = \frac{3215}{32}\right)m^3 \\ &+\left(\frac{204325}{768} - \frac{2061269}{2048} + \frac{4987}{128} + \frac{675}{32} + \frac{33}{32} = -\frac{4173895}{6144}\right)m^4 \\ &+\left\{ \begin{aligned} &\frac{90939253}{73728} - \frac{91899031}{24576} + \frac{204325}{768} - \frac{14961}{512} \\ &+\frac{365}{96} + \frac{33}{16} + \frac{121}{128} + \frac{12213}{128} = -\frac{1248127}{576} \end{aligned} \right\} m^5 \\ &+\left\{ \begin{aligned} &\frac{510303229}{110592} - \frac{9451141309}{589824} + \frac{90939253}{73728} \\ &-\frac{204325}{1024} - \frac{1122075}{4096} + \frac{796479}{2048} + \frac{1312561}{24576} \\ &+\frac{365}{48} - \frac{33}{64} + \frac{649}{96} + \frac{363}{128} = -\frac{18031654487}{1769472} \end{aligned} \right\} m^6 \\ &-\left(\frac{81}{32} + \frac{27}{8} = \frac{189}{32}\right)m\varepsilon'^2 + \left(\frac{81}{16} + \frac{33}{8} = \frac{147}{16}\right)m\gamma^2 \\ &+\left(\frac{9}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{135}{32} = -\frac{107}{32}\right)me^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin c.nt - 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{27}{16} + \frac{9}{4} = \frac{63}{16}\right)m + \left(\frac{5211}{128} - \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \frac{9}{4} = \frac{5355}{128}\right)m^2 \\ &+\left(\frac{88353}{256} + \frac{3225}{256} - \frac{27}{4} - \frac{27}{16} - 9 = \frac{43557}{128}\right)m^3 \\ &+\left(\frac{21}{16} + \frac{7}{4} = \frac{49}{16}\right)m\varepsilon'^2 - \left(\frac{243}{64} + \frac{99}{32} = \frac{441}{64}\right)m\gamma^2 \\ &-\left(\frac{405}{128} - \frac{27}{32} + \frac{9}{16} - \frac{3}{8} = \frac{321}{128}\right)me^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin c.nt + 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{aligned} &-\left(\frac{27}{16} + \frac{9}{4} = \frac{63}{16}\right)m - \left(\frac{1389}{128} - \frac{27}{8} + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1245}{128}\right)m^2 \\ &-\left(\frac{15159}{128} - \frac{15335}{256} - \frac{27}{4} - \frac{27}{16} - 9 = \frac{10519}{256}\right)m^3 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin c.nt - c'm.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(3+\frac{9}{4}=\frac{21}{4}\right) m + \left(\frac{1329}{32} - 3 = \frac{1233}{32}\right) m^2 \\ + \left(\frac{37035}{128} - \frac{6417}{128} - \frac{9}{4} = \frac{15165}{64}\right) m^3 \\ + \left(\frac{3599473}{2048} - \frac{25007}{64} - \frac{675}{32} + \frac{6417}{128} - \frac{1727}{384} = \frac{8548531}{6144}\right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{83498905}{8192} - \frac{53428201}{24576} - \frac{12213}{128} + \frac{25007}{64} \\ + \frac{19251}{512} - \frac{178945}{4608} + \frac{1727}{64} - \frac{121}{128} = \frac{307403875}{36864} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{353296128 41}{589824} - \frac{1516059467}{147456} - \frac{796479}{2048} \\ + \frac{75021}{256} + \frac{53428201}{24576} + \frac{1443825}{4096} - \frac{38180261}{221184} \\ + \frac{178945}{2304} + \frac{1727}{256} - \frac{649}{96} + \frac{363}{128} = \frac{91934055527}{1769472} \end{array} \right\} m^6 \\ + \left(\frac{81}{32} + \frac{27}{8} = \frac{189}{32}\right) m \varepsilon'^2 - \left(\frac{81}{16} + \frac{33}{8} = \frac{147}{16}\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{135}{32} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{9}{8} = \frac{107}{32}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin c.nt - 3c'm.nt \quad e\varepsilon'^3 \left\{ \frac{53}{32} + \frac{53}{24} = \frac{371}{96} \right\} m$$

$$\sin c.nt + 3c'm.nt \quad e\varepsilon'^3 \left\{ -\frac{53}{32} - \frac{53}{24} = -\frac{371}{96} \right\} m$$

$$\sin 2c.nt - c'm.nt \quad e^2\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(6 + \frac{9}{4} - \frac{27}{16} = \frac{105}{16}\right) m + \left(\frac{1329}{16} - \frac{3639}{128} - \frac{9}{8} - 6 = \frac{6081}{128}\right) m^2 \\ + \left(\frac{160101}{256} - \frac{99127}{512} - \frac{1329}{32} - \frac{27}{16} - \frac{3477}{32} - \frac{15}{2} = \frac{139475}{512}\right) m^3 \\ + \left(\frac{81}{32} + \frac{27}{4} - \frac{243}{128} = \frac{945}{128}\right) m\varepsilon'^2 - \left(\frac{273}{32} + \frac{39}{4} - \frac{225}{64} = \frac{945}{64}\right) m\gamma^2 \\ + \left(\frac{9}{16} - \frac{213}{32} + \frac{37}{4} + 6 - \frac{16}{5} = \frac{953}{160}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2c.nt + c'm.nt \quad e^2\varepsilon' \left\{ -\left(6 + \frac{9}{4} - \frac{27}{16} = \frac{105}{16}\right) m + \left(\frac{2211}{128} - \frac{621}{16} - \frac{9}{8} - 6 = -\frac{3669}{128}\right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2c.nt + 2c'm.nt \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{81}{64} - \frac{27}{16} - \frac{9}{2} = -\frac{315}{64} \right\} m$$

$$\sin 2c.nt - 2c'm.nt \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{81}{64} + \frac{27}{16} + \frac{9}{2} = \frac{315}{64} \right\} m$$

$$\sin 3c.nt+c'm.nt \quad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{195}{32}-\frac{9}{8}-\frac{27}{2}=-\frac{273}{32} \right\} m$$

$$\sin 3c.nt-c'm.nt \quad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{195}{32}+\frac{9}{8}+\frac{27}{2} = \frac{273}{32} \right\} m$$

$$\sin 2g.nt-c'm.nt \quad \varepsilon'\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{3}{16}\right)m+\left(\frac{75}{128}+\frac{3}{8}=\frac{123}{128}\right)m^2 \\ +\left(\frac{2973}{256}-\frac{9}{16}-\frac{1177}{512}=\frac{4481}{512}\right)m^3-\left(\frac{27}{32}-\frac{81}{128}=\frac{27}{128}\right)m\varepsilon'^2 \\ +\left(\frac{39}{32}-\frac{9}{16}=\frac{21}{32}\right)m\gamma^2+\left(\frac{243}{32}-9+2-\frac{63}{64}=-\frac{25}{64}\right)me^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2g.nt+c'm.nt \quad \varepsilon'\gamma^2 \left\{ \left(\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{3}{16}\right)m+\frac{153}{128}m^2 \right\}$$

$$\sin 2g.nt+2c'm.nt \quad \varepsilon'^2\gamma^2 \left\{ \frac{9}{16}-\frac{27}{64} = \frac{9}{64} \right\} m$$

$$\sin 2g.nt-2c'm.nt \quad \varepsilon'^2\gamma^2 \left\{ \frac{27}{64}-\frac{9}{16}=-\frac{9}{64} \right\} m$$

$$\sin 2g.nt-c.nt+c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{75}{32}-\frac{27}{8}-\frac{3}{8}=-\frac{45}{32} \right\} m$$

$$\sin 2g.nt-c.nt-c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{75}{32}+\frac{27}{8}+\frac{3}{8} = \frac{45}{32} \right\} m$$

$$\sin 2g.nt+c.nt+c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{32}-\frac{63}{32}+\frac{27}{8} = \frac{27}{16} \right\} m$$

$$\sin 2g.nt+c.nt-c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{32}+\frac{63}{32}-\frac{27}{8}=-\frac{27}{16} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{8}m^2+\frac{59}{12}m^3+\frac{893}{72}m^4+\frac{2855}{108}m^5 \\ +\left(\frac{4133959}{82944}+\frac{3113}{2048}-\frac{1331}{3072}=\frac{8448197}{165888}\right)m^6 \\ +\left(\frac{202916651}{2488320}+\frac{214891}{15360}-\frac{3113}{2048}-\frac{7139}{1536}+\frac{1331}{1536}=\frac{112268869}{1244160}\right)m^7 \\ +\left\{ \begin{array}{l} \frac{2698719631}{18662400}+\frac{34526749}{460800}-\frac{214891}{15360} \\ -\frac{261217}{9216}+\frac{7139}{768}-\frac{1331}{3072}=\frac{6944775701}{37324800} \end{array} \right\} m^8 \\ +\left(\frac{15}{2}-\frac{45}{16}=\frac{75}{16}\right)me^2+\left(\frac{317}{8}-\frac{603}{64}-\frac{15}{2}-\frac{11}{3}=\frac{3655}{192}\right)m^2e^2 \\ +\left(\frac{58009}{384}-\frac{33769}{1024}-\frac{317}{8}-\frac{118}{9}+\frac{22}{3}=\frac{669863}{9216}\right)m^3e^2 \end{array} \right\}$$

$+$

$$
\sin 2E.nt \left\{
\begin{aligned}
&+\left(\frac{2346011}{4608}-\frac{1185143}{12288}-\frac{58009}{384}-\frac{88931}{1728}+\frac{236}{9}-\frac{11}{3}=\frac{25660537}{110592}\right)m^4e^2\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{40870007}{27648}-\frac{68760677}{294912}-\frac{2346011}{4608}+\frac{88931}{864}\\ &-\frac{41285999}{165888}-\frac{118}{9}-\frac{605}{256}=\frac{1524920035}{2654208}\end{aligned}\right\}m^5e^2\\
&-\frac{3}{16}m\gamma^2-\frac{47}{64}m^2\gamma^2-\frac{5149}{3072}m^3\gamma^2-\frac{91745}{36864}m^4\gamma^2\\
&-\left(\frac{859889}{884736}+\frac{2301}{4096}-\frac{1089}{6144}=\frac{1200089}{884736}\right)m^5\gamma^2-\frac{55}{16}m^2\varepsilon'^2\\
&-\left(\frac{295}{24}+\frac{67}{4}=\frac{697}{24}\right)m^3\varepsilon'^2-\left(\frac{5491}{144}+\frac{649}{8}-\frac{67}{4}+\frac{33}{4}=\frac{15949}{144}\right)m^4\varepsilon'^2\\
&-\left(\frac{19729}{256}+\frac{7273}{96}-\frac{649}{8}+\frac{59}{2}-\frac{33}{2}=\frac{65051}{768}\right)m^5\varepsilon'^2\\
&+\left(\frac{45}{64}-\frac{615}{64}+\frac{75}{4}-5=\frac{155}{32}\right)me^4+\left(\frac{9}{64}-\frac{9}{64}=0\right)m\gamma^4\\
&+\left(\frac{15}{8}-\frac{3249}{128}+\frac{615}{64}+\frac{5641}{96}-\frac{75}{2}-\frac{317}{12}+15+\frac{11}{6}=-\frac{853}{384}\right)m^2e^4\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{129779}{2048}-\frac{624685}{2048}+\frac{3249}{128}+\frac{138061}{384}-\frac{5641}{48}\\ &+\frac{75}{4}-\frac{36227}{288}+\frac{317}{4}-15+\frac{59}{6}-\frac{22}{3}=-\frac{134053}{9216}\end{aligned}\right\}m^3e^4\\
&+\left(\frac{39}{128}+\frac{55}{128}+\frac{9}{64}-\frac{11}{192}=\frac{157}{192}\right)m^2\gamma^4\\
&+\left(\frac{2577}{2048}+\frac{4799}{6144}-\frac{55}{128}-\frac{59}{288}+\frac{11}{96}=\frac{14003}{9216}\right)m^3\gamma^4+\frac{143}{128}m^2\varepsilon'^4\\
&-\left(\frac{825}{64}-\frac{767}{192}=\frac{427}{48}\right)m^3\varepsilon'^4+\left(\frac{125}{1024}+\frac{225}{128}=\frac{1925}{1024}\right)m^2b^4\\
&+\left(\frac{1575}{2048}+\frac{5805}{256}-\frac{225}{128}=\frac{44415}{2048}\right)m^3b^4+\left(\frac{39}{16}-\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{73}{16}\right)me^2\gamma^2\\
&+\left(\frac{641}{64}-\frac{705}{16}+\frac{15}{2}+\frac{91}{24}-1=-\frac{4561}{192}\right)m^2e^2\gamma^2\\
&+\left(\frac{263633}{6144}-\frac{7051}{128}+\frac{705}{16}+\frac{7795}{576}-\frac{91}{12}+\frac{1}{2}=\frac{706595}{18432}\right)m^3e^2\gamma^2\\
&-\left(\frac{75}{4}-\frac{225}{32}=\frac{375}{32}\right)me^2\varepsilon'^2+\left(\frac{1035}{64}-\frac{205}{4}+\frac{75}{4}-\frac{295}{6}-\frac{3}{4}=-\frac{12719}{192}\right)m^2e^2\varepsilon'^2\\
&-\left(\frac{110449}{2048}-\frac{83545}{768}-\frac{205}{4}+\frac{27691}{72}-\frac{395}{3}+1=\frac{2724769}{18432}\right)m^3e^2\varepsilon'^2\\
&+\frac{135}{16}m^3e^2E'^2+\frac{15}{32}m\varepsilon'^2\gamma^2+\left(\frac{149}{64}+\frac{15}{8}=\frac{269}{64}\right)m^2\varepsilon'^2\gamma^2
\end{aligned}
\right\}
$$

+

$$
\sin 2E.nt \left\{
\begin{aligned}
&+\left(\frac{18485}{2048}+\frac{909}{32}-\frac{15}{8}+\frac{9}{8}=\frac{75125}{2048}\right)m^3\varepsilon'^2\gamma^2 \\
&+\left(\frac{45}{128}+\frac{45}{128}=\frac{45}{64}\right)m\varepsilon'^2\gamma^4-\frac{39}{256}m\gamma^2\varepsilon'^4+\left(\frac{195}{32}-\frac{585}{256}=\frac{975}{256}\right)me^2\varepsilon'^4 \\
&+\left(\frac{75}{4}-\frac{5}{4}-\frac{195}{32}=\frac{365}{32}\right)me^2\varepsilon'^2\gamma^2+\left(\frac{865}{128}-\frac{1809}{1024}-\frac{705}{256}+\frac{1}{16}=\frac{2355}{1024}\right)me^2\gamma^4 \\
&+\left(\frac{585}{32}-\frac{3531}{1024}-\frac{2863}{128}+\frac{15}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{291}{1024}\right)me^4\gamma^2-\frac{45}{128}m\gamma^2b^4 \\
&+\left(\frac{3075}{128}-\frac{225}{128}-\frac{375}{8}+\frac{25}{2}=-\frac{775}{64}\right)me^4\varepsilon'^2+\left(\frac{105}{16}-\frac{315}{128}=\frac{525}{128}\right)me^2b^4 \\
&+\left(\frac{75}{16}-\frac{225}{128}=\frac{375}{128}\right)m\varepsilon'^2b^4+\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{256}-\frac{15}{128}=\frac{19}{256}\right)m\gamma^6 \\
&+\left(\frac{45}{128}-\frac{75}{32}-\frac{345}{384}+\frac{165}{16}-\frac{39}{4}+\frac{10}{3}=\frac{193}{192}\right)me^6 \\
&+\left\{\frac{33}{8}m^4+\frac{175}{16}m^5-\frac{27}{32}m^3\gamma^2+\left(\frac{855}{16}-\frac{405}{32}=\frac{1305}{32}\right)m^3e^2\right\}(\varepsilon'^2-E'^2)
\end{aligned}
\right\}.
$$

$$
+\ \sin(2E.nt-c.nt)\ e \left\{
\begin{aligned}
&\frac{15}{4}m+\left(\frac{285}{16}-\frac{11}{8}=\frac{263}{16}\right)m^2+\left(\frac{17347}{256}-\frac{59}{12}+\frac{11}{4}=\frac{50377}{768}\right)m^3 \\
&+\left(\frac{672197}{3072}-\frac{3869}{288}+\frac{59}{6}-\frac{33}{32}=\frac{1973903}{9216}\right)m^4 \\
&+\left(\frac{43889975}{73728}-\frac{394141}{13824}+\frac{3869}{144}-\frac{59}{16}-\frac{2475}{256}-\frac{605}{512}=\frac{128091077}{221184}\right)m^5 \\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{1228198339}{884736}-\frac{4220807}{165888}+\frac{394141}{6912}-\frac{3869}{384}-\frac{4425}{128}\\&-\frac{44781}{1024}-\frac{176341}{12288}+\frac{1331}{12288}+\frac{605}{128}=\frac{3508583689}{2654208}\end{aligned}\right\}m^6 \\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{474026836703}{424673280}+\frac{2220303871}{39813120}+\frac{4220807}{82944}-\frac{394141}{18432}\\&-\frac{96725}{1024}-\frac{80063}{512}-\frac{2920423}{16384}-\frac{6655}{1024}-\frac{49329391}{491520}\\&+\frac{176341}{3072}+\frac{7139}{6144}-\frac{1331}{2048}=\frac{921705798749}{1274019840}\end{aligned}\right\}m^7 \\
&+\left(\frac{45}{8}-\frac{15}{8}-\frac{5}{2}=\frac{5}{4}\right)me^2 \\
&+\left(\frac{923}{64}-\frac{405}{64}-\frac{45}{4}-\frac{791}{64}+10+\frac{11}{48}=-\frac{1015}{192}\right)m^2e^2 \\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{621599}{6144}-\frac{5843}{64}-\frac{923}{32}+\frac{135}{32}-\frac{240497}{4608}\\&+\frac{791}{16}-\frac{55}{4}+\frac{59}{72}-\frac{11}{8}=-\frac{195437}{6144}\end{aligned}\right\}m^3e^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$\sin 2E.nt-c.nt\; e\left\{\begin{aligned}
&+\left\{\begin{aligned}&\tfrac{39489835}{73728}-\tfrac{1802197}{3072}-\tfrac{621599}{3072}+\tfrac{2769}{256}\\&+\tfrac{10125}{256}+\tfrac{33}{64}-\tfrac{7451543}{36864}+\tfrac{240497}{1152}-\tfrac{2645467}{9216}\\&-\tfrac{885}{32}-\tfrac{59}{12}+\tfrac{93683}{27648}+\tfrac{209}{64}=-\tfrac{112547225}{221184}\end{aligned}\right\}m^4e^2\\
&-\left(\tfrac{21}{8}-\tfrac{3}{16}=\tfrac{39}{16}\right)m\gamma^2-\left(\tfrac{513}{32}-\tfrac{69}{64}+\tfrac{3}{8}=\tfrac{981}{64}\right)m^2\gamma^2\\
&-\left(\tfrac{37575}{512}-\tfrac{3119}{1024}+\tfrac{69}{32}-\tfrac{9}{64}=\tfrac{74095}{1024}\right)m^3\gamma^2\\
&-\left\{\begin{aligned}&\tfrac{294983}{1024}-\tfrac{89383}{12288}+\tfrac{3119}{512}-\tfrac{207}{256}\\&-\tfrac{675}{512}-\tfrac{33}{16}-\tfrac{165}{512}=\tfrac{3469829}{12288}\end{aligned}\right\}m^4\gamma^2\\
&-\tfrac{75}{8}m\varepsilon'^2-\left(\tfrac{165}{8}+\tfrac{245}{16}=\tfrac{575}{16}\right)m^2\varepsilon'^2\\
&+\left(\tfrac{133123}{512}-\tfrac{7469}{96}+\tfrac{245}{8}+\tfrac{8}{3}=\tfrac{331001}{1536}\right)m^3\varepsilon'^2\\
&+\left\{\begin{aligned}&\tfrac{11901187}{3072}-\tfrac{6923}{72}+\tfrac{7469}{48}-\tfrac{735}{64}\\&-\tfrac{99}{64}+\tfrac{589}{64}-\tfrac{32}{3}+\tfrac{33}{16}=\tfrac{36136889}{9216}\end{aligned}\right\}m^4\varepsilon'^2\\
&-\tfrac{99}{64}m^4E'^2+\left\{\tfrac{135}{8}m^3+\left(\tfrac{1287}{64}-\tfrac{495}{64}=\tfrac{99}{8}\right)m^4\right\}(\varepsilon'^2-E'^2)\\
&+\left(\tfrac{105}{16}-\tfrac{15}{32}-\tfrac{15}{256}=\tfrac{1545}{256}\right)m\varepsilon'^2\gamma^2-\left(\tfrac{225}{16}-\tfrac{75}{16}-\tfrac{25}{4}=\tfrac{25}{8}\right)me^2\varepsilon'^2\\
&+\left(\tfrac{279}{64}-\tfrac{711}{128}+\tfrac{195}{64}-\tfrac{1}{32}=\tfrac{233}{128}\right)me^2\gamma^2+\tfrac{195}{64}m\varepsilon'^4\\
&+\tfrac{105}{32}mb^4+\left(\tfrac{303}{256}-\tfrac{57}{128}+\tfrac{1}{32}=\tfrac{197}{256}\right)m\gamma^4\\
&+\left(\tfrac{235}{128}+\tfrac{15}{64}-\tfrac{15}{32}-\tfrac{15}{16}+\tfrac{5}{16}=\tfrac{125}{128}\right)me^4
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 2E.nt+c.nt\; e\left\{\begin{aligned}
&\left(\tfrac{33}{8}-2=\tfrac{17}{8}\right)m^2+\left(\tfrac{59}{4}-\tfrac{11}{4}-\tfrac{119}{24}=\tfrac{169}{24}\right)m^3\\
&+\left(\tfrac{3869}{96}-\tfrac{6461}{576}-\tfrac{59}{6}-\tfrac{33}{32}=\tfrac{10495}{576}\right)m^4\\
&+\left(\tfrac{1833739}{18432}-\tfrac{204989}{13824}-\tfrac{3869}{144}-\tfrac{59}{16}-\tfrac{2475}{256}-\tfrac{5445}{512}=\tfrac{1869001}{55296}\right)m^5
\end{aligned}\right\}$$

+

$$
\sin 2E.nt+c.nt\; e \left\{
\begin{array}{l}
+\left\{\begin{array}{l}\frac{4341491}{165888}+\frac{40653227}{221184}-\frac{1833739}{27648}-\frac{3869}{384}-\frac{4425}{1024} \\ -\frac{44781}{1024}-\frac{675147}{8192}+\frac{1815}{128}-\frac{11979}{4096}=\frac{2381561}{165888}\end{array}\right\} m^6 \\
+\left(\frac{135}{8}+\frac{15}{8}-\frac{405}{32}=\frac{195}{32}\right) m e^2 \\
+\left(\frac{159}{32}-\frac{6963}{128}+\frac{135}{16}+\frac{6195}{64}-\frac{45}{2}-\frac{99}{16}=\frac{3471}{128}\right) m^2 e^2 \\
+\left\{\begin{array}{l}\frac{8423}{512}-\frac{393025}{2048}+\frac{2321}{64}+\frac{405}{128}+\frac{192811}{512} \\ -\frac{2065}{16}-\frac{15}{16}-\frac{177}{8}+\frac{99}{8}=\frac{206155}{2048}\end{array}\right\} m^3 e^2 \\
+\left\{\begin{array}{l}\frac{1242553}{30720}-\frac{73854547}{122880}+\frac{393025}{3072}+\frac{6963}{512} \\ +\frac{33}{64}+\frac{8387333}{6144}-\frac{192811}{384}-\frac{655}{128}-\frac{40127}{256} \\ +\frac{30375}{1024}+\frac{177}{4}-\frac{231}{64}-\frac{945}{128}=\frac{2830683}{8192}\end{array}\right\} m^4 e^2 \\
-\left(\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=\frac{3}{8}\right) m\gamma^2+\left(\frac{67}{64}-\frac{207}{64}+\frac{3}{8}=-\frac{29}{16}\right) m^2\gamma^2 \\
+\left(\frac{6893}{3072}-\frac{9357}{1024}+\frac{69}{32}+\frac{9}{64}=-\frac{7061}{1536}\right) m^3\gamma^2 \\
+\left(\frac{125785}{36864}-\frac{102613}{4096}+\frac{3119}{512}+\frac{207}{256}+\frac{33}{16}+\frac{4455}{2048}+\frac{675}{512}=-\frac{169267}{18432}\right) m^4\gamma^2 \\
-\left(\frac{165}{16}-5=\frac{85}{16}\right) m^2\varepsilon'^2+\left(\frac{1027}{48}-\frac{311}{16}+\frac{55}{8}-\frac{597}{8}=-\frac{1579}{24}\right) m^3\varepsilon'^2 \\
+\left\{\begin{array}{l}\frac{48907}{288}-\frac{194569}{768}+\frac{311}{24}+\frac{165}{64}-\frac{99}{64} \\ -\frac{24309}{64}+\frac{199}{2}-\frac{891}{16}=-\frac{934899}{2304}\end{array}\right\} m^4\varepsilon'^2 \\
+\frac{297}{64} m^4 E'^2+\left(\frac{1435}{64}-\frac{21}{4}=\frac{1149}{64}\right) m^4(\varepsilon'^2-E'^2) \\
+\left(\frac{1683}{128}-\frac{177}{128}-\frac{1395}{64}+\frac{27}{32}=-\frac{147}{16}\right) m e^2\gamma^2+\left(\frac{45}{32}-\frac{15}{32}=\frac{15}{16}\right) m\varepsilon'^2\gamma^2 \\
+\left(\frac{2025}{64}-\frac{75}{16}-\frac{675}{16}=-\frac{975}{64}\right) m e^2\varepsilon'^2+\left(\frac{351}{256}-\frac{99}{256}-\frac{81}{128}=\frac{45}{128}\right) m\gamma^4 \\
+\left(\frac{135}{16}-\frac{2835}{64}+\frac{405}{8}-\frac{81}{4}=-\frac{351}{64}\right) m e^4
\end{array}
\right\}
$$

$$
\sin 2E.nt + c'm.nt\;\varepsilon'\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{11}{16}m^2-\left(\frac{59}{48}+\frac{33}{8}=\frac{257}{48}\right)m^3-\left(\frac{29}{576}+\frac{59}{4}-\frac{33}{16}=\frac{7337}{576}\right)m^4\\
&+\left(\frac{1129}{432}+\frac{9967}{384}+\frac{59}{8}=\frac{124223}{3456}\right)m^5\\
&+\left(\frac{21522037}{36864}-\frac{4777597}{165888}-\frac{9967}{768}-\frac{22627}{6144}=\frac{178615537}{331776}\right)m^6\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{1116359147}{276480}-\frac{1727546917}{4976640}-\frac{21522037}{73728}\\&-\frac{61919}{1152}+\frac{22627}{6144}+\frac{1331}{1024}=\frac{33342973363}{9953280}\end{aligned}\right\}m^7\\
&-\left(\frac{15}{2}-\frac{45}{16}=\frac{75}{16}\right)me^2+\left(\frac{99}{64}+\frac{15}{4}-\frac{47}{16}-\frac{62}{3}=-\frac{3515}{192}\right)m^2e^2\\
&+\left(\frac{76103}{384}-\frac{65711}{1024}+\frac{47}{32}-\frac{4013}{36}+\frac{62}{3}+11=\frac{513121}{9216}\right)m^3e^2\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{39236641}{9216}-\frac{9092489}{12288}-\frac{76103}{768}-\frac{164279}{1728}\\&-\frac{31}{6}+\frac{4013}{36}+\frac{118}{3}-\frac{33}{2}=\frac{381816331}{110592}\end{aligned}\right\}m^4e^2\\
&+\left\{\begin{aligned}&\frac{1648417561}{110592}-\frac{1758770935}{294912}-\frac{39236641}{18432}\\&+\frac{428159807}{165888}+\frac{164279}{1728}-\frac{4013}{144}\\&-\frac{43403}{1152}-59+\frac{33}{4}=\frac{24877227017}{2654208}\end{aligned}\right\}m^5e^2\\
&+\frac{3}{16}m\gamma^2+\left(\frac{37}{64}+\frac{9}{16}=\frac{73}{64}\right)m^2\gamma^2\\
&+\left(\frac{4237}{3072}+\frac{219}{32}-\frac{9}{32}=\frac{24397}{3072}\right)m^3\gamma^2+\frac{11}{128}m^2\varepsilon'^2\\
&-\left(\frac{165}{32}-\frac{59}{384}=\frac{1921}{384}\right)m^3\varepsilon'^2+\left(\frac{15}{16}-\frac{45}{128}=\frac{75}{128}\right)me^2\varepsilon'^2\\
&+\left(\frac{15}{2}-\frac{1}{2}-\frac{39}{16}=\frac{73}{16}\right)me^2\gamma^2-\frac{3}{128}m\varepsilon'^2\gamma^2\\
&+\left(\frac{9}{64}-\frac{9}{64}=0\right)m\gamma^4+\left(\frac{225}{128}-\frac{75}{16}=-\frac{375}{128}\right)mb^4\\
&+\left(\frac{615}{64}-\frac{45}{64}-\frac{135}{8}+5=-\frac{95}{32}\right)me^4
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt\,\varepsilon' \left\{\begin{aligned}
&\tfrac{77}{16}m^2 + \left(\tfrac{413}{16} + \tfrac{33}{8} = \tfrac{479}{16}\right)m^3 \\
&+\left(\tfrac{7003}{64} + \tfrac{59}{4} - \tfrac{99}{16} = \tfrac{7551}{64}\right)m^4 \\
&+\left(\tfrac{6077}{16} - \tfrac{9967}{384} - \tfrac{177}{8} = \tfrac{127385}{384}\right)m^5 \\
&+\left(\tfrac{6303041}{6144} - \tfrac{21017731}{36864} + \tfrac{9967}{256} - \tfrac{33275}{6144} = \tfrac{18036113}{36864}\right)m^6 \\
&+\left\{\begin{aligned}&\tfrac{575249759}{368640} - \tfrac{2163400123}{552960} + \tfrac{21017731}{24576} \\ &- \tfrac{302027}{4608} + \tfrac{33275}{2048} - \tfrac{1331}{1024} = -\tfrac{855604267}{552960}\end{aligned}\right\}m^7 \\
&+\left(\tfrac{35}{2} - \tfrac{105}{16} = \tfrac{175}{16}\right)me^2 \\
&+\left(\tfrac{1999}{16} - \tfrac{1983}{64} - \tfrac{105}{4} + \tfrac{29}{3} = \tfrac{14855}{192}\right)m^2e^2 \\
&+\left(\tfrac{95767}{128} - \tfrac{170573}{1024} - \tfrac{5997}{32} + \tfrac{1201}{24} - 29 - 11 = \tfrac{1241825}{3072}\right)m^3e^2 \\
&+\left\{\begin{aligned}&\tfrac{4298975}{1024} - \tfrac{3180593}{4096} - \tfrac{287301}{256} - \tfrac{64151}{192} \\ &- \tfrac{1201}{8} + \tfrac{87}{4} - \tfrac{118}{3} + \tfrac{99}{2} = \tfrac{7565755}{4096}\end{aligned}\right\}m^4e^2 \\
&+\left\{\begin{aligned}&\tfrac{44298989}{2048} - \tfrac{390959167}{98304} - \tfrac{12896925}{2048} + \tfrac{64151}{64} \\ &- \tfrac{31747151}{6144} + \tfrac{3603}{32} - \tfrac{577}{24} + 177 - \tfrac{297}{4} = \tfrac{725727185}{98304}\end{aligned}\right\}m^5e^2 \\
&-\tfrac{7}{16}m\gamma^2 - \left(\tfrac{173}{64} + \tfrac{9}{16} = \tfrac{209}{64}\right)m^2\gamma^2 \\
&-\left(\tfrac{11443}{1024} + \tfrac{219}{32} - \tfrac{27}{32} = \tfrac{17587}{1024}\right)m^3\gamma^2 - \tfrac{1353}{128}m^2\varepsilon'^2 \\
&-\left(\tfrac{7257}{128} + \tfrac{1353}{32} = \tfrac{12669}{128}\right)m^3\varepsilon'^2 + \tfrac{123}{128}m\,\varepsilon'^2\gamma^2 \\
&+\left(\tfrac{91}{16} - \tfrac{35}{2} + \tfrac{7}{6} = -\tfrac{511}{48}\right)me^2\gamma^2 + \left(\tfrac{21}{64} - \tfrac{21}{64} = 0\right)m\gamma^4 \\
&+\left(\tfrac{1845}{128} - \tfrac{615}{16} = -\tfrac{3075}{128}\right)me^2\varepsilon'^2 \\
&+\left(\tfrac{105}{64} - \tfrac{1435}{64} + \tfrac{315}{8} - \tfrac{35}{3} = \tfrac{665}{96}\right)me^4
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2c.nt \;\; e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{65}{32} + 11 - \frac{161}{16} = \frac{95}{32}\right) m^2 \\ \left(\frac{161}{48} - \frac{653}{24} + \frac{161}{32} + \frac{118}{3} - 11 = \frac{913}{96}\right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{10357}{1440} - \frac{40115}{576} + \frac{653}{48} + \frac{483}{128} \\ + \frac{4067}{36} - \frac{118}{3} - \frac{11}{2} = \frac{132853}{5760} \end{array} \right\} m^4 \\ + \left(\frac{455}{32} - \frac{75}{64} - 45 + 40 = \frac{515}{64}\right) m e^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{64} - \frac{33}{32} = \frac{39}{64}\right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 2c.nt \;\; e^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{45}{16} m + \left(\frac{23}{4} + \frac{15}{2} = \frac{53}{4}\right) m^2 \\ + \left(\frac{187057}{3072} + \frac{1107}{32} - \frac{45}{8} = \frac{276049}{3072}\right) m^3 \\ + \left(\frac{6871549}{18432} + \frac{17595}{128} - \frac{3321}{128} - \frac{3375}{64} + \frac{11}{4} = \frac{8005693}{18432}\right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{2077181651}{884736} + \frac{935131}{2048} - \frac{52785}{512} - \frac{249075}{1024} \\ - \frac{61065}{4096} + \frac{59}{6} - \frac{33}{8} = \frac{2166605291}{884736} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1170663607249}{106168320} + \frac{3862837}{3072} - \frac{2805393}{8192} - \frac{59}{4} - \frac{3958895}{4096} \\ - \frac{4506597}{4096} - \frac{3982395}{4096} - \frac{297}{8} + \frac{44381}{2304} = \frac{941693724529}{106168320} \end{array} \right\} m^6 \\ - \frac{57}{32} m \gamma^2 + \frac{15}{64} m e^2 - \frac{225}{32} m \varepsilon'^2. \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 2g.nt \;\; \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{16} m - \frac{11}{8} m^2 - \left(\frac{1883}{3072} + \frac{11}{32} = \frac{2939}{3072}\right) m^3 \\ - \left(\frac{141245}{18432} + \frac{59}{48} + \frac{33}{128} = \frac{168653}{18432}\right) m^4 \\ - \frac{33}{64} m \gamma^2 - \frac{75}{32} m e^2 - \frac{45}{32} m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2g.nt \;\; \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{11}{16} - \frac{11}{32} = \frac{11}{32}\right) m^2 + \left(\frac{85}{96} - \frac{59}{48} + \frac{11}{32} = 0\right) m^3 \\ + \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{64} = \frac{3}{64}\right) m \gamma^2 - \left(5 + \frac{45}{64} - \frac{165}{32} = \frac{35}{64}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2 \left\{ -\frac{33}{32}m^3 + \frac{9}{64}m\gamma^2 - \left(\frac{45}{8} - \frac{135}{64} = \frac{225}{64}\right) m e^2 \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{187}{16}m^2 + \left(\frac{1003}{12} + \frac{561}{32} = \frac{9707}{96}\right) m^3 \\ + \left(\frac{70039}{144} + \frac{177}{2} - \frac{561}{16} + \frac{99}{16} = \frac{78625}{144}\right) m^4 \\ + \left(\frac{1988549}{864} + \frac{81415}{1024} - 177 + \frac{177}{8} - \frac{99}{4} = \frac{60865501}{27648}\right) m^5 \\ - \frac{51}{64}m\gamma^2 + \left(\frac{255}{8} - \frac{765}{64} = \frac{1275}{64}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{4}m - \left(\frac{15}{32} + \frac{79}{16} = \frac{173}{32}\right) m^2 \\ + \left(\frac{18913}{128} - \frac{5191}{192} + \frac{79}{16} + \frac{33}{16} = \frac{49045}{384}\right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{9865567}{6144} - \frac{1765}{36} + \frac{5191}{192} \\ + \frac{237}{64} + \frac{59}{8} - \frac{33}{8} = \frac{29319517}{18432} \end{array} \right\} m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{918041071}{73728} + \frac{4990219}{13824} + \frac{1765}{36} - \frac{5191}{256} \\ - \frac{17775}{512} - \frac{47821}{3072} - \frac{59}{4} + \frac{165}{32} = \frac{2827081957}{221184} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{35861360657}{442368} + \frac{11810964607}{2654208} - \frac{4990219}{13824} \\ - \frac{1765}{48} - \frac{389325}{2048} - \frac{321609}{2048} + \frac{47821}{1536} + \frac{6633}{256} \\ + \frac{295}{16} + \frac{46187}{24576} - \frac{28920463}{73728} = \frac{224166232717}{2654208} \end{array} \right\} m^6 \\ + \frac{15}{32}m\varepsilon'^2 + \left(\frac{21}{8} - \frac{3}{16} = \frac{39}{16}\right) m\gamma^2 \\ + \left(\frac{15}{8} - \frac{45}{8} + \frac{5}{2} = -\frac{5}{4}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 3c'm.nt \quad \varepsilon'^3 \left(\frac{11}{384} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - 3c'm.nt \quad \varepsilon'^3 \left(\frac{9295}{384} m^2 \right)$$

$$
\sin 2E.nt - c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{
\begin{array}{l}
\frac{35}{4}m + \left(\frac{1775}{32} + \frac{13}{16} = \frac{1801}{32}\right) m^2 \\
+ \left(\frac{32691}{128} - \frac{39}{16} + \frac{157}{64} - \frac{33}{16} = \frac{32429}{128}\right) m^3 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1672603}{2048} - \frac{10067}{128} - \frac{471}{64} \\ + \frac{39}{64} + \frac{99}{8} - \frac{59}{8} = \frac{1830091}{2048} \end{array} \right\} m^4 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{19371751}{24576} + \frac{30201}{128} - \frac{461693}{512} + \frac{471}{256} \\ + \frac{2925}{512} - \frac{3437}{1024} + \frac{177}{4} - \frac{693}{32} = \frac{3667471}{24576} \end{array} \right\} m^5 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{7524176201}{589824} + \frac{1385079}{512} - \frac{493232713}{98304} \\ - \frac{30201}{512} + \frac{35325}{2048} + \frac{52923}{2048} + \frac{10311}{512} - \frac{1239}{16} \\ - \frac{5049}{256} + \frac{12671795}{73728} - \frac{10285}{24576} = \frac{1018456609}{65536} \end{array} \right\} m^6 \\
- \frac{615}{32} m \varepsilon'^2 - \left(\frac{49}{8} - \frac{7}{16} = \frac{91}{16}\right) m \gamma^2 \\
+ \left(\frac{105}{8} - \frac{35}{8} - \frac{35}{6} = \frac{35}{12}\right) m e^2
\end{array}
\right\}
$$

$$
\sin 2E.nt + c'm.nt + c.nt \quad e\varepsilon' \left\{
\begin{array}{l}
- \left(\frac{33}{16} - 1 = \frac{17}{16}\right) m^2 \\
+ \left(\frac{335}{96} + \frac{43}{64} + \frac{11}{16} - \frac{297}{16} = -\frac{2633}{192}\right) m^3 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{33131}{1152} - \frac{55303}{1536} - \frac{43}{192} + \frac{33}{64} \\ - \frac{531}{8} + \frac{99}{8} = - \frac{280873}{4608} \end{array} \right\} m^4 \\
+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{3002915}{13824} - \frac{10185805}{18432} + \frac{55303}{4608} - \frac{43}{256} \\ + \frac{2475}{512} + \frac{177}{4} + \frac{231}{32} + \frac{47229}{512} = - \frac{9677359}{55296} \end{array} \right\} m^5 \\
+ \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{8}\right) m \gamma^2 \\
+ \left(\frac{405}{32} - \frac{15}{8} - \frac{135}{8} = - \frac{195}{32}\right) m e^2
\end{array}
\right\}
$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{231}{16} - 7 = \frac{119}{16}\right) m^2 \\ + \left(\frac{4677}{64} - \frac{905}{32} - \frac{231}{16} + \frac{297}{16} = \frac{3131}{64}\right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{214545}{512} - \frac{18625}{128} - \frac{4677}{64} \\ - \frac{231}{64} + \frac{531}{8} - \frac{297}{8} = \frac{115757}{512} \end{array} \right\} m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{4663747}{2048} - \frac{1036373}{1536} - \frac{214545}{512} - \frac{4677}{256} \\ - \frac{531}{4} - \frac{17325}{512} + \frac{297}{32} - \frac{154353}{1024} = \frac{5266351}{6144} \end{array} \right\} m^5 \\ - \left(\frac{21}{16} - \frac{7}{16} = \frac{7}{8}\right) m\gamma^2 \\ + \left(\frac{35}{8} - \frac{945}{32} + \frac{315}{8} = \frac{455}{32}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 3c.nt \quad e^3 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{45}{32} + \frac{15}{8} = \frac{105}{32}\right) m \\ + \left(\frac{45}{16} - \frac{165}{64} - \frac{269}{384} + \frac{537}{64} + \frac{15}{2} + \frac{11}{48} = \frac{6011}{384}\right) m^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 3c.nt \quad e^3 \left\{ \frac{1445}{96} - \frac{7}{4} - \frac{4775}{192} + \frac{1375}{48} = \frac{1093}{64} \right\} m^2$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left\{ - \frac{45}{16} m + \left(\frac{313}{32} - \frac{15}{4} = \frac{193}{32}\right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{105}{16} m + \left(\frac{157}{16} + \frac{105}{4} = \frac{577}{16}\right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{161}{32} - \frac{65}{64} - \frac{11}{2} = - \frac{95}{64} \right\} m^2$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{455}{64} - \frac{1127}{32} + \frac{77}{2} = \frac{665}{64} \right\} m^2$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left(- \frac{9}{16} m - \frac{59}{32} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left(\frac{21}{16} m - \frac{11}{4} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left\{ \frac{11}{32} - \frac{11}{64} = \frac{11}{64} \right\} m^2$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left\{ \frac{77}{64} - \frac{77}{32} = - \frac{77}{64} \right\} m^2$$

$\sin 2E.nt - 2g.nt - c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{32} = \frac{3}{8}\right) m - \left(\frac{51}{128} + \frac{439}{128} - \frac{3}{16} + \frac{11}{64} = \frac{61}{16}\right) m^2 \right\}$

$\sin 2E.nt + 2g.nt - c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ - \left(\frac{45}{32} - \frac{15}{32} = \frac{15}{16}\right) m - \left(\frac{1251}{128} - \frac{325}{128} - \frac{15}{16} - \frac{99}{64} = \frac{19}{4}\right) m^2 \right\}$

$\sin 2E.nt - 2g.nt + c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ - \left(\frac{51}{32} - \frac{9}{16} = \frac{33}{32}\right) m + \left(\frac{715}{256} - \frac{15}{16} - \frac{9}{8} + \frac{11}{64} = \frac{231}{256}\right) m^2 \right\}$

$\sin 2E.nt + 2g.nt + c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{245}{64} - \frac{3}{4} - \frac{275}{64} = -\frac{39}{32} \right\} m^2$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{255}{16} m + \left(\frac{16455}{128} + \frac{181}{32} = \frac{17179}{128}\right) m^2 \\ + \left(\frac{194273}{256} + \frac{20147}{768} - \frac{181}{8} - \frac{291}{64} = \frac{291049}{384}\right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{80893063}{24576} - \frac{2075959}{9216} - \frac{20147}{192} - \frac{33}{32} \\ + \frac{543}{128} - \frac{1401}{64} + \frac{291}{8} = \frac{219639709}{73728} \end{array} \right\} m^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} - \frac{45}{16} m - \left(\frac{6399}{128} - \frac{45}{32} = \frac{6219}{128}\right) m^2 \\ - \left(\frac{89501}{256} + \frac{5049}{256} - \frac{303}{64} = \frac{46669}{128}\right) m^3 \\ - \frac{35}{8} m \varepsilon'^2 + \left(\frac{63}{32} - \frac{9}{64} = \frac{117}{64}\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{45}{32} + \frac{375}{32} + \frac{15}{16} = \frac{225}{16}\right) m e^2 + \frac{297}{256} e^4 . m^{-1} \end{array} \right\}$$

$\sin 2E.nt - 2c'm.nt + c.nt \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \frac{561}{16} - 17 = \frac{289}{16} \right\} m^2$

$\sin 2E.nt + 2c'm.nt + 2c.nt \quad e^2\varepsilon'^2 \left(\frac{885}{64} m + \frac{297}{256} e^2 . m^{-1} \right)$

$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon'^2 \left(\frac{765}{64} m \right)$

$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon'^2 \left(- \frac{27}{64} m - \frac{135}{512} e^2 . m^{-1} \right)$

$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon'^2 \left(\frac{153}{64} m \right)$

$\sin 2E.nt + c'm.nt - 3c.nt \quad e^3\varepsilon' \left\{ - \frac{45}{32} - \frac{15}{8} = - \frac{105}{32} \right\} m$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 3c.nt \qquad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{105}{32} + \frac{35}{8} = \frac{245}{32} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt + 2g.nt - 2c.nt \qquad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{105}{64} - \frac{345}{64} + \frac{5}{4} = -\frac{5}{2} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - 2g.nt - 2c.nt \qquad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{3}{8} - \frac{3}{32} - \frac{3}{4} = -\frac{15}{32} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - 2g.nt + 2c.nt \qquad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{9}{8} - \frac{231}{64} + \frac{69}{64} = -\frac{45}{32} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - 4g.nt \qquad \gamma^4 \left\{ \frac{3}{64} - \frac{9}{64} = -\frac{3}{32} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - 4c.nt \qquad e^4 \left\{ \frac{15}{64} - \frac{55}{64} + \frac{15}{8} + 5 = \frac{25}{4} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt + 3c'm.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'^3 \left(-\frac{5}{32} m \right)$$

$$\sin 2E.nt - 3c'm.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'^3 \left(\frac{845}{32} m \right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{51}{32} - \frac{9}{16} = \frac{33}{32} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{21}{16} - \frac{119}{32} = -\frac{77}{32} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{32} - \frac{3}{32} = -\frac{3}{8} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{45}{32} - \frac{15}{32} = \frac{15}{16} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{35}{32} - \frac{105}{32} = -\frac{35}{16} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{7}{32} + \frac{21}{32} = \frac{7}{8} \right\} m$$

$$\sin E.nt \; b^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{8} m - \frac{93}{8} m^2 - \left(\frac{1773}{32} - \frac{165}{128} = \frac{6927}{128} \right) m^3 \\ -\left(\frac{17977}{64} - \frac{6287}{512} + \frac{165}{128} = \frac{138189}{512} \right) m^4 \\ -\left(\frac{1213841}{768} - \frac{460285}{6144} + \frac{6287}{512} - \frac{605}{1024} = \frac{3107419}{2048} \right) m^5 \\ -\left(\frac{173945309}{18432} - \frac{59471725}{147456} + \frac{460285}{6144} - \frac{382283}{49152} + \frac{605}{512} = \frac{74564721}{8192} \right) m^6 \\ +\frac{165}{32} m\gamma^2 - \left(\frac{45}{8} - \frac{15}{4} = \frac{15}{8} \right) m\varepsilon'^2 - \left(\frac{15}{8} + \frac{105}{16} - \frac{5}{4} = \frac{115}{16} \right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin E.nt - c.nt \quad eb^2 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{165}{32}m - \left(\frac{6837}{256} + \frac{15}{8} = \frac{7317}{256}\right)m^2 \\ & -\left(\frac{142083}{1024} + \frac{969}{64} - \frac{45}{32} = \frac{156147}{1024}\right)m^3 \\ & -\left(\frac{13284081}{16384} + \frac{48303}{512} - \frac{2907}{256} - \frac{3375}{256} = \frac{14427729}{16384}\right)m^4 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin E.nt + c.nt \quad eb^2 \left\{ \begin{aligned} & -\left(\frac{15}{4} - \frac{45}{32} = \frac{75}{32}\right)m - \left(\frac{93}{4} - \frac{27}{4} - \frac{15}{8} = \frac{117}{8}\right)m^2 \\ & +\left(\frac{25693}{1024} - \frac{28683}{256} + \frac{93}{8} + \frac{45}{32} + \frac{165}{32} = -\frac{70415}{1024}\right)m^3 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{92053}{768} - \frac{1170419}{2048} + \frac{28683}{512} + \frac{279}{32} \\ & + \frac{3375}{256} + \frac{15049}{256} - \frac{165}{32} = -\frac{1966573}{6144} \end{aligned} \right\} m^4 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin E.nt + c'm.nt \quad \varepsilon' b^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{5}{2} - \frac{45}{4}m + \left(\frac{2133}{32} + \frac{45}{16} = \frac{2223}{32}\right)m^2 \\ & -\left(\frac{17089}{96} - \frac{3969}{256} = \frac{124805}{768}\right)m^3 + \left(5 + 5 - \frac{5}{3} = \frac{25}{3}\right)e^2 \\ & -\frac{15}{8}\gamma^2 + \frac{5}{2}\varepsilon'^2 - \frac{325}{16}m\gamma^2 - \frac{375}{8}m\varepsilon'^2 \\ & +\left(\frac{15}{2} + \frac{1085}{8} - \frac{1365}{32} = \frac{3215}{32}\right)me^2 + \frac{15}{8}e^2\gamma^2.m^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$\sin E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' b^2 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{15}{8}m - \left(\frac{393}{16} + \frac{145}{32} = \frac{931}{32}\right)m^2 \\ & -\left(\frac{5987}{128} + \frac{8707}{768} - \frac{145}{16} = \frac{37669}{768}\right)m^3 \\ & -\left(\frac{165}{32} + \frac{35}{8} - \frac{15}{8} = \frac{245}{32}\right)me^2 + \frac{135}{64}m\gamma^2 - \left(\frac{15}{2} - \frac{45}{16} = \frac{75}{16}\right)m\varepsilon'^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin E.nt - 2c.nt \quad e^2b^2 \left\{ -\frac{45}{32} - \frac{285}{64} - \frac{15}{16} = -\frac{435}{64} \right\} m$$

$$\sin E.nt + 2c.nt \quad e^2b^2 \left\{ -\frac{15}{16} + \frac{405}{64} - \frac{135}{16} = -\frac{195}{64} \right\} m$$

$$\sin E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2b^2 \left\{ -\frac{165}{64} + \frac{15}{64} = -\frac{75}{32} \right\} m$$

$$\sin E.nt + 2g.nt \quad \gamma^2b^2 \left\{ -\frac{15}{64} + \frac{45}{64} = \frac{15}{32} \right\} m$$

$$\sin E.nt+2c'm.nt \qquad \varepsilon'^2 b^2 \left\{-\frac{15}{64}-\frac{15}{4}=-\frac{255}{64}\right\} m$$

$$\sin E.nt-2c'm.nt \qquad \varepsilon'^2 b^2 \left(\frac{435}{64}.m\right)$$

$$\sin E.nt+c'm.nt-c.nt \qquad e\varepsilon' b^2 \left\{\frac{25}{8}-\frac{1095}{32}m+\frac{15}{4}\gamma^2.m^{-1}\right\}$$

$$\sin E.nt+c'm.nt+c.nt \qquad e\varepsilon' b^2 \left\{\left(5-\frac{15}{8}=\frac{25}{8}\right)-\left(\frac{45}{2}-\frac{135}{16}=\frac{225}{16}\right)m\right\}$$

$$\sin E.nt-c'm.nt-c.nt \qquad e\varepsilon' b^2 \left(-\frac{45}{64}m\right)$$

$$\sin E.nt-c'm.nt+c.nt \qquad e\varepsilon' b^2 \left\{-\frac{45}{32}+\frac{15}{4}=\frac{75}{32}\right\} m$$

$$\sin E.nt+c'm.nt-2c.nt \qquad e^2\varepsilon' b^2 \left\{\frac{25}{8}+\frac{35}{16}+\frac{5}{4}=\frac{105}{16}\right\}$$

$$\sin E.nt+c'm.nt+2c.nt \qquad e^2\varepsilon' b^2 \left\{\frac{5}{4}-\frac{135}{16}+\frac{45}{4}=\frac{65}{16}\right\}$$

$$\sin E.nt+c'm.nt-2g.nt \qquad \gamma^2\varepsilon' b^2 \left\{\frac{25}{48}-\frac{5}{16}=\frac{5}{24}\right\}$$

$$\sin E.nt+c'm.nt+2g.nt \qquad \gamma^2\varepsilon' b^2 \left\{\frac{5}{16}-\frac{15}{16}=-\frac{5}{8}\right\}$$

$$\sin 3E.nt \qquad b^2 \left\{\begin{array}{l} \frac{15}{32}m^2-\left(\frac{495}{128}-\frac{415}{128}=\frac{5}{8}\right)m^3-\left(\frac{4839}{128}-\frac{495}{128}-\frac{1141}{64}=\frac{1031}{64}\right)m^4 \\ -\left(\frac{974855}{4096}-\frac{538619}{6144}-\frac{4839}{128}-\frac{16335}{4096}=\frac{666889}{6144}\right)m^5 \end{array}\right\}$$

$$\sin 3E.nt-c.nt \qquad eb^2 \left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{495}{256}+\frac{255}{32}=\frac{2535}{256}\right)m^2 \\ -\left(\frac{6645}{1024}+\frac{23185}{256}-\frac{765}{64}-\frac{165}{32}=\frac{81865}{1024}\right)m^3 \\ -\left\{\begin{array}{l} \frac{331449}{512}-\frac{87663}{16384}-\frac{69555}{512}+\frac{765}{256} \\ -\frac{15379}{256}+\frac{495}{32}=\frac{7611089}{16384} \end{array}\right\}m^4 \end{array}\right\}$$

$$\sin 3E.nt+c.nt \qquad eb^2 \left\{-\frac{125}{128}+\frac{15}{8}=\frac{115}{128}\right\} m^2$$

$$\sin 3E.nt+c'm.nt \qquad \varepsilon' b^2 \left\{-\frac{95}{32}+\frac{165}{32}=\frac{35}{16}\right\} m^2$$

$$\sin 3E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' b^2 \left(\frac{75}{32} m^2 \right)$$

$$\sin 3E.nt - 2c.nt \quad e^2 b^2 \left(-\frac{175}{32} m \right)$$

$$\sin 3E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2 b^2 \left(-\frac{25}{32} m \right)$$

$$\sin 3E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{225}{64} + \frac{75}{8} = \frac{345}{64} \right\} m$$

$$\sin 4E.nt \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{121}{64} - \frac{283}{256} = \frac{201}{256} \right) m^4 + \left(\frac{649}{48} - \frac{1991}{320} - \frac{121}{64} = \frac{649}{120} \right) m^5 \\ + \left(\frac{1865}{32} - \frac{649}{48} - \frac{641477}{28800} = \frac{647623}{28800} \right) m^6 \\ - \left(\frac{33}{64} - \frac{33}{128} = \frac{33}{128} \right) m^3 \gamma^2 + \left(\frac{975}{128} - \frac{2415}{64} + \frac{165}{4} = \frac{1425}{128} \right) m^3 e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4E.nt - c.nt \quad e \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{495}{64} - \frac{15}{4} = \frac{255}{64} \right) m^3 + \left(\frac{8667}{128} - \frac{369}{16} - \frac{165}{16} - \frac{1089}{256} = \frac{7701}{256} \right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{7363727}{20480} - \frac{250469}{2560} - \frac{2889}{32} \\ + \frac{495}{256} - \frac{1947}{64} + \frac{363}{32} = \frac{631979}{4096} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{480201287}{409600} - \frac{326497277}{921600} - \frac{7363727}{15360} + \frac{8667}{512} \\ + \frac{137547}{1024} + \frac{649}{8} - \frac{4961}{512} = \frac{413887919}{737280} \end{array} \right\} m^6 \\ + \left(\frac{225}{64} - \frac{6075}{256} + \frac{2025}{64} = \frac{2925}{256} \right) m^2 e^2 - \left(\frac{135}{128} - \frac{45}{128} = \frac{45}{64} \right) m^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4E.nt + c.nt \quad e \left\{ 3 - \frac{3175}{256} + \frac{3025}{256} = \frac{309}{128} \right\} m^4$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{121}{64} - \frac{283}{256} = \frac{201}{256} \right) m^4 + \left(\frac{5973}{1280} - \frac{449}{128} + \frac{363}{256} - \frac{363}{32} = -\frac{5611}{640} \right) m^5 \\ + \left(\frac{7245}{128} - \frac{495}{8} - \frac{1845}{256} = -\frac{3195}{256} \right) m^3 e^2 + \frac{99}{128} m^3 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{847}{64} - \frac{1981}{256} = \frac{1407}{256} \right) m^4 \\ + \left(\frac{42883}{384} - \frac{13937}{256} - \frac{4235}{256} + \frac{363}{32} = \frac{19981}{384} \right) m^5 \\ + \left(\frac{7355}{256} - \frac{28175}{128} + \frac{1925}{8} = \frac{12605}{256} \right) m^3 e^2 - \frac{385}{128} m^3 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{9}{256} m^2 + \left(\frac{99}{128} - \frac{141}{512} = \frac{255}{512} \right) m^3 \\ + \left(\frac{11257}{8192} + \frac{613}{1024} - \frac{99}{64} + \frac{121}{512} = \frac{5425}{8192} \right) m^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4E.nt - 2c.nt \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{225}{32} - \frac{675}{256} = \frac{1125}{256} \right) m^2 \\ + \left(\frac{10005}{128} - \frac{9045}{512} - \frac{225}{16} + \frac{165}{16} = \frac{29055}{512} \right) m^3 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{245647}{512} - \frac{574773}{8192} - \frac{10005}{64} + \frac{675}{128} \\ - \frac{44729}{512} - \frac{165}{4} + \frac{121}{64} = \frac{1080043}{8192} \end{array} \right\} m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{291357671}{122880} - \frac{10519499}{40960} - \frac{245647}{256} + \frac{30015}{512} + \frac{50625}{1024} \\ - \frac{7213511}{15360} + \frac{44729}{128} + \frac{1815}{32} + \frac{649}{48} - \frac{363}{32} = \frac{73818043}{61440} \end{array} \right\} m^5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{198072600817}{29491200} - \frac{21099210263}{26214400} - \frac{291357671}{61440} + \frac{736941}{2048} \\ + \frac{2251125}{4096} + \frac{915975}{4096} - \frac{3386511701}{1843200} + \frac{7213511}{3840} - \frac{492019}{1024} \\ + \frac{29205}{256} + \frac{53509}{1024} - \frac{649}{8} + \frac{6897}{256} = \frac{466018749241}{235929600} \end{array} \right\} m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{1485}{128} - \frac{45}{8} = \frac{765}{128} \right) m^3 \\ - \left(\frac{10329}{256} - \frac{4339}{256} - \frac{1485}{128} + \frac{7821}{256} = \frac{10841}{256} \right) m^4 \\ - \left\{ \begin{array}{l} \frac{249497}{2560} - \frac{9094617}{40960} - \frac{10329}{256} + \frac{1485}{256} \\ - \frac{7821}{128} + \frac{1377117}{2048} - \frac{9801}{512} = \frac{3547567}{8192} \end{array} \right\} m^5 \end{array} \right\}.$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{5775}{128} - \frac{175}{8} = \frac{2975}{128} \right) m^3 \\ + \left(\frac{58759}{128} - \frac{122869}{768} - \frac{9625}{128} + \frac{1287}{256} = \frac{43949}{192} \right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{72468983}{24576} - \frac{922711}{1152} - \frac{293795}{384} + \frac{5775}{512} \\ + \frac{88665}{2048} - \frac{2145}{128} - \frac{9801}{512} = \frac{103321481}{73728} \end{array} \right\} m^5 \end{array} \right\}$$

$sin\,4E.nt-3c.nt \qquad e^3\left\{-\frac{225}{128}+\frac{2025}{256}-\frac{225}{64}=\frac{675}{256}\right\}m^3$

$sin\,4E.nt-2g.nt-c.nt \qquad e\gamma^2\left\{-\frac{81}{256}+\frac{279}{256}=\frac{99}{128}\right\}m^2$

$sin\,4E.nt-2g.nt+c.nt \qquad e\gamma^2\left\{\frac{9}{256}-\frac{27}{256}=-\frac{9}{128}\right\}m^2$

$sin\,4E.nt+c'm.nt-2c.nt \qquad e^2\varepsilon'\left\{\frac{675}{128}-\frac{225}{16}=-\frac{1125}{128}\right\}m^2$

$sin\,4E.nt-c'm.nt-2c.nt \qquad e^2\varepsilon'\left\{-\frac{1575}{128}+\frac{525}{16}=\frac{2625}{128}\right\}m^2$

$sin\,4E.nt+c'm.nt-2g.nt \qquad \gamma^2\varepsilon'\left(\frac{9}{128}m^2\right)$

$sin\,4E.nt-c'm.nt-2g.nt \qquad \gamma^2\varepsilon'\left(-\frac{21}{128}m^2\right).$

Les argumens précédens sont ainsi écrits, pour plus de simplicité; mais lorsqu'on voudra former leurs valeurs effectives, on aura soin de changer

$E.nt$ en $(1-m)(nt+\varepsilon-\int\zeta ndt)+m\varepsilon-\varepsilon'_1;$

$c.nt$ . . . . $nt+\varepsilon-\int\zeta ndt-(1-c)nt-\int\varpi.ndt;$

$g.nt$ . . . . $nt+\varepsilon-\int\zeta ndt-(1-g)nt-\int\theta.ndt;$

$c'm.nt$ . . . $n't+\varepsilon'_1-\varkappa'-m\int\zeta ndt;$

en se rappelant que $n't+\varepsilon'_1-\varkappa'$ représente l'anomalie moyenne du Soleil.

52. Remarquons maintenant, que l'équation précédente a été formée, sans considérer les termes appartenans aux fonctions $F(v)^3$, $F(v)^4$, $F(v)^5$, $F(v)^6$, qui doivent leur existence à la partie multipliée par $\cos v$, renfermée dans le carré de $F(v)$; c'est-à-dire au terme

$$\{F(v)\}^2 =$$

$$\cos cv \left\{ \begin{array}{l}
2.e^2 - e^2\gamma^2 + \frac{9}{32}e^4 + \frac{\gamma^4}{32} + \frac{9}{2}m^2\varepsilon'^2 + \left(3 + \frac{225}{32} = \frac{321}{32}\right)m^2e^2 + \frac{121}{128}m^4 \\
+ \frac{649}{96}m^5 - \frac{33}{128}m^3\gamma^2 + \left(\frac{45}{16} - \frac{495}{128} + \frac{4275}{64} = \frac{8415}{128}\right)m^3e^2 + \frac{9}{2}m^2e^2E'^2 \\
+ \left(\frac{3481}{288} + \frac{9823}{576} = \frac{1865}{64}\right)m^6 - \frac{\gamma^6}{32} + \left(\frac{3}{32} + \frac{1}{18} = \frac{43}{288}\right)e^6 \\
+ \left(\frac{15}{8} - \frac{3}{64} = \frac{117}{64}\right)e^4\gamma^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{15}{64} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{5}{64}\right)e^2\gamma^4 \\
+ \left(\frac{9}{8} - \frac{637}{64} - \frac{6633}{512} - \frac{885}{64} + \frac{81225}{512} + \frac{260205}{1024} + 2 = \frac{388237}{1024}\right)m^4e^2 \\
- \left(\frac{517}{512} + \frac{59}{64} = \frac{989}{512}\right)m^4\gamma^2 - \left(\frac{2205}{16} + \frac{605}{128} - \frac{121}{512} - \frac{5929}{512} = \frac{33465}{256}\right)m^4\varepsilon'^2 \\
- \left(\frac{297}{16} - \frac{3}{64} + \frac{225}{32} - \frac{2025}{512} - \frac{2025}{512} = \frac{4515}{256}\right)m^2e^4 - \frac{81}{8}m^2\gamma^2\varepsilon'^2 \\
+ \left(\frac{81}{8} + \frac{81}{32} = \frac{405}{32}\right)m^2\varepsilon'^4 + \left(\frac{9}{512} + \frac{81}{512} - \frac{11}{64} = \frac{1}{256}\right)m^2\gamma^4 + \frac{225}{128}m^2b^4 \\
+ \left(\frac{81}{8} + \frac{81}{32} + \frac{81}{32} - \frac{1125}{32} + \frac{225}{32} + \frac{1225}{32} = \frac{811}{32}\right)m^2e^2\varepsilon'^2 + \frac{25}{8}\varepsilon'^2b^4 \\
- \left(\frac{3}{4} + \frac{297}{64} + \frac{315}{32} - \frac{135}{256} = \frac{3765}{256}\right)m^2e^2\gamma^2 + \frac{21}{2}m^2e^2(\varepsilon'^2 - E'^2)
\end{array} \right\}$$

Ainsi, il est nécessaire de calculer la totalité des termes qui dérivent de celui-ci, ce qui fournit les équations suivantes.

$$F(v) \times \{F(v)\}^2 =$$

$$\sin cv \; e \left\{ \begin{array}{l}
- 4.e^2 + 3.e^2\gamma^2 - \frac{9}{16}e^4 - \frac{\gamma^4}{16} - 9.m^2\varepsilon'^2 - \frac{369}{16}m^2e^2 - \frac{121}{64}m^4 - \frac{649}{48}m^5 \\
+ \frac{33}{64}m^3\gamma^2 - \frac{8595}{64}m^3e^2 - \frac{15283}{256}m^6 + \frac{5}{64}\gamma^6 - \frac{43}{144}e^6 - \frac{345}{64}e^4\gamma^2 + \frac{5}{32}e^2\gamma^4 \\
- \frac{390845}{512}m^4e^2 + \frac{555}{128}m^4\gamma^2 + \frac{32601}{128}m^4\varepsilon'^2 - \frac{405}{16}m^2\varepsilon'^4 + \frac{6837}{128}m^2e^4 \\
- \frac{7}{128}m^2\gamma^4 - \frac{811}{16}m^2e^2\varepsilon'^2 + \frac{5193}{128}m^2e^2\gamma^2 + \frac{45}{2}m^2\gamma^2\varepsilon'^2 - \frac{225}{64}m^2b^4 \\
- \frac{25}{4}\varepsilon'^2b^4 - \frac{63}{2}m^2e^2(\varepsilon'^2 - E'^2) - \frac{27}{2}m^2e^2E'^2
\end{array} \right\}$$

$$\sin 2cv \qquad e^2\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}e^2+\frac{59}{128}e^4+\frac{3}{128}\gamma^4-\frac{7}{8}e^2\gamma^2+\frac{27}{8}m^2\varepsilon'^2 \\ +\frac{979}{128}m^2e^2+\frac{363}{512}m^4+\frac{649}{128}m^5+\frac{44881}{2048}m^6 \end{array}\right\}$$

$$\sin 3cv \qquad e^3\left(-\frac{2}{3}e^2\right)$$

$$\sin 2gv \qquad \gamma^2\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{121}{512}m^4\right)$$

$$\sin 2gv-cv \qquad e\gamma^2\left(2.e^2-\frac{135}{16}me^2\right)$$

$$\sin 2gv+cv \qquad e\gamma^2\left(-\frac{1}{2}e^2\right)$$

$$\sin c'mv \qquad \varepsilon'\left(6.me^2-\frac{1977}{32}m^3e^2-\frac{55459}{128}m^4e^2-\frac{1767347}{768}m^5e^2+\frac{363}{128}m^5+\frac{649}{32}m^6\right)$$

$$\sin 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\left(\frac{9}{2}me^2\right)$$

$$\sin cv+c'mv \qquad e\varepsilon'\left(\frac{9}{2}me^2+\frac{1089}{512}m^5+\frac{137445}{4096}m^6\right)$$

$$\sin cv-c'mv \qquad e\varepsilon'\left(-\frac{9}{2}me^2-\frac{1089}{512}m^5-\frac{223113}{4096}m^6\right)$$

$$\sin cv-2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\left(-\frac{27}{8}me^2\right)$$

$$\sin 2cv-c'mv \qquad e^2\varepsilon'\left(\frac{27}{8}me^2\right)$$

$$\sin 2g\acute{v}-c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{9}{8}me^2\right)$$

$$\sin 2Ev \qquad \left\{\begin{array}{l} -\frac{11}{4}m^2e^2-\frac{59}{6}m^3e^2-\frac{88931}{2304}m^4e^2-\frac{10502231}{55296}m^5e^2-\frac{1331}{1024}m^6 \\ -\frac{7139}{512}m^7-\frac{783651}{9216}m^8+\frac{1089}{2048}m^5\gamma^2+\frac{45}{8}me^4+\frac{4725}{256}m^2e^4+\frac{23753}{256}m^3e^4 \\ +\frac{3}{8}me^2\gamma^2+\frac{91}{32}m^2e^2\gamma^2+\frac{7795}{768}m^3e^2\gamma^2+\frac{55}{8}m^2e^2\varepsilon'^2+\frac{3575}{96}m^3e^2\varepsilon'^2 \\ -\frac{315}{512}me^6+\frac{3}{512}m\gamma^6-\frac{195}{512}me^2\gamma^4-\frac{3909}{512}me^4\gamma^2-\frac{225}{16}me^4\varepsilon'^2 \\ -\frac{15}{16}me^2\varepsilon'^2\gamma^2-\frac{11}{256}m^2\gamma^4-\frac{59}{384}m^3\gamma^4-\frac{99}{16}m^4\varepsilon'^2-\frac{177}{8}m^5\varepsilon'^2 \\ +\frac{405}{32}m^3e^2\varepsilon'^2+\frac{27}{32}m^3\varepsilon'^2\gamma^2 \end{array}\right\}$$

$\sin 2Ev - cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{2} m e^2 - \frac{285}{8} m^2 e^2 - \frac{11081}{64} m^3 e^2 - \frac{1325327}{1536} m^4 e^2 + \frac{345}{128} m e^4 \\ + 9.m e^2 \gamma^2 + \frac{75}{4} m e^2 \varepsilon'^2 - \frac{15}{128} m \gamma^4 - \frac{135}{8} m^3 \varepsilon'^2 - \frac{2565}{32} m^4 \varepsilon'^2 \\ - \frac{1815}{512} m^5 - \frac{86405}{2048} m^6 - \frac{9625707}{32768} m^7 \end{array} \right\}$

$\sin 2Ev + cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} 4.m^2 e^2 + \frac{119}{12} m^3 e^2 + \frac{12239}{288} m^4 e^2 + \frac{121}{64} m^6 \\ - \frac{15}{4} m e^4 - \frac{3}{8} m e^2 \gamma^2 + 9.m^4 \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$

$\sin 2Ev + c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{8} m^2 e^2 + \frac{59}{24} m^3 e^2 + \frac{32243}{4608} m^4 e^2 + \frac{686255}{13824} m^5 e^2 \\ + \frac{1331}{2048} m^6 + \frac{35695}{6144} m^7 - \frac{45}{8} m e^4 - \frac{3}{8} m e^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$

$\sin 2Ev - c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{77}{8} m^2 e^2 - \frac{413}{8} m^3 e^2 - \frac{136765}{512} m^4 e^2 - \frac{1360627}{1024} m^5 e^2 \\ - \frac{9317}{2048} m^6 - \frac{349811}{6144} m^7 + \frac{105}{8} m e^4 + \frac{7}{8} m e^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$

$\sin 2Ev - 2cv \quad e^2 \left(-\frac{45}{8} m e^2 \right)$

$\sin 2Ev - 2gv \quad \gamma^2 \left(-\frac{9}{8} m e^2 \right)$

$\sin 2Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left(\frac{15}{2} m e^2 + \frac{1815}{512} m^5 + \frac{105655}{4096} m^6 \right)$

$\sin 2Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left(-\frac{35}{2} m e^2 - \frac{4235}{512} m^5 - \frac{1371205}{12288} m^6 \right)$

$\sin 2Ev + 2c'mv - cv \quad e\varepsilon'^2 \left(\frac{45}{8} m e^2 \right)$

$\sin Ev \quad b^2 \left(\frac{15}{4} m e^2 + \frac{1815}{1024} m^5 + \frac{24233}{1024} m^6 \right)$

$\sin Ev + c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left(-5.e^2 + \frac{45}{2} m e^2 \right)$

$\sin Ev - c'mv \quad \varepsilon' b^2 \left(-\frac{15}{4} m e^2 \right)$

$\sin 4Ev - 2cv \quad e^2 \left(\frac{81675}{32768} m^6 \right).$

$$\{F(v)\}^2\times\{F(v)\}^2=$$

$$\cos cv \qquad e\left\{\begin{array}{l}\frac{165}{8}m^3e^2+\frac{20209}{128}m^4e^2-6.e^4-\frac{1123}{32}m^2e^4\\+\frac{81}{2}m^2e^2\varepsilon'^2-\frac{45}{16}m^2e^2\gamma^2+5.e^4\gamma^2+\frac{21}{32}e^2\gamma^4-\frac{91}{32}e^6\end{array}\right\}$$

$$\cos 2cv \qquad e^2\left\{\begin{array}{l}-8.e^2+8.e^2\gamma^2-\frac{417}{8}m^2e^2+\frac{37}{24}e^4\\-\frac{\gamma^4}{8}-18.m^2\varepsilon'^2-\frac{121}{32}m^4-\frac{649}{24}m^5-\frac{7823}{64}m^6\end{array}\right\}$$

$$\cos 3cv \qquad e^3\left(6.e^2\right)$$

$$\cos 2gv-cv \qquad e\gamma^2\left(-2.e^2\right)$$

$$\cos 2gv+cv \qquad e\gamma^2\left(2.e^2\right)$$

$$\cos cv+c'mv \qquad e\varepsilon'\left(24.me^2+\frac{363}{32}m^5+\frac{649}{8}m^6\right)$$

$$\cos cv-c'mv \qquad e\varepsilon'\left(-24.me^2-\frac{363}{32}m^5-\frac{649}{8}m^6\right)$$

$$\cos cv-2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\left(-18.me^2\right)$$

$$\cos 2cv-c'mv \qquad e^2\varepsilon'\left(-9.me^2\right)$$

$$\cos 2gv-c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^2\left(3.me^2\right)$$

$$\cos 2Ev \qquad \left\{\begin{array}{l}-30.me^4-\frac{317}{2}m^2e^4-\frac{36227}{48}m^3e^4-\frac{1}{2}m^3e^2\varepsilon'^2\\+\frac{1095}{32}me^6+45.me^4\gamma^2+\frac{3}{32}me^2\gamma^4-\frac{1815}{256}m^5e^2+75\,me^4\varepsilon'^2\end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev-cv \qquad e\left\{\begin{array}{l}11.m^2e^2+\frac{118}{3}m^3e^2+\frac{93683}{576}m^4e^2-45.me^4\\-\frac{3}{2}me^2\gamma^2+\frac{99}{4}m^4\varepsilon'^2+\frac{1331}{256}m^6+\frac{7139}{128}m^7\end{array}\right\}$$

$$\cos 2Ev+cv \qquad e\left\{\begin{array}{l}-11.m^2e^2-\frac{118}{3}m^3e^2-\frac{93683}{576}m^4e^2+\frac{135}{4}me^4\\+\frac{3}{2}me^2\gamma^2-\frac{99}{4}m^4\varepsilon'^2-\frac{1331}{256}m^6\end{array}\right\}$$

$\cos 2Ev - 2cv \quad e^2\left(\; 30.me^2\right)$

$\cos 2Ev + c'mv \quad \varepsilon'\left(\; \frac{33}{2}m^3e^2 + 59.m^4e^2 + 30.me^4 + \frac{3993}{512}m^7 - \frac{661}{96}m^5e^2\right)$

$\cos 2Ev - c'mv \quad \varepsilon'\left(-\frac{33}{2}m^3e^2 - 59.m^4e^2 - 70.me^4 - \frac{3993}{512}m^7 - \frac{577}{48}m^5e^2\right)$

$\cos 2Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon'\left(\; \frac{9559}{512}m^6\right)$

$\cos 2Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon'\left(-\frac{1573}{512}m^6\right)$

$\cos 4Ev - 2cv \quad e^2\left(-\frac{27225}{2048}m^6\right).$

$$\{F(v)\}^3 \times \{F(v)\}^2 =$$

$\sin cv \quad e\left(-16.e^4 + 20.e^4\gamma^2 - \frac{7}{8}e^2\gamma^4 - \frac{31}{8}e^6 - 126.m^2e^2\varepsilon'^2 - \frac{2055}{8}m^2e^4 - \frac{847}{32}m^4e^2\right)$

$\sin 2cv \quad e^2\left(\; 15. \; e^4\right)$

$\sin 3cv \quad e^3\left(\; 8. \; e^2\right)$

$\sin 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon'\left(\; 18.me^2\right)$

$\sin 2Ev \quad \left(-\frac{55}{2}m^2e^4 - \frac{295}{3}m^3e^4 + \frac{15}{4}me^4\gamma^2 + \frac{585}{2}me^6\right)$

$\sin 2Ev - cv \quad e\left(-75.me^4\right)$

$\sin 2Ev + cv \quad e\left(\; 45.me^4\right).$

$$\{F(v)\}^3 \times \{F(v)\}^3 =$$

$\cos cv \quad e\left(-18. \; e^6\right)$

$\cos 2cv \quad e^2\left(-24. \; e^4\right)$

$\cos 2Ev \quad \left(-45.me^6\right).$

$$-\frac{1}{2.3}\frac{d^2.F\overline{(nt)}^3}{n^2\,dt^2}+\frac{1}{2.3.4}\frac{d^3.F\overline{(nt)}^4}{n^3\,dt^3}-\frac{1}{2.3.4.5}\frac{d^4.F\overline{(nt)}^5}{n^4\,dt^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6}\frac{d^5.F\overline{(nt)}^6}{n^5\,dt^5}=$$

$$\sin c.nt\; e\left\{\begin{array}{l}
-\frac{2}{3}e^2+\frac{1}{2}e^2\gamma^2-\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{4}-\frac{2}{15}=\frac{101}{480}\right)e^4-\frac{\gamma^4}{96}-\frac{3}{2}m^2\varepsilon'^2\\
-\left(\frac{123}{32}-1=\frac{91}{32}\right)m^2e^2-\frac{121}{384}m^4-\frac{649}{288}m^5+\frac{11}{128}m^3\gamma^2\\
-\left(\frac{2865}{128}-\frac{75}{8}-\frac{55}{64}=\frac{1555}{128}\right)m^3e^2+\frac{5}{384}\gamma^6-\left(\frac{115}{128}+\frac{1}{6}-\frac{5}{24}=\frac{329}{384}\right)e^4\gamma^2\\
-\left(\frac{43}{864}+\frac{91}{768}-\frac{31}{960}-\frac{1}{40}=\frac{767}{6912}\right)e^6-\left(\frac{15283}{1536}-\frac{121}{256}=\frac{14557}{1536}\right)m^6\\
+\left(\frac{5}{192}+\frac{7}{256}+\frac{7}{960}=\frac{233}{3840}\right)e^2\gamma^4+\frac{185}{256}m^4\gamma^2-\frac{135}{32}m^2\varepsilon'^4\\
+\left(\frac{10867}{256}+\frac{9}{4}=\frac{11443}{256}\right)m^4\varepsilon'^2\\
+\left(\frac{369}{64}+\frac{1345}{32}-\frac{390845}{3072}+\frac{20209}{3072}+\frac{847}{3840}=-\frac{69727}{960}\right)m^4e^2\\
+\left(\frac{2279}{256}+\frac{9}{64}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-\frac{1123}{768}+\frac{9}{16}+\frac{411}{192}=\frac{18017}{1920}\right)m^2e^4\\
+\left(\frac{1}{64}-\frac{7}{768}=\frac{5}{768}\right)m^2\gamma^4-\left(\frac{811}{96}-\frac{3}{2}-\frac{27}{16}-\frac{21}{20}=\frac{2021}{480}\right)m^2c^2\varepsilon'^2\\
+\left(\frac{1731}{256}-\frac{3}{4}-2-\frac{15}{128}=\frac{997}{256}\right)m^2e^2\gamma^2+\frac{15}{4}m^2\gamma^2\varepsilon'^2-\frac{75}{128}m^2b^4\\
-\frac{25}{24}\varepsilon'^2b^4-\frac{21}{4}m^2e^2(\varepsilon'^2-E'^2)-\frac{9}{4}m^2e^2E'^2
\end{array}\right\}$$

$$\sin 2c.nt\; e^2\left\{\begin{array}{l}
-\left(\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}\right)e^2-\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{64}=\frac{5}{192}\right)\gamma^4\\
-\left(2-\frac{16}{15}-\frac{59}{192}-\frac{37}{72}=\frac{323}{2880}\right)e^4+\left(\frac{8}{3}-\frac{7}{12}=\frac{25}{12}\right)e^2\gamma^2\\
-\left(6-\frac{9}{4}=\frac{15}{4}\right)m^2\varepsilon'^2-\left(\frac{121}{96}-\frac{121}{256}=\frac{605}{768}\right)m^4\\
-\left(\frac{3}{2}+\frac{139}{8}-6-\frac{979}{192}=\frac{1493}{192}\right)m^2e^2-\left(\frac{649}{72}-\frac{649}{192}=\frac{3245}{576}\right)m^5\\
-\left(\frac{363}{512}+\frac{7823}{192}-\frac{363}{128}-\frac{44881}{3072}=\frac{73753}{3072}\right)m^6
\end{array}\right\}$$

$$\sin 3c.nt\; e^3\left\{\frac{27}{4}-1-\frac{27}{5}=\frac{7}{20}\right\}e^2$$

$$\sin 2g.nt\; \gamma^2\left(\frac{1}{3}e^2+\frac{121}{768}m^4\right)$$

$$\sin 2g.nt - c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\right) e^2 - \frac{45}{32} m e^2 \right\}$$

$$\sin 2g.nt + c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \right\} e^2$$

$$\sin c'm.nt \quad \varepsilon' \left(m^3 e^2 - \frac{659}{64} m^5 e^2 + \frac{121}{256} m^7 \right)$$

$$\sin c.nt + c'm.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}\right) m e^2 + \left(\frac{363}{1024} + \frac{121}{256} = \frac{847}{1024}\right) m^5 \\ + \left(\frac{45815}{8192} + \frac{363}{512} + \frac{649}{192} + \frac{363}{256} = \frac{272789}{24576}\right) m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin c.nt - c'm.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} - \left(1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}\right) m e^2 - \left(\frac{363}{1024} + \frac{121}{256} = \frac{847}{1024}\right) m^5 \\ - \left(\frac{74371}{8192} - \frac{363}{512} + \frac{649}{192} - \frac{363}{256} = \frac{253913}{24576}\right) m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin c.nt - 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2 \left\{ - \frac{9}{16} - \frac{3}{4} = - \frac{21}{16} \right\} m e^2$$

$$\sin 2c.nt - c'm.nt \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{9}{4} - 3 - \frac{12}{5} = - \frac{63}{20} \right\} m e^2$$

$$\sin 2g.nt - c'm.nt \quad \varepsilon'\gamma^2 \left\{ 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \right\} m e^2$$

$$\sin 2E.nt \left\{ \begin{array}{l} - \frac{11}{6} m^2 e^2 - \left(\frac{59}{9} - \frac{11}{3} = \frac{26}{9}\right) m^3 e^2 - \left(\frac{88931}{3456} + \frac{11}{6} - \frac{118}{9} = \frac{49955}{3456}\right) m^4 e^2 \\ - \left(\frac{10502231}{82944} + \frac{59}{9} + \frac{605}{256} - \frac{88931}{1728} = \frac{6973307}{82944}\right) m^5 e^2 - \frac{1331}{1536} m^6 \\ - \left(\frac{7139}{768} - \frac{1331}{768} = \frac{121}{16}\right) m^7 - \left(\frac{261217}{4608} + \frac{1331}{1536} - \frac{7139}{384} = \frac{89771}{2304}\right) m^8 \\ - \left(10 - \frac{15}{4} = \frac{25}{4}\right) m e^4 - \left(\frac{317}{6} - \frac{11}{3} - 30 - \frac{1575}{128} + \frac{15}{2} = \frac{5515}{384}\right) m^2 e^4 \\ - \left(\frac{44}{3} - \frac{118}{9} + \frac{36227}{144} - \frac{317}{2} + 30 - \frac{23753}{384} + \frac{1575}{64} - \frac{15}{4} = \frac{96347}{1152}\right) m^3 e^4 \\ + \frac{1}{4} m e^2 \gamma^2 + \left(\frac{91}{48} - \frac{1}{2} = \frac{67}{48}\right) m^2 e^2 \gamma^2 + \left(\frac{7795}{1152} - \frac{91}{24} + \frac{1}{4} = \frac{3715}{1152}\right) m^3 e^2 \gamma^2 \\ + \frac{369}{1024} m^5 \gamma^2 + \frac{55}{12} m^2 e^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{3575}{144} - \frac{1}{6} + \frac{135}{16} - \frac{55}{6} = \frac{1723}{72}\right) m^3 e^2 \varepsilon'^2 \\ - \left(39 - 2 + \frac{105}{256} - \frac{365}{32} = \frac{6657}{256}\right) m e^6 + \frac{m \gamma^6}{256} - \frac{11}{384} m^2 \gamma^4 \\ - \left(\frac{65}{256} - \frac{1}{32} = \frac{57}{256}\right) m e^2 \gamma^4 + \left(15 - \frac{1}{2} - \frac{1303}{256} = \frac{2409}{256}\right) m e^4 \gamma^2 \\ - \frac{5}{8} m e^2 \varepsilon'^2 \gamma^2 - \left(\frac{59}{576} - \frac{11}{192} = \frac{13}{288}\right) m^3 \gamma^4 - \frac{33}{8} m^4 \varepsilon'^2 \\ - \left(\frac{59}{4} - \frac{33}{4} = \frac{13}{2}\right) m^5 \varepsilon'^2 + \frac{9}{16} m^3 \varepsilon'^2 \gamma^2 + \left(25 - \frac{75}{8} = \frac{125}{8}\right) m e^4 \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - c.nt\; e \left\{\begin{aligned}
&-\frac{5}{4}me^2-\left(\frac{95}{16}-5-\frac{11}{24}=\frac{23}{48}\right)m^2e^2\\
&-\left(\frac{11}{4}-\frac{118}{72}+\frac{11081}{384}-\frac{95}{4}+\frac{55}{8}=\frac{15083}{1152}\right)m^3e^2\\
&-\left\{\begin{aligned}&\frac{59}{6}-\frac{93683}{13824}-\frac{209}{32}+\frac{1325327}{9216}\\&-\frac{11081}{96}+\frac{55}{8}+\frac{1045}{32}+\frac{885}{64}=\frac{2163863}{27648}\end{aligned}\right\}m^4e^2\\
&-\left(\frac{15}{8}-\frac{5}{8}-\frac{115}{256}=\frac{205}{256}\right)me^4+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{16}=\frac{23}{16}\right)me^2\gamma^2\\
&+\frac{25}{8}me^2\varepsilon'^2-\frac{5}{256}m\gamma^4-\frac{45}{16}m^3\varepsilon'^2-\left(\frac{855}{64}-\frac{33}{32}-\frac{45}{4}=\frac{69}{64}\right)m^4\varepsilon'^2\\
&-\frac{605}{1024}m^5-\left(\frac{86405}{12288}-\frac{1331}{6144}-\frac{605}{256}=\frac{54703}{12288}\right)m^6\\
&-\left(\frac{3208569}{65536}-\frac{86405}{3072}+\frac{6655}{2048}-\frac{7139}{3072}+\frac{1331}{1024}=\frac{4533323}{196608}\right)m^7
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 2E.nt + c.nt\; e \left\{\begin{aligned}
&-\left(\frac{99}{8}-6=\frac{51}{8}\right)m^2e^2-\left(\frac{177}{4}-\frac{119}{8}+8-\frac{99}{4}=\frac{101}{8}\right)m^3e^2\\
&-\left(\frac{119}{6}-\frac{12239}{192}+\frac{1}{3}+\frac{93683}{512}-\frac{177}{2}+\frac{231}{32}=\frac{29755}{512}\right)m^4e^2\\
&+\left(\frac{1215}{32}-\frac{243}{8}-\frac{45}{8}=\frac{63}{32}\right)me^4+\left(\frac{27}{16}-\frac{9}{16}=\frac{9}{8}\right)me^2\gamma^2\\
&-\left(\frac{891}{32}-\frac{27}{2}=\frac{459}{32}\right)m^4\varepsilon'^2-\left(\frac{11979}{2048}-\frac{363}{128}=\frac{6171}{2048}\right)m^6
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt\; \varepsilon' \left\{\begin{aligned}
&\frac{11}{12}m^2e^2+\left(\frac{59}{36}-\frac{11}{12}+\frac{11}{2}=\frac{56}{9}\right)m^3e^2\\
&+\left(\frac{32243}{6912}-\frac{59}{36}+\frac{11}{48}+\frac{59}{3}-\frac{33}{4}=\frac{101411}{6912}\right)m^4e^2\\
&+\left(\frac{686255}{20736}-\frac{32243}{6912}+\frac{59}{144}-\frac{661}{288}-\frac{59}{2}+\frac{33}{8}=\frac{12127}{10368}\right)m^5e^2\\
&+\frac{1331}{3072}m^6+\left(\frac{35695}{9216}-\frac{1331}{3072}+\frac{1331}{512}=\frac{13915}{2304}\right)m^7\\
&-\frac{1}{4}me^2\gamma^2+\left(10-\frac{15}{4}=\frac{25}{4}\right)me^4
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{77}{12} m^2 e^2 - \left(\frac{413}{12} - \frac{77}{4} + \frac{11}{2} = \frac{62}{3} \right) m^3 e^2 \\ - \left(\frac{136765}{768} - \frac{413}{4} + \frac{231}{16} + \frac{59}{3} - \frac{99}{4} = \frac{21551}{256} \right) m^4 e^2 \\ - \left(\frac{1360627}{1536} - \frac{136765}{256} + \frac{1239}{16} + \frac{577}{144} - \frac{177}{2} + \frac{297}{8} = \frac{1758671}{4608} \right) m^5 e^2 \\ - \frac{9317}{3072} m^6 - \left(\frac{349811}{9216} - \frac{9317}{1024} + \frac{1331}{512} = \frac{72479}{2304} \right) m^7 \\ + \frac{7}{12} m e^2 \gamma^2 - \left(\frac{70}{3} - \frac{35}{4} = \frac{175}{12} \right) m e^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{4} m e^2 + \frac{605}{1024} m^5 \\ + \left(\frac{105655}{24576} - \frac{605}{512} + \frac{9559}{12288} = \frac{31911}{8192} \right) m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{35}{12} m e^2 - \frac{4235}{3072} m^5 \\ - \left(\frac{1371205}{73728} - \frac{4235}{512} + \frac{1573}{12288} = \frac{770803}{73728} \right) m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon'^2 \left(\frac{15}{16} m e^2 \right)$$

$$\sin E.nt \qquad b^2 \left\{ \frac{5}{8} m e^2 + \frac{605}{2048} m^5 + \left(\frac{24233}{6144} - \frac{605}{1024} = \frac{20603}{6144} \right) m^6 \right\}$$

$$\sin E.nt + c'm.nt \quad \varepsilon' b^2 \left(-\frac{5}{6} e^2 + \frac{15}{4} m e^2 \right)$$

$$\sin E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' b^2 \left(-\frac{5}{8} m e^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt - 2c.nt \quad e^2 \left\{ \frac{27225}{16384} - \frac{9075}{2048} = -\frac{45375}{16384} \right\} m^6.$$

Maintenant, il n'y a qu'à réunir les termes de cette dernière équation avec ceux qui forment le second membre de l'équation posée dans les pages 541-564, pour obtenir l'expression cherchée de v en fonction explicite du tems. L'équation suivante donne ce résultat important.

$$v = nt + \varepsilon - \int \zeta dv +$$

$$\sin c.nt \;\; e \left\{ \begin{array}{l} \left(2 + \frac{3}{2} m^2 - \frac{75}{64} m^3 - \frac{6659}{256} m^4 - \frac{4884375}{36864} m^5 - \frac{65756819}{147456} m^6\right) \\ - e^2 \left(\frac{1}{4} + 17 . m^2 + \frac{3195}{32} m^3 + \frac{4635997}{7680} m^4\right) \\ - \gamma^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{63}{32} m^2 - \frac{1467}{256} m^3 - \frac{22857}{512} m^4\right) \\ - \varepsilon'^2 \left(\frac{45}{4} m^2 + \frac{6455}{64} m^3 + \frac{281095}{512} m^4\right) + E'^2 \left(\frac{9}{4} m^2 + \frac{165}{32} m^3 - \frac{147}{256} m^4\right) \\ - \gamma^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{135}{256} m - \frac{3749}{2048} m^2\right) + e^4 \left(\frac{5}{96} + \frac{66863}{6144} m^2\right) \\ + e^2 \gamma^2 \left(\frac{23}{16} - \frac{405}{128} m + \frac{16029}{512} m^2\right) - \frac{195}{128} e^4 \gamma^2 + \frac{1761}{1280} e^2 \gamma^4 - \frac{5}{16} \gamma^6 \\ + \frac{5921}{161280} e^6 - \frac{75}{16} \varepsilon'^2 b^4 - \frac{135}{32} m^2 b^4 + \frac{45}{16} m^2 E'^4 - \frac{2025}{64} m^2 \varepsilon'^4 \\ + \frac{5171}{128} m^2 \gamma^2 \varepsilon'^2 - \frac{453}{128} m^2 \gamma^2 E'^2 - \frac{12831}{480} m^2 e^2 \varepsilon'^2 - \frac{33}{2} m^2 e^2 E'^2 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{21}{4} m^2 + \frac{165}{32} m^3 - \frac{7167}{256} m^4 + \frac{75}{16} b^4 \\ + \frac{501}{128} m^2 \gamma^2 + \frac{4107}{256} m^2 e^2 + \frac{105}{16} m^2 (\varepsilon'^2 + E'^2) \end{array} \right\} (\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\}$$

$$\sin 2c.nt \;\; e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{5}{4} + \frac{23}{16} m^2 - \frac{1485}{128} m^3 - \frac{5597}{64} m^4 - \frac{11972905}{24576} m^5 - \frac{15388364939}{8847360} m^6\right) \\ - e^2 \left(\frac{11}{24} + \frac{6221}{192} m^2\right) - \gamma^2 \left(\frac{15}{16} - \frac{135}{128} m - \frac{195}{256} m^2\right) - \frac{567}{16} m^2 \varepsilon'^2 \\ + \frac{141}{32} m^2 E'^2 + \frac{17}{192} e^4 - \frac{209}{192} \gamma^4 + \frac{523}{192} e^2 \gamma^2 + \frac{21}{2} m^2 (\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\}$$

$$\sin 3c.nt \;\; e^3 \left(\frac{13}{12} + \frac{41}{24} m^2 - \frac{23}{16} \gamma^2 - \frac{43}{64} e^2 \right)$$

$$\sin 4c.nt \;\; e^4 \left(\frac{103}{96} \right)$$

$$\sin 5c.nt \;\; e^5 \left(\frac{1097}{960} \right)$$

$$\sin g.nt - f.nt \;\; \gamma \frac{D^2}{a^2} \left(\Psi - K_{(2)}\right) \left(\frac{19}{3} . m^{-2} + \frac{13}{8} . m^{-1} \right\} \sin 2\omega$$

$$\sin g.nt + f.nt \;\; \gamma \frac{D^2}{a^2} \left(\Psi - K_{(2)}\right) \left(-\frac{1}{3} . m^{-2} \right) \sin 2\omega$$ (V. p. 425)

$$\sin 2g.nt \qquad \gamma^2\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{11}{16}m^2-\frac{33}{32}m^3-\frac{897}{512}m^4\right)+\frac{1}{8}\gamma^2-e^2\left(\frac{9}{16}-\frac{675}{128}m\right)\right\}$$

$$\sin 4g.nt \qquad \gamma^4\left(\frac{1}{32}\right)$$

$$\sin 2g.nt-c.nt \qquad e\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{3}{4}+\frac{135}{32}m+\frac{1077}{256}m^2+\frac{21387}{2048}m^3\right)\\ -\gamma^2\left(\frac{3}{8}-\frac{405}{128}m\right)+e^2\left(\frac{61}{32}-\frac{2025}{128}m\right)\end{array}\right\}$$

$$\sin 2g.nt+c.nt \qquad e\gamma^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{13}{16}m^2+\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{1}{16}e^2\right)$$

$$\sin 2g.nt-2c.nt \qquad e^2\gamma^2\left(\frac{1}{8}+\frac{135}{64}m\right)$$

$$\sin 2g.nt+2c.nt \qquad e^2\gamma^2\left(-\frac{13}{16}\right)$$

$$\sin 2g.nt-3c.nt \qquad e^3\gamma^2\left(\frac{7}{24}-\frac{405}{256}m\right)$$

$$\sin 2g.nt+3c.nt \qquad e^3\gamma^2\left(-\frac{59}{48}\right)$$

$$\sin 4g.nt-c.nt \qquad e\gamma^4\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$\sin 4g.nt+c.nt \qquad e\gamma^4\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\sin c'm.nt \qquad \varepsilon'\left\{\begin{array}{l}\left(-3.m+\frac{735}{16}m^3+\frac{1261}{4}m^4+\frac{142817}{96}m^5+\frac{3257665}{576}m^6+\frac{964470235}{55296}m^7\right)\\ -e^2\left(\frac{27}{8}m+\frac{2925}{32}m^2+\frac{459535}{512}m^3+\frac{39522017}{6144}m^4-\frac{6456951283}{294912}m^5\right)\\ +\gamma^2\left(\frac{27}{8}m-\frac{117}{32}m^2-\frac{19097}{512}m^3\right)-\frac{27}{8}m\,\varepsilon'^2\end{array}\right\}$$

$$\sin 2c'm.nt \qquad \varepsilon'^2\left(-\frac{9}{4}m+\frac{5751}{128}m^3+\frac{13871}{32}m^4-\frac{81}{32}m\,e^2+\frac{81}{32}m\,\gamma^2-\frac{7}{4}m\,\varepsilon'^2\right)$$

$$\sin 3c'm.nt \qquad \varepsilon'^3\left(-\frac{53}{24}m\right)$$

$$\sin 4c'm.nt \qquad \varepsilon'^4\left(-\frac{77}{32}m\right)$$

$$\sin c.nt + c'm.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{21}{4}m - \frac{717}{32}m^2 - \frac{3215}{32}m^3 - \frac{4173895}{6144}m^4 \\ -\frac{19962409}{9216}m^5 - \frac{18012013679}{1769472}m^6 \end{array} \right\} \\ -\frac{51}{32}m e^2 + \frac{147}{16}m\gamma^2 - \frac{189}{32}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin c.nt - c'm.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{21}{4}m + \frac{1233}{32}m^2 + \frac{15165}{64}m^3 + \frac{8548531}{6144}m^4 \\ +\frac{307373383}{36864}m^5 + \frac{91915773791}{1769472}m^6 \end{array} \right\} \\ +\frac{51}{32}m e^2 - \frac{147}{16}m\gamma^2 + \frac{189}{32}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin c.nt - 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{63}{16}m + \frac{5355}{128}m^2 + \frac{43557}{128}m^3 \\ -\frac{489}{128}m e^2 - \frac{441}{64}m\gamma^2 + \frac{49}{16}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin c.nt + 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2 \left(-\frac{63}{16}m - \frac{1245}{128}m^2 - \frac{10519}{256}m^3 \right)$$

$$\sin 2c.nt - c'm.nt \quad e^2\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \frac{105}{16}m + \frac{6081}{128}m^2 + \frac{139475}{512}m^3 \\ +\frac{449}{160}m e^2 - \frac{945}{64}m\gamma^2 + \frac{945}{128}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2c.nt + c'm.nt \quad e^2\varepsilon' \left(-\frac{105}{16}m - \frac{3669}{128}m^2 \right)$$

$$\sin 2c.nt + 2c'm.nt \quad e^2\varepsilon'^2 \left(-\frac{315}{64}m \right)$$

$$\sin 2c.nt - 2c'm.nt \quad e^2\varepsilon'^2 \left(\frac{315}{64}m \right)$$

$$\sin c.nt - 3c'm.nt \quad e\varepsilon'^3 \left(\frac{371}{96}m \right)$$

$$\sin c.nt + 3c'm.nt \quad e\varepsilon'^3 \left(-\frac{371}{96}m \right)$$

$$\sin 3c.nt + c'm.nt \quad e^3\varepsilon' \left(-\frac{273}{32}m \right)$$

$$\sin 3c.nt - c'm.nt \quad e^3\varepsilon' \left(\frac{273}{32}m \right)$$

$$\sin 2g.nt - c'm.nt \qquad \varepsilon'\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{16}m + \frac{123}{128}m^2 + \frac{4481}{512}m^3 \\ -\frac{9}{64}me^2 + \frac{21}{32}m\gamma^2 - \frac{27}{128}m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2g.nt + c'm.nt \qquad \varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{3}{16}m + \frac{153}{128}m^2 \right)$$

$$\sin 2g.nt + 2c'm.nt \qquad \varepsilon'^2\gamma^2 \left(\frac{9}{64}m \right)$$

$$\sin 2g.nt - 2c'm.nt \qquad \varepsilon'^2\gamma^2 \left(-\frac{9}{64}m \right)$$

$$\sin 2g.nt - c.nt + c'm.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left(-\frac{45}{32}m \right)$$

$$\sin 2g.nt - c.nt - c'm.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{45}{32}m \right)$$

$$\sin 2g.nt + c.nt + c'm.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{27}{16}m \right)$$

$$\sin 2g.nt + c.nt - c'm.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left(-\frac{27}{16}m \right)$$

$$\sin 2E.nt \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{8}m^2 + \frac{59}{12}m^3 + \frac{893}{72}m^4 + \frac{2855}{108}m^5 + \frac{8304449}{165888}m^6 \\ + \frac{102859909}{1244160}m^7 + \frac{5490485501}{37324800}m^8 \end{array} \right\} \\ + e^2\left(\frac{75}{16}m + \frac{1101}{64}m^2 + \frac{71471}{1024}m^3 + \frac{2673553}{12288}m^4 + \frac{144641579}{294912}m^5 \right) \\ - \gamma^2\left(\frac{3}{16}m + \frac{47}{64}m^2 + \frac{5149}{3072}m^3 + \frac{91745}{36864}m^4 + \frac{881273}{884736}m^5 \right) \\ - \varepsilon'^2\left(\frac{55}{16}m^2 + \frac{697}{24}m^3 + \frac{16543}{144}m^4 + \frac{70043}{768}m^5 \right) \\ - e^4\left(\frac{45}{32}m + \frac{199}{12}m^2 + \frac{904829}{9216}m^3 \right) + \gamma^4\left(\frac{101}{128}m^2 + \frac{4529}{3072}m^3 \right) \\ + \varepsilon'^4\left(\frac{143}{128}m^2 - \frac{427}{48}m^3 \right) + b^4\left(\frac{1925}{1024}m^2 + \frac{44415}{2048}m^3 \right) \\ - e^2\gamma^2\left(\frac{69}{16}m + \frac{1431}{64}m^2 - \frac{85115}{2048}m^3 \right) - e^2\varepsilon'^2\left(\frac{375}{32}m + \frac{11839}{192}m^2 + \frac{761227}{6144}m^3 \right) \\ + \varepsilon'^2\gamma^2\left(\frac{15}{32}m + \frac{269}{64}m^2 + \frac{76277}{2048}m^3 \right) + \frac{45}{64}m\varepsilon'^2\gamma^4 + \frac{135}{16}m^3e^2E'^2 \\ - \frac{39}{256}m\gamma^2\varepsilon'^4 + \frac{975}{256}me^2\varepsilon'^4 + \frac{345}{32}me^2\varepsilon'^2\gamma^2 + \frac{2127}{1024}me^2\gamma^4 + \frac{9345}{1024}me^4\gamma^2 \\ - \frac{45}{128}m\gamma^2b^4 + \frac{225}{64}me^4\varepsilon'^2 + \frac{525}{128}me^2b^4 + \frac{375}{128}m\varepsilon'^2b^4 + \frac{5}{64}m\gamma^6 - \frac{19199}{768}me^6 \\ + \left\{ \frac{33}{8}m^4 + \frac{175}{16}m^5 - \frac{27}{32}m^3\gamma^2 + \frac{1305}{32}m^3e^2 \right\} \left(\varepsilon'^2 - E'^2 \right) \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - c.nt\; e \left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{4}m + \frac{263}{16}m^2 + \frac{50377}{768}m^3 + \frac{1973903}{9216}m^4 + \frac{127960397}{221184}m^5 \\ + \frac{3496767841}{2654208}m^6 + \frac{918696205445}{1274019840}m^7\end{array}\right\} \\
- e^2\left(\frac{369}{64}m^2 + \frac{827639}{18432}m^3 + \frac{14428681}{24576}m^4\right) \\
- \gamma^2\left(\frac{39}{16}m + \frac{981}{64}m^2 + \frac{74095}{1024}m^3 + \frac{3469829}{12288}m^4\right) \\
- \varepsilon'^2\left(\frac{75}{8}m + \frac{575}{16}m^2 - \frac{326681}{1536}m^3 - \frac{36126953}{9216}m^4\right) \\
+ \frac{3}{4}m\gamma^4 + \frac{105}{32}m\,b^4 + \frac{195}{64}m\,\varepsilon'^4 + \frac{45}{256}m\,e^4 + \frac{417}{128}m\,e^2\gamma^2 \\
+ \frac{1545}{256}m\,\varepsilon'^2\gamma^2 - \frac{99}{4}m^4E'^2 + \left(\frac{135}{8}m^3 + \frac{99}{8}m^4\right)(\varepsilon'^2 - E'^2)
\end{array}\right.$$

$$\sin 2E.nt + c.nt\; e \left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{17}{8}m^2 + \frac{169}{24}m^3 + \frac{10495}{576}m^4 + \frac{1869001}{55296}m^5 + \frac{940855}{82944}m^6\right) \\
+ e^2\left(\frac{195}{32}m + \frac{2655}{128}m^2 + \frac{180599}{2048}m^3 + \frac{2354603}{8192}m^4\right) \\
- \gamma^2\left(\frac{3}{8}m + \frac{29}{16}m^2 + \frac{7061}{1536}m^3 + \frac{169267}{18432}m^4\right) \\
- \varepsilon'^2\left(\frac{85}{16}m^2 + \frac{1579}{24}m^3 + \frac{967447}{2304}m^4\right) + \frac{297}{64}m^4E'^2 - \frac{225}{64}m\,e^4 \\
+ \frac{45}{128}m\gamma^4 - \frac{129}{16}m\,e^2\gamma^2 + \frac{15}{16}m\,\varepsilon'^2\gamma^2 + \frac{1149}{64}m^4(\varepsilon'^2 - E'^2)
\end{array}\right.$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt\; \varepsilon' \left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}-\frac{11}{16}m^2 - \frac{257}{48}m^3 - \frac{7337}{576}m^4 + \frac{124223}{3456}m^5 \\ + \frac{178759285}{331776}m^6 + \frac{33403086163}{9953280}m^7\end{array}\right\} \\
- e^2\left\{\begin{array}{l}\frac{75}{16}m + \frac{1113}{64}m^2 - \frac{63385}{1024}m^3 \\ - \frac{14201441}{4096}m^4 + \frac{2764481281}{294912}m^5\end{array}\right\} \\
+ \gamma^2\left(\frac{3}{16}m + \frac{73}{64}m^2 + \frac{24397}{3072}m^3\right) + \varepsilon'^2\left(\frac{11}{128}m^2 - \frac{1921}{384}m^3\right) \\
+ \frac{69}{16}m\,e^2\gamma^2 - \frac{3}{128}m\,\varepsilon'^2\gamma^2 + \frac{75}{128}m\,e^2\varepsilon'^2 + \frac{105}{32}m\,e^4 - \frac{375}{128}m\,b^4
\end{array}\right.$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{77}{16}m^2 + \frac{479}{16}m^3 + \frac{7551}{64}m^4 + \frac{127385}{384}m^5 \\ + \frac{17924309}{36864}m^6 - \frac{872999227}{552960}m^7 \end{array} \right\} \\ + e^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{175}{16}m + \frac{4541}{64}m^2 + \frac{392779}{1024}m^3 \\ + \frac{7220939}{4096}m^4 + \frac{2064626611}{294912}m^5 \end{array} \right\} \\ - \gamma^2 \left(\frac{7}{16}m + \frac{209}{64}m^2 + \frac{17587}{1024}m^3 \right) - \varepsilon'^2 \left(\frac{1253}{128}m^2 + \frac{12669}{128}m^3 \right) \\ - \frac{161}{16}m e^2 \gamma^2 + \frac{123}{128}m \varepsilon'^2 \gamma^2 - \frac{245}{32}m e^4 - \frac{3075}{128}m e^2 \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 2c.nt \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{45}{16}m + \frac{53}{4}m^2 + \frac{276049}{3072}m^3 + \frac{8005693}{18432}m^4 \\ + \frac{2166605291}{884736}m^5 + \frac{941693724529}{106168320}m^6 \end{array} \right\} \\ + \frac{15}{64}m e^2 - \frac{57}{32}m \gamma^2 - \frac{225}{32}m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2c.nt \quad e^2 \left(\frac{95}{32}m^2 + \frac{913}{96}m^3 + \frac{132853}{5760}m^4 + \frac{515}{64}m e^2 - \frac{39}{64}m \gamma^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{16}m - \frac{11}{8}m^2 - \frac{2939}{3072}m^3 - \frac{168653}{18432}m^4 \\ - \frac{33}{64}m \gamma^2 - \frac{75}{32}m e^2 - \frac{45}{32}m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2g.nt \quad \gamma^2 \left(- \frac{11}{32}m^2 + \frac{3}{64}m \gamma^2 - \frac{35}{64}m e^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2 \left(- \frac{33}{32}m^3 + \frac{9}{64}m \gamma^2 - \frac{225}{64}m e^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{187}{16}m^2 + \frac{9707}{96}m^3 + \frac{78625}{144}m^4 \\ + \frac{60865501}{27648}m^5 + \frac{1275}{64}m e^2 - \frac{51}{64}m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{15}{4}m - \frac{173}{32}m^2 + \frac{49045}{384}m^3 + \frac{29319517}{18432}m^4 \\ + \frac{2827212637}{221184}m^5 + \frac{224176571881}{2654208}m^6 \end{array} \right\} \\ + \frac{39}{16}m \gamma^2 + \frac{15}{32}m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{35}{4} m + \frac{1801}{32} m^2 + \frac{32429}{128} m^3 + \frac{1830091}{2048} m^4 \\ + \frac{1211197}{8192} m^5 + \frac{9159943057}{589824} m^6 \end{array} \right\} \\ - \frac{91}{16} m \gamma^2 - \frac{615}{32} m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} - \frac{17}{16} m^2 - \frac{2633}{192} m^3 - \frac{280873}{4608} m^4 \\ - \frac{9677359}{55296} m^5 + \frac{3}{8} m \gamma^2 - \frac{195}{32} m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \frac{119}{16} m^2 + \frac{3131}{64} m^3 + \frac{115757}{512} m^4 \\ + \frac{5266351}{6144} m^5 - \frac{7}{8} m \gamma^2 + \frac{455}{32} m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 3c'm.nt \quad \varepsilon'^3 \left(\frac{11}{384} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - 3c'm.nt \quad \varepsilon'^3 \left(\frac{9295}{384} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - 3c.nt \quad e^3 \left(\frac{105}{32} m + \frac{6011}{384} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt + 3c.nt \quad e^3 \left(\frac{1093}{64} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left(- \frac{45}{16} m + \frac{193}{32} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left(\frac{105}{16} m + \frac{577}{16} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left(- \frac{95}{64} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left(\frac{665}{64} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left(- \frac{9}{16} m - \frac{59}{32} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left(\frac{21}{16} m - \frac{11}{4} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left(\frac{11}{64} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left(- \frac{77}{64} m^2 \right)$$

$\sin 2E.nt - 2g.nt - c.nt$	$e\gamma^2\left(\frac{3}{8}m - \frac{61}{16}m^2\right)$
$\sin 2E.nt + 2g.nt - c.nt$	$e\gamma^2\left(-\frac{15}{16}m - \frac{19}{4}m^2\right)$
$\sin 2E.nt - 2g.nt + c.nt$	$e\gamma^2\left(-\frac{33}{32}m + \frac{231}{256}m^2\right)$
$\sin 2E.nt + 2g.nt + c.nt$	$e\gamma^2\left(-\frac{39}{32}m^2\right)$
$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon'^2\left(\frac{255}{16}m + \frac{17179}{128}m^2 + \frac{291049}{384}m^3 + \frac{219639709}{73728}m^4\right)$
$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon'^2\left\{\begin{matrix}-\frac{45}{16}m - \frac{6219}{128}m^2 - \frac{46669}{128}m^3 + 15.me^2 \\ +\frac{117}{64}m\gamma^2 - \frac{35}{8}m\varepsilon'^2 + \frac{297}{256}e^4.m^{-1}\end{matrix}\right\}$
$\sin 2E.nt - 2c'm.nt + c.nt$	$e\varepsilon'^2\left(\frac{289}{16}m^2\right)$
$\sin 2E.nt + 2c'm.nt + 2c.nt$	$e^2\varepsilon'^2\left(\frac{885}{64}m + \frac{297}{256}e^2.m^{-1}\right)$
$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - 2c.nt$	$e^2\varepsilon'^2\left(\frac{765}{64}m\right)$
$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - 2g.nt$	$\gamma^2\varepsilon'^2\left(-\frac{27}{64}m - \frac{135}{512}e^2.m^{-1}\right)$
$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - 2g.nt$	$\gamma^2\varepsilon'^2\left(\frac{153}{64}m\right)$
$\sin 2E.nt + c'm.nt - 3c.nt$	$e^3\varepsilon'\left(-\frac{105}{32}m\right)$
$\sin 2E.nt - c'm.nt - 3c.nt$	$e^3\varepsilon'\left(\frac{245}{32}m\right)$
$\sin 2E.nt + 2g.nt - 2c.nt$	$e^2\gamma^2\left(-\frac{5}{2}m\right)$
$\sin 2E.nt - 2g.nt - 2c.nt$	$e^2\gamma^2\left(-\frac{15}{32}m\right)$
$\sin 2E.nt - 2g.nt + 2c.nt$	$e^2\gamma^2\left(-\frac{45}{32}m\right)$
$\sin 2E.nt - 4g.nt$	$\gamma^4\left(-\frac{3}{32}m\right)$

$$\sin 2E.nt - 4c.nt \qquad e^4\left(\frac{25}{4}m\right)$$

$$\sin 2E.nt + 3c'm.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'^3\left(-\frac{5}{32}m\right)$$

$$\sin 2E.nt - 3c'm.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'^3\left(\frac{845}{32}m\right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{33}{32}m\right)$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{77}{32}m\right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{3}{8}m\right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{15}{16}m\right)$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{35}{16}m\right)$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{7}{8}m\right)$$

$$\sin E.nt \quad b^2\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{15}{8}m - \frac{93}{8}m^2 - \frac{6927}{128}m^3 - \frac{138189}{512}m^4 - \frac{1553407}{1024}m^5 - \frac{223611751}{24576}m^5\right)\\ -\frac{105}{16}me^2 + \frac{165}{32}m\gamma^2 - \frac{15}{8}m\varepsilon'^2\end{array}\right\}$$

$$\sin E.nt - c.nt \qquad eb^2\left(-\frac{165}{32}m - \frac{7317}{256}m^2 - \frac{156147}{1024}m^3 - \frac{14427729}{16384}m^4\right)$$

$$\sin E.nt + c.nt \qquad eb^2\left(-\frac{75}{32}m - \frac{117}{8}m^2 - \frac{70415}{1024}m^3 - \frac{1966573}{6144}m^4\right)$$

$$\sin E.nt + c'm.nt \quad \varepsilon'b^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{5}{2} - \frac{45}{4}m + \frac{2223}{32}m^2 - \frac{124805}{768}m^3\right) + e^2\left(\frac{15}{2} + \frac{3335}{32}m\right)\\ -\gamma^2\left(\frac{15}{8} + \frac{325}{16}m\right) + \varepsilon'^2\left(\frac{5}{2} - \frac{375}{8}m\right) + \frac{15}{8}e^2\gamma^2 . m^{-1}\end{array}\right\}$$

$$\sin E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon'b^2\left(\frac{15}{8}m - \frac{931}{32}m^2 - \frac{37669}{768}m^3 - \frac{265}{32}me^2 + \frac{135}{64}m\gamma^2 - \frac{75}{16}m\varepsilon'^2\right)$$

$$\sin E.nt - 2c.nt \quad e^2b^2\left(-\frac{435}{64}m\right)$$

$$\sin E.nt + 2c.nt \quad e^2b^2\left(-\frac{195}{64}m\right)$$

$$\sin E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2b^2\left(-\frac{75}{32}m\right)$$

$\sin E.nt + 2g.nt$	$\gamma^2 b^2 \left(\frac{15}{32} m \right)$
$\sin E.nt + 2c'm.nt$	$\varepsilon'^2 b^2 \left(-\frac{255}{64} m \right)$
$\sin E.nt - 2c'm.nt$	$\varepsilon'^2 b^2 \left(\frac{435}{64} m \right)$
$\sin E.nt + c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left(\frac{25}{8} - \frac{1095}{32} m + \frac{15}{4} \gamma^2 . m^{-1} \right)$
$\sin E.nt + c'm.nt + c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left(\frac{25}{8} - \frac{225}{16} m \right)$
$\sin E.nt - c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left(-\frac{45}{64} m \right)$
$\sin E.nt - c'm.nt + c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left(\frac{75}{32} m \right)$
$\sin E.nt + c'm.nt - 2c.nt$	$e^2 \varepsilon' b^2 \left(\frac{105}{16} \right)$
$\sin E.nt + c'm.nt + 2c.nt$	$e^2 \varepsilon' b^2 \left(\frac{65}{16} \right)$
$\sin E.nt + c'm.nt - 2g.nt$	$\gamma^2 \varepsilon' b^2 \left(\frac{5}{24} \right)$
$\sin E.nt + c'm.nt + 2g.nt$	$\gamma^2 \varepsilon' b^2 \left(-\frac{5}{8} \right)$
$\sin 3E.nt$	$b^2 \left(\frac{15}{32} m^2 - \frac{5}{8} m^3 - \frac{1031}{64} m^4 - \frac{666889}{6144} m^5 \right)$
$\sin 3E.nt - c.nt$	$eb^2 \left(-\frac{2535}{256} m^2 - \frac{81865}{1024} m^3 - \frac{7611089}{16384} m^4 \right)$
$\sin 3E.nt + c.nt$	$eb^2 \left(\frac{115}{128} m^2 \right)$
$\sin 3E.nt + c'm.nt$	$\varepsilon' b^2 \left(\frac{35}{16} m^2 \right)$
$\sin 3E.nt - c'm.nt$	$\varepsilon' b^2 \left(\frac{75}{32} m^2 \right)$
$\sin 3E.nt - 2c.nt$	$e^2 b^2 \left(-\frac{175}{32} m \right)$
$\sin 3E.nt - 2g.nt$	$\gamma^2 b^2 \left(-\frac{25}{32} m \right)$
$\sin 3E.nt + c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left(\frac{345}{64} m \right)$
$\sin 4E.nt$	$\left(\frac{201}{256} m^4 + \frac{649}{120} m^5 + \frac{647623}{28800} m^6 - \frac{33}{128} m^3 \gamma^2 + \frac{1425}{128} m^3 e^2 \right)$

$$\sin 4E.nt - c.nt \quad e \left\{ \begin{array}{l} \frac{255}{64} m^3 + \frac{7701}{256} m^4 + \frac{631979}{4096} m^5 \\ + \frac{413887919}{737280} m^6 + \frac{2925}{256} m^2 e^2 - \frac{45}{64} m^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4E.nt + c.nt \quad e \left(\frac{309}{128} m^4 \right)$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt \quad \varepsilon' \left(- \frac{201}{256} m^4 - \frac{5611}{640} m^5 - \frac{3195}{256} m^3 e^2 + \frac{99}{128} m^3 \gamma^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' \left(\frac{1407}{256} m^4 + \frac{19981}{384} m^5 + \frac{12605}{256} m^3 e^2 - \frac{385}{128} m^3 \gamma^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt - 2c.nt \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1125}{256} m^2 + \frac{29055}{512} m^3 + \frac{1080043}{8192} m^4 \\ + \frac{73818043}{61440} m^4 + \frac{466018749241}{235929600} m^6 \end{array} \right\}$$

$$\sin 4E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2 \left(- \frac{9}{256} m^2 + \frac{255}{512} m^3 + \frac{5425}{8192} m^4 \right)$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left(- \frac{765}{128} m^3 - \frac{10841}{256} m^4 - \frac{3547567}{8192} m^5 \right)$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left(\frac{2975}{128} m^3 + \frac{43949}{192} m^4 + \frac{103321481}{73728} m^5 \right)$$

$$\sin 4E.nt - 3c.nt \quad e^3 \left(\frac{675}{256} m^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt - 2g.nt - c.nt \quad e\gamma^2 \left(\frac{99}{128} m^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt - 2g.nt + c.nt \quad e\gamma^2 \left(- \frac{9}{128} m^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left(- \frac{1125}{128} m^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left(\frac{2625}{128} m^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left(\frac{9}{128} m^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - 2g.nt \quad \gamma^2\varepsilon' \left(- \frac{21}{128} m^2 \right).$$

52. Pour faciliter la réduction en nombres de la formule qu'on vient de trouver, ainsi que celle des différentes formules qui déterminent le mouvement de la Lune, je vais présenter ici réunis les logarithmes des quantités littérales qui entrent dans la composition des coefficiens, tels qu'ils dérivent des élémens numériques posés dans les pages 483 et 484.

Logarithmes des quantités littérales qui entrent dans l'expression des coefficiens des coordonnées du centre de gravité de la Lune.

Nombre	Logarithme	Logarithme du même nombre divisé par *sin* 1″
QUANTITÉS DU PREMIER ORDRE		
m	8,8739091	4,1883342
e	8,7391576	4,0535827
ε'	8,2256710	3,5400961
γ	8,9545271	4,2689522
$\frac{D}{a}$	8,2191311	. . . . . .
$K_{(2)}-\Psi$	7,1899350	. . . . . .
i	8,0555173	. . . . . .
QUANTITÉS DU SECOND ORDRE		
m^2	7,7478182	3,0622433
me	7,6130667	2,9274918
$m\gamma$	7,8284362	3,1428613
$m\varepsilon'$	7,0995801	2,4140051
e^2	7,4783152	2,7927403
γ^2	7,9090542	3,2234793
ε'^2	6,4513420	1,7657671
$e\varepsilon'$	6,9648286	2,2792537
b^2	7,4015111	2,7159362
$\frac{D^2}{a^2}$	6,4382622	. . . . . .
$m\gamma$	7,8284362	3,1428613
$e\gamma$	7,6936847	3,0081098
$\varepsilon'\gamma$	7,1801981	2,4946232

Nombre	Logarithme	Logarithme du même nombre divisé par *sin* 1″
QUANTITÉS DU TROISIÈME ORDRE		
m^3	6,6217273	1,9361524
m^2e	6,4869758	1,8014009
$m^2\varepsilon'$	5,9734892	1,2879143
me^2	6,3522243	1,6666494
$m\varepsilon'^2$	5,3252511	0,6396762
$m\gamma^2$	6,7829633	2,0973884
$me\varepsilon'$	5,8387377	1,1531628
$m^2\gamma$	6,7023453	2,0167704
$m\varepsilon'\gamma$	6,0541072	1,3685323
e^3	6,2174728	1,5318979
γ^3	6,8635813	2,1780064
ε'^3	4,6770130	9,9914381
$e^2\varepsilon'$	5,7039862	1,0184113
$e^2\gamma$	6,4328423	1,7472674
$e\varepsilon'^2$	5,1904996	0,5049247
$e\gamma^2$	6,6482118	1,9626369
$\varepsilon'\gamma^2$	6,1347252	1,4491503
eb^2	6,1406687	1,4550938
$\varepsilon'b^2$	5,6271821	0,9416072
γb^2	6,3560832	1,6704633
mb^2	6,2754202	1,5898453
$\frac{D^2}{a^2}(K_{(2)}-\Psi)$	3,6281972	8,9426223
$me\gamma$	6,5675938	1,8820189
$\varepsilon'^2\gamma$	5,4058691	0,7202942
$e\varepsilon'\gamma$	5,9193557	1,2337808

Nombre	Logarithme	Logarithme du même nombre divisé par *sin* 1″	Nombre	Logarithme	Logarithme du même nombre divisé par *sin* 1″
QUANTITÉS DU QUATRIÈME ORDRE					
m^4	5,4956364	0,8100615	$e^2\varepsilon'^2$	3,9296572	9,2440823
m^3e	5,3608849	0,6753100	$e^2\gamma^2$	5,3873691	0,7017945
$m^3\varepsilon'$	4,8473983	0,1618234	$e\varepsilon'\gamma^2$	4,8738828	0,1883079
m^2e^2	5,2261334	0,5405585	$e\varepsilon'^3$	3,4161706	8,7305957
$m^2\varepsilon'^2$	4,1991602	9,5135853	$\varepsilon'^2\gamma^2$	4,3603962	9,6748213
$m^2\gamma^2$	5,6568724	0,9712975	m^2b^2	5,1493293	0,4637544
$m^2e\varepsilon'$	4,7126468	0,0270719	$m\varepsilon'b^2$	4,5010912	9,8155163
me^3	5,0913819	0,4058070	meb^2	5,0145778	0,3290029
$m\varepsilon'^3$	3,5509221	8,8653472	$e\varepsilon'b^2$	4,3663397	9,6807648
$me^2\varepsilon'$	4,5778953	9,8923204	ε'^2b^2	3,8528531	9,1672782
$me\varepsilon'^2$	4,0644087	9,3788338	e^2b^2	4,8798263	0,1942514
$me\gamma^2$	5,5221209	0,8365460	γ^2b^2	5,3105653	0,6249904
$m\varepsilon'\gamma^2$	5,0086343	0,3230594	b^4	4,8030222	0,1174473
$m^2e\gamma$	5,4416029	0,7559280	$me\varepsilon'\gamma$	4,7932648	0,1076899
$me^2\gamma$	5,3067514	0,6211765	$mb^2\gamma$	5,2299473	0,5443724
$m^2\varepsilon'\gamma$	4,9280163	0,2424414	$e^3\gamma$	5,1719999	0,4864250
$m\varepsilon'^2\gamma$	4,2797782	9,5942033	$e^2\varepsilon'\gamma$	4,6585133	0,0729384
$m^3\gamma$	5,5762554	0,8906795	$e\varepsilon'^2\gamma$	4,1450267	9,4594518
$m\gamma^3$	5,7374904	1,0519155	$e\gamma^3$	5,6027389	0,9171640
e^4	4,9566304	0,2710555	$\varepsilon'^3\gamma$	3,6315401	8,9459652
γ^4	5,8181081	1,1325335	$\varepsilon'\gamma^3$	5,0892523	0,4036774
ε'^4	2,9026840	8,2171091	$eb^2\gamma$	5,0951958	0,4096209
$e^3\varepsilon'$	4,4431438	9,7575689	$\varepsilon'b^2\gamma$	4,5817092	9,8961343

Nombre	Logarithme	Logarithme du même nombre divisé par sin 1''	Nombre	Logarithme	Logarithme du même nombre divisé par sin 1''
QUANTITÉS DU CINQUIÈME ORDRE					
m^5	4,3695455	9,6839706	$m^2\varepsilon'\gamma^2$	3,8825434	9,1969685
m^4e	4,2347940	9,5492191	$m^2\varepsilon'b^2$	3,3750003	8,6894254
$m^4\varepsilon'$	3,7213074	9,0357325	$m^2\varepsilon'^2\gamma$	3,1536873	8,4681124
$m^4\gamma$	4,4501635	9,7645886	$m^2\gamma b^2$	4,1138564	9,4282815
m^3e^2	4,1000425	9,4144676	$m^2e\varepsilon'\gamma$	3,6671739	8,9815990
$m^3\varepsilon'^2$	3,0730693	8,3874944	me^4	3,8305395	9,1449646
$m^3\gamma^2$	4,5307815	9,8452066	$m\varepsilon'^4$	1,7765931	7,0910182
m^3b^2	4,0232384	9,3376635	$m\gamma^4$	4,6920175	0,0064426
$m^3e\varepsilon'$	3,5865559	8,9009810	mb^4	3,6769313	8,9913564
$m^3e\gamma$	4,3154120	9,6298371	$me^3\varepsilon'$	3,3170529	8,6314780
$m^3\varepsilon'\gamma$	3,8019254	9,1163505	$me^3\gamma$	4,0459090	9,3603341
m^2e^3	3,9652910	9,2797161	$me^2\varepsilon'^2$	2,8035667	8,1179918
$m^2\varepsilon'^3$	2,4248312	7,7392563	$me^2\gamma^2$	4,2612785	9,5757036
$m^2\gamma^3$	4,6113995	9,9258246	me^2b^2	3,7537354	9,0681605
$m^2e^2\varepsilon'$	3,4518044	8,7662295	$me\varepsilon'^3$	2,2900797	7,6045048
$m^2e^2\gamma$	4,1806605	9,4950856	$me\gamma^3$	4,4766480	9,7910731
$m^2e\varepsilon'^2$	2,9383178	8,2527429	$me\varepsilon'\gamma^2$	3,7477919	9,0622170
$m^2e\gamma^2$	4,3960300	9,7104551	$me\varepsilon'^2\gamma$	3,0189358	8,3333609
m^2eb^2	3,8884869	9,2029120	$me\varepsilon'b^2$	3,2402488	8,5546739

Nombre	Logarithme	Logarithme du même nombre divisé par *sin* 1″	Nombre	Logarithme	Logarithme du même nombre divisé par *sin* 1″
QUANTITÉS DU CINQUIÈME ORDRE					
$me\gamma b^2$	3,9691049	9,2835300	$e^2\varepsilon' b^2$	3,1054973	8,4199224
$m\varepsilon'^3\gamma$	2,5054492	7,8198743	$e^2\gamma b^2$	3,8343534	9,1487785
$m\varepsilon'^2\gamma^2$	3,2343053	8,5487304	$e\varepsilon'^4$	1,6418416	6,9562667
$m\varepsilon'^2 b^2$	2,7267622	8,0411873	$e\gamma^4$	4,5572660	9,8716911
$m\varepsilon'\gamma^3$	3,9631614	9,2775865	eb^4	3,5421798	8,8566049
$m\gamma^2 b^2$	4,1844744	9,4988995	$e\varepsilon'^3\gamma$	2,3706977	7,6851228
$m\varepsilon'\gamma b^2$	3,4556183	8,7700434	$e\varepsilon'^2\gamma^2$	3,0995538	8,4139789
$me^2\varepsilon'\gamma$	3,5324224	8,8468475	$e\varepsilon'^2 b^2$	2,5920107	7,9064358
e^5	3,6957880	9,0102131	$e\varepsilon'\gamma^3$	3,8284099	9,1428350
ε'^5	1,1283550	6,4427801	$e\varepsilon'\gamma b^2$	3,3208668	8,6352919
γ^5	4,7726355	0,0870606	$e\gamma^2 b^2$	4,0497229	9,3641480
$e^4\varepsilon'$	3,1823014	8,4967265	$\varepsilon'^4\gamma$	1,8572111	7,1716362
$e^4\gamma$	3,9111575	9,2255826	$\varepsilon'^2\gamma^3$	3,3149233	8,6293484
$e^3\varepsilon'^2$	2,6688148	7,9832399	$\varepsilon'^3\gamma^2$	2,5860672	7,9004923
$e^3\gamma^2$	4,1265270	9,4409521	$\varepsilon'^3 b^2$	2,0785241	7,3929492
$e^3 b^2$	3,6189839	8,9334090	$\varepsilon'^2\gamma b^2$	2,8073802	8,1218053
$e^3\varepsilon'\gamma$	3,3976709	8,7120960	$\varepsilon'\gamma^4$	4,0437794	9,3582045
$e^2\gamma^3$	4,3418962	9,6563283	$\varepsilon' b^4$	3,0286932	8,3431183
$e^2\varepsilon'^2\gamma$	2,8841843	8,1986091	$\varepsilon'\gamma^2 b^2$	3,5362364	8,8506614
$e^2\varepsilon'^3$	2,1553282	7,4697533	$\gamma^3 b^2$	4,2650924	9,5795175
$e^2\varepsilon'\gamma^2$	3,6130404	8,9274655	γb^4	3,7575493	9,0719757

Log. A' = 5,7437984 (V. p. 365); Log. A' = 5,0805182 (V. p. 417).

§ 5.

Sur l'évaluation de l'intégrale $\int(\varepsilon'^2 - E'^2)ndt$.

53. Pour réduire en nombres les équations séculaires de l'orbite de la Lune, dépendantes de la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre, il faut avoir préparée la valeur de l'intégrale $\int(\varepsilon'^2 - E'^2)ndt$. En conséquence, je vais m'occuper du calcul de cette formule; et, pour plus d'exactitude, j'aurai égard aux termes de l'ordre du cube des excentricités des planètes, qui se trouvent dans l'expression analytique de la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre. *Laplace* a négligé ces termes; mais il est indispensable de les prendre en considération, pour éviter l'inconséquence de les négliger tandis qu'on tient compte de la troisième puissance du tems dans le développement de l'intégrale $\int(\varepsilon'^2 - E'^2)ndt$.

J'adopte, pour un moment, les dénominations établies dans la Mécanique Céleste, relativement à la théorie de la variation des élémens elliptiques des planètes: et je pars du principe; que, e désignant l'excentricité d'une planète m, on a

$$\frac{de}{dt} = \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dR}{d\varpi}\right)$$

pour l'expression séculaire du coefficient différentiel $\frac{de}{dt}$, due à l'action d'une autre planète m': pourvu que la valeur de la fonction

$$R = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}},$$

soit réduite à la partie explicitement indépendante du tems t qui naît de son développement en termes périodiques, après la substitution des valeurs elliptiques des coordonnées.

La partie de R, dépendante de la longitude ϖ du périhélie de la planète m, qu'on obtient par une opération conforme à cette définition, peut être représentée par

$$R = m'(M' + M''e'^2 + M'''e^2)ee'\cos(\varpi - \varpi')$$
$$+ m'M^{IV}e^2e'^2\cos(2\varpi - 2\varpi') + m'M^{V}e^2\gamma^2\cos(2\varpi - 2\Pi):$$

de sorte que, en faisant $\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2$, on a

$$\frac{de}{dt} = m'an\left\{M' + M''e'^2 + (M''' - \tfrac{1}{2}M')e^2\right\}e'\sin(\varpi' - \varpi)$$
$$+ 2m'anM^{IV}ee'^2\sin(2\varpi' - 2\varpi) - 2m'anM^{V}e\gamma^2\sin(2\varpi - 2\Pi).$$

Cette expression de $\frac{de}{dt}$ est relative à l'action d'une seule planète; mais on aura sa valeur complète, en faisant la somme des quantités semblables qui se rapportent à chaque planète perturbatrice. Le coefficient M' se trouve dans la Mécanique Céleste: ceux désignés par M'', M''', M^{IV} je les ai calculés directement par la méthode exposée dans mon Mémoire sur la Théorie de Jupiter et Saturne, imprimé dans le Tome 36 de l'Académie des Sciences de Turin.

C'est ainsi que j'ai trouvé, que en posant

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + b^{(1)}_{\frac{1}{2}}\cos\theta + b^{(2)}_{\frac{1}{2}}\cos 2\theta + \text{etc.},$$
$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}b^{(0)}_{\frac{3}{2}} + b^{(1)}_{\frac{3}{2}}\cos\theta + b^{(2)}_{\frac{3}{2}}\cos 2\theta + \text{etc.},$$

on a;

$$aM' = -\frac{\alpha}{2}\left\{b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - \alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right\};$$

$$aM'' = \frac{\alpha}{32}\left\{-4.b^{(1)}_{\frac{1}{2}} + 4.\alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 22.\alpha^2\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + 10.\alpha^3\frac{d^3b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + \alpha^4\frac{d^4b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4}\right\};$$

$$aM''' = \frac{\alpha}{32}\left\{4.\alpha^2\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + 6.\alpha^3\frac{d^3b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + \alpha^4\frac{d^4b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4}\right\};$$

$$2aM^{IV} = -\frac{\alpha}{32}\left\{12.b^{(2)}_{\frac{1}{2}} - 12.\alpha\frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 6.\alpha^2\frac{d^2b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + 8.\alpha^3\frac{d^3b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^4\frac{d^4b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4}\right\},$$

$$2\,a\,M^{V} = -\frac{\alpha^2}{32}\left\{12\,.\,b^{(1)}_{\frac{3}{2}} + 8\,.\,\alpha\,\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2\,\frac{d^2\,b^{(1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2}\right\};$$

$$a\left(M''' - \frac{1}{2}M'\right) = \frac{\alpha}{32}\left\{8\,.\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - 8\,.\,\alpha\,\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 0\,.\,\alpha^2\,\frac{d^2\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + 6\,.\,\alpha^3\,\frac{d^3\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + \alpha^4\,\frac{d^4\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4}\right\}.$$

Ces formules se rapportent à une planète perturbatrice *supérieure*; mais s' il est question d'une planète perturbatrice *inférieure*, il faudra les diviser par α.

Pour évaluer les expressions de

$$\alpha^3\frac{d^3\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\,,\quad \alpha^3\frac{d^3\,b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\,,\quad \alpha^4\frac{d^4\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4}\,,\quad \alpha^4\frac{d^4\,b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4}\,,$$

qui ne se trouvent pas préparées dans le troisième Volume de la Mécanique Céleste, voici les formules que j'ai employées, suivant les circonstances (Voyez la page 398 du Tome 35 de l'Académie de Turin et la page 306 du second Vol. des Exercices de calcul intégral par M.r *Legendre*);

$$(1-\alpha^2)^3\,\alpha^3\frac{d^3\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} = b^{(1)}_{\frac{1}{2}}(-6+17\,.\,\alpha^2-19\,.\,\alpha^4)+b^{(0)}_{\frac{1}{2}}(3-7\,.\,\alpha^2+12\,.\,\alpha^4)\,\alpha\,;$$

$$(1-\alpha^2)^4\,\alpha^4\frac{d^4\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} = b^{(1)}_{\frac{1}{2}}(\;24-91\,.\,\alpha^2+126\,.\,\alpha^4-107\,.\,\alpha^6)$$
$$+\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}(-12+44\,.\,\alpha^2-44\,.\,\alpha^4+60\,.\,\alpha^6)\,\alpha\,;$$

$$(1-\alpha^2)^3\,\alpha^3\frac{d^3\,b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} = b^{(2)}_{\frac{1}{2}}(-24+63\,.\,\alpha^2-63\,.\,\alpha^4)+b^{(1)}_{\frac{1}{2}}(6-13.\alpha^2+15.\alpha^4)\,3\alpha\,;$$

$$(1-\alpha^2)^4\,\alpha^4\frac{d^4\,b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} = b^{(2)}_{\frac{1}{2}}(\;120-435\,.\,\alpha^2+558\,.\,\alpha^4-387\,.\,\alpha^6)$$
$$+\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}(-30+110.\alpha^2-122.\alpha^4+90.\alpha^6)\,3\alpha\,;$$

$$\frac{\alpha^3 d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = \frac{9}{4}\alpha^3 + \frac{225}{16}\alpha^5 + \frac{18375}{512}\alpha^7 + \frac{138915}{2048}\alpha^9 + \text{etc.};$$

$$\frac{\alpha^4 d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^4} = \frac{225}{8}\alpha^5 + \frac{18375}{128}\alpha^7 + \frac{416745}{1024}\alpha^9 + \text{etc.};$$

$$\frac{\alpha^3 d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = \frac{15}{2}\alpha^4 + \frac{1575}{64}\alpha^6 + \frac{6615}{128}\alpha^8 + \text{etc.};$$

$$\frac{\alpha^4 d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4} = \frac{15}{2}\alpha^4 + \frac{4725}{64}\alpha^6 + \frac{33075}{128}\alpha^8 + \text{etc.}.$$

Maintenant, pour former les différentes valeurs numériques de la formule $m'an.M'e'\sin(\varpi'-\varpi)$, je remarque qu'il suffit de faire

$$\mu = 0,\ \mu' = -\frac{22741}{405871},\ \mu''' = -\frac{700238}{2546320};\ \mu^{IV} = -\frac{3,41}{1070,5};\ \mu^{V} = -\frac{137,84}{3497,24};\ \mu^{VI} = -\frac{1586}{17918},$$

dans l'équation posée au commencement de la page 90 du 3.[ième] Volume de la Mécanique Céleste : alors on obtient

— 0″, 012433 . (centésimales)	pour l'action de Mercure;
+ 0, 044336	. . . . Vénus;
— 0, 055282	. . . . Mars;
— 0, 245726	. . . . Jupiter;
— 0, 001348	. . . . Saturne;
+ 0, 000056	. . . . Uranus;

et par conséquent $-0'',270397$ (centésimales) pour la somme de ces actions.

En réduisant en nombres les autres termes de l'expression de $\frac{de}{dt}$ j'ai trouvé les résultats suivans : mais pour ne point compliquer inutilement ce calcul, j'ai négligé le terme multiplié par M^{V}, ainsi que l'action de Mercure et d'Uranus, à cause de l'excessive petitesse de ces quantités.

Terre et Vénus.

Log. $n = 6{,}6020525$	Log. $m'n\,e'^3 \sin(\varpi' - \varpi) = 4{,}1967175\ (+)$
$405871 = 5{,}6083881$	$m'n\,e'e^2 \sin(\varpi' - \varpi) = 4{,}9723679\ (+)$
$m'n = 0{,}9936644$	$m'n\,e'e^2 \sin(2\varpi' - 2\varpi) = 4{,}8261638\ (+)$
$\alpha = 9{,}8593380$	

$$32 \,.\, aM'' = \alpha \left\{ \begin{array}{l} -3{,}76965 + 6{,}57484 + 86{,}6875 \\ +217{,}0710 + 171{,}7800 = 478{,}3437 \end{array} \right\};$$

$$32\, a(M''' - \tfrac{1}{2}M') = \alpha \left\{ \begin{array}{l} 7{,}53940 - 13{,}1497 + 130{,}2426 \\ +171{,}7800 = 296{,}4122 \end{array} \right\};$$

$$32 \,.\, 2\,aM^{IV} = -\alpha \left\{ \begin{array}{l} 6{,}33107 - 17{,}9657 + 26{,}8671 \\ +176{,}1944 + 134{,}3270 = 365{,}7536 \end{array} \right\}.$$

Log. $\dfrac{aM''}{\alpha} = 1{,}1745900$; Log. $\dfrac{a(M''' - \frac{1}{2}M')}{\alpha} = 0{,}9667459$;

Log. $\dfrac{2\,a\,M^{IV}}{\alpha} = 1{,}0580391\ (-)$.

$$m'an\,\{M''e'^2 + (M''' - \tfrac{1}{2}M')e^2\}\,e'\sin(\varpi' - \varpi) + 2\,m'an\,M^{IV}\,ee'^2 \sin(2\varpi' - 2\varpi)$$

$$= 0'',000023513 + 0'',000086918 - 0'',000076596 = 0'',000033835 \text{ (cent.)}$$

Terre et Mars.

Log. $n = 6{,}6020525$	Log. $m'n\,e'^3 \sin(\varpi' - \varpi) = 7{,}0043187\ (-)$
$2546320 = 7{,}4059130$	$m'n\,e'e^2 \sin(\varpi' - \varpi) = 5{,}5178727\ (-)$
$m'n = 0{,}1961395$	$m'n\,ee'^2 \sin(2\varpi' - 2\varpi) = 6{,}3430712\ (+)$
$\alpha = 9{,}8171024$	

$$32 \,.\, aM'' = \alpha \left\{ \begin{array}{l} -3{,}21825 + 4{,}9120 + 44{,}9607 \\ +84{,}2108 + 47{,}7803 = 178{,}6456 \end{array} \right\};$$

$$32.a(M'''-\tfrac{1}{2}M')=\alpha\left\{\begin{matrix}6,4365-9,8240+50,52648\\+47,7803=94,9193\end{matrix}\right\};$$

$$32.2aM^{IV}=-\alpha\left\{\begin{matrix}4,86701-12,6110+14,8113\\+68,2713+49,4342=124,7728\end{matrix}\right\}.$$

Log. $aM''=0,5639448$; Log. $a(M'''-\tfrac{1}{2}M')=0,2893070$;

Log. $2aM^{IV}=0,4080731\ (-)$;

$$m'an\{M''e'^2+(M'''-\tfrac{1}{2}M')e^2\}e'\sin(\varpi'-\varpi)+2m'anM^{IV}ee'^2\sin(2\varpi'-2\varpi)$$
$$=-0'',00370052-0'',0000641474-0'',000563825=-0'',00432849.$$

Terre et Jupiter.

Log. $n=6,6020525$	Log. $m'n\,e'^3\sin(\varpi'-\varpi)=9,6180728\ (-)$
$1070,5=3,0295867$	$m'ne'e^2\sin(\varpi'-\varpi)=8,7055416\ (-)$
$m'n=3,5724658$	$m'nee'^2\sin(2\varpi'-2\varpi)=7,9426944\ (-)$
$\alpha=9,2838993$	

$$32.aM''=\alpha\left\{\begin{matrix}-0,78001+0,80228+0,37911\\+0,20433+0,00918=0,61489\end{matrix}\right\};$$

$$32.a(M'''-\tfrac{1}{2}M')=\alpha\left\{\begin{matrix}1,56002-1,60456+0,12260\\+0,00918=0,08724\end{matrix}\right\};$$

$$32.2aM^{IV}=-\alpha\left\{\begin{matrix}0,33834-0,68752+0,36123\\+0,08067+0,01836=0,11108\end{matrix}\right\};$$

Log. $aM''=7,5675467$; Log. $a(M'''-\tfrac{1}{2}M')=6,7194650$;

Log. $2aM^{IV}=6,8243852\ (-)$;

$$m'an\{M''e'^2+(M'''-\tfrac{1}{2}M')e^2\}e'\sin(\varpi'-\varpi)+2m'anM^{IV}ee'^2\sin(2\varpi'-2\varpi)$$
$$=-0'',0015333-0'',00002661+0'',000005849=-0'',0015541.$$

Terre et Saturne.

Log. $n = 6{,}6020525$	Log. $m'n\,e'^3 \sin(\varpi'-\varpi) = 8{,}5674763$ (—)
$3497{,}24 = 3{,}5437255$	$m'n e' e^2 \sin(\varpi'-\varpi) = 7{,}5189621$ (—)
$m'n = 3{,}0583270$	$m'n e e'^2 \sin(2\varpi'-2\varpi) = 8{,}3369586$ (—)
$\alpha = 9{,}0205477$	

$$32.aM'' = \alpha\left\{\begin{matrix}-0{,}421132 + 0{,}424635 + 0{,}059538 \\ +0{,}027621 + 0{,}00043898 = 0{,}091101\end{matrix}\right\},$$

$$32.a(M''' - \tfrac{1}{2}M') = \alpha\left\{\begin{matrix}0{,}842264 - 0{,}849270 + 0{,}0165726 \\ +0{,}00043898 = 0{,}010006\end{matrix}\right\}:$$

$$32.2aM^{IV} = -\alpha\left\{\begin{matrix}0{,}099384 - 0{,}19966 + 0{,}100667 \\ +0{,}0098712 + 0{,}0018906 = 0{,}012153\end{matrix}\right\}.$$

$$m'an\{M''e'^2 + (M''' - \tfrac{1}{2}M')e^2\}e'\sin(\varpi'-\varpi) + 2m'anM^{IV}ee'^2\sin(2\varpi'-2\varpi)$$

$$= -0'',000011025 - 0'',0000001533 + 0'',0000008650 = -0'',000010313.$$

En réunissant ces quatre résultats on obtient

$$0'',000033835 - 0'',00432849 - 0'',0015541 - 0'',000010313 = -0'',00585907$$

pour le second terme de l'expression de $\frac{de}{dt}$: de sorte que, on a ;

$$\frac{de}{dt} = -0'',270397 - 0'',005859 = -0'',276256.$$

54. Maintenant, si l'on reprend la lettre ε' pour représenter l'excentricité de l'orbite de la Terre correspondante au temps t, on aura

$$2\varepsilon' = 2E' - t.0'',552512 - t^2.0'',0000207$$

au lieu de l'équation donnée, pour le même objet, dans la page 109. du troisième Volume de la Mécanique Céleste. A la verité, le

coefficient de t^2 exigerait aussi la correction relative au changement dans les masses des planètes ; mais sa petitesse diminue l'importance de cette correction.

En multipliant par $\frac{81}{250}$ les coefficiens de t et t^2, on obtient, en secondes séxagésimales ;

$$2\varepsilon' = 2E' - t . 0'',1790139 - t^2 . 0'',0000671 :$$

et en parties du rayon du cercle pris pour unité ;

$$2\varepsilon' = 2E' - t . 0,000000867885 - t^2 . 0,00000000003251 .$$

Il suit de là que,

$$\varepsilon'^2 - E'^2 = -\frac{t}{100} . 0,00000145926 - \left(\frac{t}{100}\right)^2 . 0,000000003652 ;$$

$$\int (\varepsilon'^2 - E'^2)\, dt = -\left(\frac{t}{100}\right)^2 . 0,000072963 - \left(\frac{t}{100}\right)^3 . 0,0000001217 .$$

Donc, en multipliant le second membre de cette équation par $n = 1732559'',54$ on aura

$$\int (\varepsilon'^2 - E'^2)\, n\, dt = -\left(\frac{t}{100}\right)^2 . 1264'',127 - \left(\frac{t}{100}\right)^3 . 2'',108 .$$

On obtient de la même manière

$$\varepsilon'^4 - E'^4 = -\frac{t}{100} . 0,000000000080755 ; \int (\varepsilon'^4 - E'^4)\, n\, dt = -\left(\frac{t}{100}\right)^2 . 0'',6995 ;$$

$$\varepsilon'^6 - E'^6 = -\frac{t}{100} . 0,000000000000342 ; \int (\varepsilon'^6 - E'^6)\, n\, dt = -\left(\frac{t}{100}\right)^2 . 0'',000297 ;$$

$$(\varepsilon'^2 - E'^2)^2 = \left(\frac{t}{100}\right)^2 . 0,000000000002045 ; \int (\varepsilon'^2 - E'^2)^2\, n\, dt = \left(\frac{t}{100}\right)^3 . 0'',001179 .$$

Si l'on voulait exprimer la valeur de l'intégrale $\int (\varepsilon'^2 - E'^2)\, n\, dt$, en tenant compte de l'erreur qu'il peut encore exister dans la masse de

Vénus et celle de Mars on supposerait, que $\frac{1+\mu_1'}{405871}$, $\frac{1+\mu_1'''}{2546320}$ désignent, respectivement, ces masses; et alors on trouverait

$$2\varepsilon' = 2E' - t\{0{,}000000867885 - 0{,}00000013929.\mu_1' + 0{,}0000001736.\mu_1'''\}$$
$$- t^2.0{,}00000000003251\,;$$

d'où l'on tire;

$$\varepsilon'^2 - E'^2 = -\frac{t}{100}\{0{,}00000145926 - 0{,}00000023420.\mu_1' + 0{,}00000029201.\mu_1'''\}$$
$$-\left(\frac{t}{100}\right)^2.0{,}000000003652\,;$$

$$\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,dt = -\left(\frac{t}{100}\right)^2\{0{,}000072963 - 0{,}000011710.\mu_1' + 0{,}000014605.\mu_1'''\}$$
$$-\left(\frac{t}{100}\right)^3.0{,}0000001217\,;$$

$$\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,ndt = -\left(\frac{t}{100}\right)^2\{1264'',127 - 202'',83.\mu_1' + 253'',04.\mu_1'''\} - \left(\frac{t}{100}\right)^3.2'',108$$

En désignant par C le coefficient par lequel on doit multiplier cette quantité pour former l'équation séculaire du mouvement vrai de la Lune, on en trouve la valeur développée dans la page 485; mais relativement aux termes multipliés par μ_1', μ_1''' il suffit de prendre $C = -\frac{3}{2}m^2$; ce qui donne

$$C\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,ndt = -\left(\frac{t}{100}\right)^2\{1264'',127 \times C + 1'',7028.\mu_1' - 2'',1237.\mu'''_1\}$$
$$-\left(\frac{t}{100}\right)^3.2'',108\,.\,C.$$

La quantité

$$100.n - \left(\frac{t}{100}\right)\{1264'',127.C + 1'',7028\mu_1' - 2'',1237.\mu_1''\} - \left(\frac{t}{100}\right)^2 2'',108\,.\,C.$$

constitue ce qu'on a coutume de nommer le moyen mouvement séculaire de la Lune. Mais cette dénomination est vicieuse; puisque

le rapport de l'espace au tems n'exprime pas la vitessse dans les mouvemens qui ne sont pas uniformes. Il est plus exact de dire que la quantité $100.n$, augmentée du coefficient différentiel de $\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,ndt$ pris par rapport à $\frac{t}{100}$; c'est-à-dire

$$N = 100.n - \left(\frac{t}{100}\right)\left\{2528'',254\times C + 3'',4056.\mu_1' - 4'',2474.\mu_1'''\right\} - \left(\frac{t}{100}\right)^2 6'',324.C$$

constitue la vitesse séculaire moyenne de la Lune.

En prenant successivement $t = -100\times 20$, $t = 100$, on aura

$$N = 100.n + 20\times 2528'',254\times C + 68'',112.\mu_1' - 84'',948\mu_1''' - (20)^2\times 6'',324\times C$$

$$N' = 100.n - 2528'',254\times C - 3'',4056\mu_1' - 4'',2474\mu_1''' - 6'',324\times C,$$

pour les moyennes vitesses séculaires qui répondent au temps d'*Hipparque*, et au 19.ième siècle de notre ère; de sorte que

$$N' - N = -21\times 2528'',251\times C - 71'',5176.\mu_1' + 80'',701.\mu_1''' + 399\times 6'',324\times C$$

exprime la différence de ces vitesses. Si l'observation immédiate donnait un résultat différent de la quantité

$$-21\times 2528'',251.C + 399\times 6'',324.C,$$

on pourrait expliquer la discordance, en l'attribuant à la partie

$$-71'',5176.\mu_1' + 80'',701.\mu_1'''.$$

Mais en cela il y a une limite, fixée par les valeurs probables des masses de Vénus et de Mars. On ne pourrait pas, par exemple, expliquer par ce moyen l'augmentation de N' qui serait produite par une augmentation de $0^{\text{jours}},0000001$ dans la durée du jour moyen, comparativement à la durée du jour qui avait lieu au temps d'*Hip-*

parque; ou qui serait produite par toute autre cause étrangère à la gravitation. Car, cette petite fraction du jour répétée autant de fois qu'il y a de jours dans une année julienne devient égale à $0^{\text{jours}},0036525$: or, pendant ce temps, la Lune décrit un arc de $173,''2 = \frac{n}{365,25} \times 0,0036525$, et on ne pourrait pas supposer l'équation

$$-71'',52 . \mu_{,}' + 80'',70 . \mu_{,}''' = 173'',2 ,$$

sans supposer à $\mu_{,}'$ et $\mu_{,}'''$ des valeurs incompatibles avec les masses de Vénus et de Mars qui résultent de l'ensemble des observations astronomiques. Si donc une cause quelconque était capable d'altérer de 0,0000001 la durée de la rotation diurne de la Terre, l'observation de la vitesse séculaire de la Lune, serait propre à faire connaître l'existence d'une telle altération (*).

J'aurais désiré pouvoir insérer ici l'expression séculaire de ε' et celle de $\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,ndt$, en termes périodiques; mais je donnerai ce résultat ailleurs, n'ayant pas encore achevé d'une manière satisfaisante les calculs qu'il est nécessaire d'exécuter pour modifier convenablement l'expression analytique de l'excentricité de l'orbite de la Terre publiée par *Lagrange* dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1782. (page 272).

55. Après avoir considéré la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre, il faut remarquer, que l'action de Jupiter sur notre planète introduit dans l'expression de la partie variable de cette

(*) Ceci peut servir d'explication à un passage qu'on lit dans la page 176 du 3.ième Vol. de la Mécanique Céleste. Le nombre 13,''51 dont il est question dans ce passage s'obtient en nommant x l'erreur existante dans le coefficient qui multiplie $\left(\frac{t}{100}\right)^2$ dans l'expression de $C\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,ndt$: alors $2\left(\frac{t}{100}\right)x$ sera l'erreur sur la vitesse séculaire moyenne: en y faisant $t = 20 \times 100$, on aura l'équation $40 . x = 534,''6$, qui donne $x = 13,''4$.

même excentricité un terme périodique, dont la période est égale à celle de la grande inégalité de Jupiter produite par l'action de Saturne.

La forme de ce terme est telle qu'on a

$$\varepsilon' - E' = \frac{m^{\text{IV}}\, m^{\text{V}}\,.K}{(5n^{\text{V}} - 2n^{\text{IV}})^2} \cos\left\{5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} + \varphi\right\};$$

K désignant un coefficient de l'ordre du carré des excentricités des orbites de Jupiter et Saturne; m^{IV}, m^{V} leurs masses respectives; et $n^{\text{IV}}t + \varepsilon^{\text{IV}}$, $n^{\text{V}}t + \varepsilon^{\text{V}}$ leurs longitudes moyennes. En conséquence, l'intégrale $\frac{3}{2}m^2\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,ndt$ renfermera le terme

$$\frac{3}{2}m^2 \cdot \frac{2nE'.\, m^{\text{IV}}\, m^{\text{V}}\, K}{(5n^{\text{V}} - 2n^{\text{IV}})^3}.\sin\left\{5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} + \varphi\right\},$$

qu'il est nécessaire d'évaluer afin de fixer les idées sur sa grandeur absolue.

A cet effet, je réduis l'expression de $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ posée plus haut (V. p. 570) à

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = a'n'm^{\text{IV}}M'.e^{\text{IV}}\sin(\varpi^{\text{IV}} - \varpi'),$$

et je regarde m^{IV}, e^{IV}, ϖ^{IV}, M' comme appartenans à Jupiter et à son orbite. Alors en désignant par δe^{IV}, $\delta\varpi^{\text{IV}}$ la variation de e^{IV} et ϖ^{IV} due à l'action de Saturne, nous aurons l'équation

$$\frac{d.\delta\varepsilon'}{dt} = a'n'm^{\text{IV}}M'\left\{\delta e^{\text{IV}}\sin(\varpi^{\text{IV}} - \varpi') + e^{\text{IV}}\delta\varpi^{\text{IV}}\cos(\varpi^{\text{IV}} - \varpi')\right\},$$

pour déterminer le terme principal de la variation correspondante de l'excentricité de l'orbite de la Terre.

Cela posé si l'on fait $\theta = 5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}}$, et si l'on prend (Voyez p. 23 du 3.[ième] Volume de la Mécanique Céleste)

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)}e^{\text{V}3}\cos(\theta - 3\varpi^{\text{V}}) + M^{(1)}e^{\text{IV}}e^{\text{V}2}\cos(\theta - 2\varpi^{\text{V}} - \varpi^{\text{IV}}) \\ & + M^{(2)}e^{\text{V}}e^{\text{IV}2}\cos(\theta - \varpi^{\text{V}} - 2\varpi^{\text{IV}}) + M^{(3)}e^{\text{IV}3}\cos(\theta - 3\varpi^{\text{IV}}) \\ & + M^{(4)}e^{\text{V}}\gamma^2\cos(\theta - \varpi^{\text{V}} - 2\Pi) + M^{(5)}e^{\text{IV}}\gamma^2\cos(\theta - \varpi^{\text{IV}} - 2\Pi) \end{aligned}$$

il est évident, en vertu des équations

$$e^{\text{iv}}\,\delta e^{\text{iv}} = a^{\text{iv}}\,n^{\text{iv}}\int dt\left(\frac{dR}{d\varpi^{\text{iv}}}\right), \qquad e^{\text{iv}}\,\delta\varpi^{\text{iv}} = -a^{\text{iv}}\,n^{\text{iv}}\int dt\left(\frac{dR}{de^{\text{iv}}}\right),$$

que les valeurs de δe^{iv}, $e^{\text{iv}}\,\delta\varpi^{\text{iv}}$ qu'il faut prendre pour l'objet actuel sont celles-ci, savoir

$$\delta e^{\text{iv}} = -\frac{a^{\text{iv}}\,n^{\text{iv}}}{a^{\text{v}}\,(5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}})}\left\{\begin{array}{l} a^{\text{v}}\,M^{(1)}e^{\text{v}2}\cos(\theta - 2\varpi^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ + 2a^{\text{v}}\,M^{(2)}e^{\text{iv}}\,e^{\text{v}}\cos(\theta - \varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}}) \\ + 3a^{\text{v}}M^{(3)}e^{\text{iv}2}\cos(\theta - 3\varpi^{\text{iv}}) + a^{\text{v}}M^{(5)}\gamma^2\cos(\theta - \varpi^{\text{iv}} - 2\Pi) \end{array}\right\};$$

$$e^{\text{iv}}\,\delta\varpi^{\text{iv}} = -\frac{a^{\text{iv}}\,n^{\text{iv}}}{a^{\text{v}}\,(5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}})}\left\{\begin{array}{l} a^{\text{v}}\,M^{(1)}e^{\text{v}2}\sin(\theta - 2\varpi^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ + 2a^{\text{v}}\,M^{(2)}e^{\text{iv}}\,e^{\text{v}}\sin(\theta - \varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}}) \\ + 3a^{\text{v}}M^{(3)}e^{\text{iv}2}\sin(\theta - 3\varpi^{\text{iv}}) + a^{\text{v}}M^{(5)}\gamma^2\sin(\theta - \varpi^{\text{iv}} - 2\Pi) \end{array}\right\}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression précédente de $\frac{d.\delta\varepsilon'}{dt}$ donne en intégrant;

$$\delta\varepsilon' = \frac{a'n'm^{\text{iv}}M'.a^{\text{iv}}n^{\text{iv}}}{a^{\text{v}}\,(5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}})^2}\left\{P\cos(\theta - \varpi') + Q\sin(\theta - \varpi')\right\};$$

où l'on a fait, pour plus de simplicité;

$$P = a^{\text{v}}\,M^{(1)}e^{\text{v}2}\cos 2\varpi^{\text{v}} + 2a^{\text{v}}\,M^{(2)}e^{\text{iv}}\,e^{\text{v}}\cos(\varpi^{\text{iv}} + \varpi^{\text{v}})$$
$$+ 3a^{\text{v}}\,M^{(3)}e^{\text{iv}2}\cos 2\varpi^{\text{iv}} + a^{\text{v}}\,M^{(5)}\gamma^2\cos 2\Pi;$$

$$Q = a^{\text{v}}\,M^{(1)}e^{\text{v}2}\sin 2\varpi^{\text{v}} + 2a^{\text{v}}\,M^{(2)}e^{\text{iv}}\,e^{\text{v}}\sin(\varpi^{\text{iv}} + \varpi^{\text{v}})$$
$$+ 3a^{\text{v}}\,M^{(3)}e^{\text{iv}2}\sin 2\varpi^{\text{iv}} + a^{\text{v}}\,M^{(5)}\gamma^2\sin 2\Pi.$$

Donc en faisant

$$P = \sqrt{P^2 + Q^2}.\cos\varphi, \qquad Q = \sqrt{P^2 + Q^2}.\sin\varphi,$$

il viendra

$$\delta\varepsilon' = \frac{a'n'm^{\text{iv}}M'.a^{\text{iv}}n^{\text{iv}}.\sqrt{P^2 + Q^2}}{a^{\text{v}}\,(5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}})^2}\cos(\theta - \varpi' - \varphi).$$

Mais, la variation de l'intégrale $\frac{3}{2}m^2\int(\varepsilon'^2 - E'^2)ndt$ peut être exprimée par $3m^2nE'\int dt.\delta\varepsilon'$: ainsi il est manifeste, que l'action de Jupiter sur la Terre est réfléchie à la Lune, de manière que l'expression de la longitude vraie de ce satellite en fonction de sa longitude moyenne renferme l'inégalité

$$-\int\zeta ndt = -\frac{3m^2nE'.a'n'.m^{\text{IV}}M'.a^{\text{IV}}n^{\text{IV}}.\sqrt{P^2+Q^2}}{a^{\text{V}}(5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}})^3}.\sin(\theta - \varpi' - \varphi).$$

Cette même analyse fournit aisément le terme correspondant, que l'action directe de Jupiter sur la Terre introduit dans l'expression de sa longitude vraie. Il suffit pour cela d'associer à la valeur de $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ celle de $\varepsilon'\frac{d\varpi'}{dt}$, en observant qu'on a d'abord

$$\varepsilon'\frac{d\varpi'}{dt} = -a'n'm^{\text{IV}}M'.e^{\text{IV}}\cos(\varpi^{\text{IV}} - \varpi');$$

et que de là on tire

$$\frac{d.\varepsilon'\delta\varpi'}{dt} = -a'n'm^{\text{IV}}M'.\left\{\delta e^{\text{IV}}\cos(\varpi^{\text{IV}} - \varpi') - e^{\text{IV}}\delta\varpi^{\text{IV}}\sin(\varpi^{\text{IV}} - \varpi')\right\}:$$

de sorte que on obtient, en substituant ici les valeurs précédentes de δe^{IV}, $e^{\text{IV}}\delta\varpi^{\text{IV}}$ et intégrant;

$$\varepsilon'\delta\varpi' = \frac{a'n'm^{\text{IV}}M'.a^{\text{IV}}n^{\text{IV}}}{a^{\text{V}}(5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}})^2}\left\{P\sin(\theta-\varpi') - Q\cos(\theta-\varpi')\right\},$$

ou bien

$$\varepsilon'\delta\varpi' = \frac{a'n'm^{\text{IV}}M'.a^{\text{IV}}n^{\text{IV}}.\sqrt{P^2+Q^2}}{a^{\text{V}}(5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}})^2}\sin(\theta-\varpi'-\varphi).$$

Or en nommant $\delta v'$ la perturbation de la longitude vraie de la Terre, on sait que

$$\delta v' = \delta(n't+\varepsilon_1) + 2\delta.\left\{\varepsilon'\sin(n't+\varepsilon_1-\varpi')\right\} + \text{etc.}$$

Mais il est aisé de voir qu'on peut ici négliger les termes donnès par la variation de la longitude moyenne $n't+\varepsilon_1$, puisque la seule considération de l'équation

$$\delta(n't+\varepsilon_1)= 3\iint a' n' dt.d.R+2a'^2\int\left(\frac{dR}{da'}\right)n'dt$$

démontre, que ces termes ne seraient pas divisés par $5n^{v}-2n^{iv}$. En conséquence il suffit de prendre

$$\delta v'= 2\,\delta e'.\sin(n't+\varepsilon_1-\varpi')-2e'\,\delta\varpi'\cos(n't+\varepsilon_1-\varpi');$$

d'où l'on tire

$$\delta v'=\frac{2.a'n'm^{iv}M'.a^{iv}n^{iv}.\sqrt{P^2+Q^2}}{a^{v}(5n^{v}-2n^{iv})^2}.\sin(n't+\varepsilon_1-\theta+\varphi).$$

On voit par là que cette inégalité de la Terre et la correspondante de la Lune, sont dans le rapport du nombre 2 à la quantité $\frac{3m^2E'n}{5n^{v}-2n^{iv}}$.

Maintenant, pour réduire en nombres ces formules, on prendra

$$(*)\ldots\left\{\begin{array}{ll} a^{v}M^{(1)}= m^{v}.9{,}6074688; & a^{v}M^{(2)}=-m^{v}.5{,}8070750;\\ a^{v}M^{(3)}= m^{v}.1{,}1620203; & a^{v}M^{(5)}= m^{v}.0{,}3320744.\end{array}\right.$$

$$\text{Log.}e^{iv}=8{,}6819347;\quad \text{Log.}e^{v}=8{,}7499264;\quad \text{Log.}\gamma=8{,}3417429$$

$$\varpi^{iv}=10^{\circ}.21'.4'';\quad \varpi^{v}=88^{\circ}.9'.7'';\quad \Pi=125^{\circ}.44'.34''.$$

$$\frac{a'n'm^{iv}M'}{5n^{v}-2n^{iv}}=\frac{5{,}12974}{4528{,}387}(^{**});\quad \frac{n^{iv}}{5n^{v}-2n^{iv}}=\frac{337212094}{4528387};\quad m^{v}=\frac{1}{3512}.$$

$$\text{Log.}\frac{a^{iv}}{a^{v}}=9{,}7366493;\quad \frac{n}{5n^{v}-2n^{iv}}=\frac{17325593}{1467};$$

$$\text{Log.}\,3m^2E'=6{,}4506104;\quad \text{Log.}\frac{3m^2E'.n}{5n^{v}-2n^{iv}}=0{,}5228683;$$

ce qui donne;

(*) Voyez p. 124 du 3.[ième] Vol. de la Mécanique Céleste.

(**) Voyez p. 87 du même Volume.

$$P = -m^{v}.0{,}018179 = -\frac{0{,}018179}{3512}\;;\quad \text{Log. } P = 4{,}7140155\ (-)$$

$$Q = -m^{v}.0{,}026395 = -\frac{0{,}026395}{3512}\;;\quad \text{Log. } Q = 4{,}8759672\ (-)$$

$$\frac{Q}{P} = \text{Tang.}\,\varphi = \frac{26395}{18179}\;;\quad \varphi = 55^{\circ}.26'.37''.$$

$$\text{Log. } \sqrt{P^2+Q^2} = \text{Log. } \frac{P}{\cos\varphi} = 4{,}9602663$$

$$\text{Log. } \frac{a^{\text{IV}}}{a^{\text{V}}}\sqrt{P^2+Q^2} = 4{,}6969156\;;\quad \text{Log. } \frac{a^{\text{IV}}.\sqrt{P^2+Q^2}}{a^{\text{V}}.\sin 1''} = 0{,}0113407.$$

$$\text{Log. } \frac{a'n'm^{\text{IV}}.M'}{5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}}} = 7{,}0541519\;;\quad \text{Log. } \frac{n^{\text{IV}}}{5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}}} = 1{,}8719595\;;$$

$$\text{Log. } 2.\frac{a'n'm^{\text{IV}}M'.a^{\text{IV}}n^{\text{IV}}.\sqrt{P^2+Q^2}}{a^{\text{V}}(5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}})^2.\sin 1''} = 9{,}2384821\ (-)\;;$$

et par conséquent

$$\delta v' = -0'',1732.\sin\{n't+\varepsilon_1-\theta+55^{\circ}.26'.37''\}.$$

$$-\int\zeta n\,dt = +0'',2886.\sin\{\theta-\varpi'-55^{\circ}.26'.37''\}.$$

Ces résultats s'accordent, à-peu-près, avec ceux que *Laplace* a publiés dans le Vol. de la C.^e des Tems pour l'année 1821 (V. p. 268-270).

§ 6.

Réduction en nombres des formules posées dans les pages 485-501 et 574-584.

56. Cette opération est évidente, puisqu'elle consiste à réduire en nombres tous les coefficiens des argumens, à l'aide des élémens donnés dans les pages 585-588 et 596. Cependant, pour plus de clarté, je dois avertir le Lecteur, que, dans les équations suivantes, le nombre entre les deux petites paranthèses qu'on voit placé à côté des parties constituantes de chaque coefficient indique, que la partie qu'il affecte, résulte de la somme algébrique de toutes les quantités de l'ordre exprimé par ce nombre, qui entrent dans la valeur analytique du même coefficient. Cette séparation des quantités des différens ordres rend sensible la convergence des séries qui expriment les coefficiens des inégalités Lunaires, et offre le moyen d'évaluer par induction le reste de la série, dans le très-petit nombre des cas où la valeur de ce reste mérite d'être prise en considération. On reconnaîtra les parties qui ont été ainsi calculées par le signe (ind.) placé à côté d'elles.

Réduction en nombres des formules posées dans les pages 485 et 486.

$$\int \zeta dv = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \quad 0{,}008392850\,(2) - 0{,}000141759\,(4) \\ + 0{,}000095632\,(5) - 0{,}000028553\,(6) \\ + 0{,}000025333\,(7) = 0{,}008343502 \end{array} \right\} \int (\varepsilon'^2 - E'^2)\, dv \\ + \left\{ 0{,}010491063(2) + 0{,}036233414(4) = 0{,}046724477 \right\} \int (\varepsilon'^4 - E'^4)\, dv \\ + \; 0{,}000158489.(4). \int (\varepsilon'^2 - E'^2)^2 dv + 0{,}01223951\,(2) \int (\varepsilon'^6 - E'^6)\, dv \end{array} \right\}.$$

$$(1-c)v+\int\varpi\,dv=\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} 0{,}004196425\,(2)+0{,}002942793\,(3)\\ +0{,}000923094\,(4)+0{,}000273299\,(5)\\ +0{,}000080293\,(6)+0{,}000023969\,(7)\\ +0{,}00000026+0{,}000009923\,(\text{ind.})\end{array}\right\}=v\,.\,0{,}008450056\\
+\left\{\begin{array}{l} 0{,}006294637\,(2)+0{,}01079026\,(3)\\ +0{,}007532435\,(4)+0{,}004017515\,(5)\\ +0{,}00323765\,(\text{ind.})=0{,}03187250\end{array}\right\}\int(\varepsilon'^2-E'^2)\,dv\\
+\left\{\begin{array}{l} 0{,}0078683\,(2)+0{,}02354235\,(3)\\ =0{,}0314106\end{array}\right\}\int(\varepsilon'^4-E'^4)\,dv
\end{array}\right\}.$$

$$(1-g)v+\int\theta\,dv=\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} -0{,}004196425\,(2)+0{,}000117712\,(3)\\ +0{,}000056761\,(4)+0{,}000002456\,(5)\\ -0{,}000001368\,(6)-0{,}000000361\,(7)\\ -0{,}00000026-0{,}00000011\,(\text{ind.})\end{array}\right\}=-v\,.\,0{,}004021595\\
+\left\{\begin{array}{l} -0{,}006294657\,(2)+0{,}00043161\,(3)\\ +0{,}000334944(4)+0{,}000138087(5)\\ =-0{,}005389996\end{array}\right\}\int(\varepsilon'^2-E'^2)\,dv\\
+\left\{\begin{array}{l} -0{,}0078683\,(2)+0{,}00094169\,(3)\\ =-0{,}00692661\end{array}\right\}\int(\varepsilon'^4-E'^4)\,dv
\end{array}\right\}.$$

En substituant dans ces expressions les valeurs des intégrales données dans la page 596, on aura

$$\int\zeta\,dv=-\left(\tfrac{t}{100}\right)^2.\,10'',57998-\left(\tfrac{t}{100}\right)^3.\,0'',017588\ ;$$

$$(1-c)v+\int\varpi\,dv=\varpi_1+v.0{,}008450056-\left(\tfrac{t}{100}\right)^2.40'',31287-\left(\tfrac{t}{100}\right)^3 0'',067187;$$

$$(1-g)v+\int\theta\,dv=\theta_1-v.0{,}004021595+\left(\tfrac{t}{100}\right)^2.\,6'',82986+\left(\tfrac{t}{100}\right)^3 0'',011381;$$

où ϖ_1 et θ_1 désignent les constantes arbitraires, ou époques, qui sont censées comprises dans les intégrales $\int\varpi\,dv$, $\int\theta\,dv$. On trouvera dans le § suivant la valeur numérique de la constante de la parallaxe.

Expression numérique de la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie (Voyez p. 487-496).

$$nt+\varepsilon=v+\int\zeta dv +$$

$\sin cv$	$\left\{\begin{array}{l}-22626'',255\,(1)-49'',073\,(3)\\ -6'',659\,(4)+4'',609\,(5)+1'',197\,(6)\\ +0'',366\,(7)+352'',586\,(\varepsilon'^2-E'^2)\end{array}\right\}$	$=-22675'',814$
$\sin 2cv$	$\left\{\begin{array}{l}+465'',375\,(2)+0'',136\,(4)-2'',040\,(5)\\ -0'',822\,(6)-0'',238\,(7)-0'',116\,(8)\end{array}\right\}$	$=+462'',295$
$\sin 3cv$	$\{-11'',344\,(3)+0'',037\,(5)\}$	$=-\ 11'',307$
$\sin 4cv$	$\{+0'',292\,(4)\}$	$=+\ 0'',292$
$\sin 5cv$	$\{-0'',008\,(5)\}$	$=-\ 0'',008$
$\sin gv-fv$	$\{+8'',932\,(2)+0'',171\,(3)\}\sin 2\omega$	$=+\ 6'',577$
$\sin gv+fv$	$\{-0'',343\,(2)\}$ (Voyez p. 425)	$=-\ 0'',343$
$\sin 2gv$	$\left\{\begin{array}{l}+418'',234\,(2)-12'',846\,(4)\\ +1'',371\,(5)+0'',046\,(6)\end{array}\right\}$	$=+406'',806$
$\sin 4gv$	$\{+0'',425\,(4)\}$	$=+\ 0'',425$
$\sin 2gv-cv$	$\left\{\begin{array}{l}+91'',757\,(3)-28'',956\,(4)\\ -3'',004\,(5)-0'',204\,(6)\end{array}\right\}$	$=+\ 59'',593$
$\sin 2gv+cv$	$\{-22'',940\,(3)+0'',576\,(4)\}$	$=-\ 22'',364$
$\sin 2gv-2cv$	$\{-0'',630\,(4)-0'',794\,(5)+0'',344\,(6)\}$	$=-\ 1'',080$
$\sin 2gv+2cv$	$\{+0'',944\,(4)\}$	$=+\ 0'',944$
$\sin 2gv-3cv$	$\{-0'',078\,(5)+0'',087\,(6)\}$	$=+\ 0'',009$
$\sin 2gv+3cv$	$\{-0'',035\,(5)\}$	$=-\ 0'',035$
$\sin 4gv-cv$	$\{+0'',105\,(5)\}$	$=+\ 0'',105$
$\sin 4gv+cv$	$\{-0'',035\,(5)\}$	$=-\ 0'',035$

$$\sin c'mv \quad \left\{\begin{matrix} +778'',263(2)-70'',899(4)-28'',317(5) \\ -7'',877(6)-1'',444(7)-1'',387(8) \end{matrix}\right\} = +668'',339$$

$$\sin 2c'mv \quad \{+9'',813(3)-1'',042(5)-0'',791(6)\} = +\ 7'',980$$

$$\sin 3c'mv \quad \{+0'',162(4)\} = +\ 0'',162$$

$$\sin 4c'mv \quad \{+0'',003(5)\} = +\ 0'',003$$

$$\sin cv+c'mv \quad \left\{\begin{matrix} +32'',014(3)+20'',654(4) \\ +10'',658(5)+5'',994(6) \\ +1'',665(7)+0'',534(8)+0'',17\,(\text{ind.}) \end{matrix}\right\} = +\ 71'',689$$

$$\sin cv-c'mv \quad \left\{\begin{matrix} -32'',014(3)-44'',202(4) \\ -22'',413(5)-10'',467(6) \\ -4'',520(7)-1'',996(8)-1'',4\,(\text{ind.}) \end{matrix}\right\} = -117'',012$$

$$\sin cv-2c'mv \quad \{-0'',404(4)-0'',729(5)-0'',455(6)\} = -\ 1'',588$$

$$\sin cv+2c'mv \quad \{+0'',404(4)+0'',194(5)+0'',159(6)\} = +\ 0'',757$$

$$\sin cv-3c'mv \quad \{-0'',007(5)\} = -\ 0'',007$$

$$\sin cv+3c'mv \quad \{+0'',007(5)\} = +\ 0'',007$$

$$\sin 2cv-c'mv \quad \{+1'',317(4)+1'',659(5)+0'',822(6)\} = +\ 3'',798$$

$$\sin 2cv+c'mv \quad \{-1'',317(4)-1'',009(5)\} = -\ 2'',326$$

$$\sin 2cv+2c'mv \quad \{-0'',017(5)\} = -\ 0'',017$$

$$\sin 2cv-2c'mv \quad \{+0'',017(5)\} = +\ 0'',017$$

$$\sin 3cv+c'mv \quad \{+0'',048(5)\} = +\ 0'',048$$

$$\sin 3cv-c'mv \quad \{-0'',048(5)\} = -\ 0'',048$$

$$\sin 2gv-c'mv \quad \{-1'',183(4)-0'',092(5)+0'',034(6)\} = -\ 1'',241$$

$$\sin 2gv+c'mv \quad \{+1'',183(4)-0'',188(5)\} = +\ 0'',995$$

$$\sin 2gv+2c'mv \quad \{+0'',015(5)\} = +\ 0'',015$$

$$\sin 2gv-2c'mv \quad \{-0'',015(5)\} = -\ 0'',015$$

$\sin 2gv - cv + c'mv \quad \{+0'',389\,(5)\} \quad = + \; 0'',389$

$\sin 2gv - cv - c'mv \quad \{-0'',389\,(5)\} \quad = - \; 0'',389$

$\sin 2gv + cv + c'mv \quad \{-0'',032\,(5)\} \quad = - \; 0'',032$

$\sin 2gv + cv - c'mv \quad \{+0'',032\,(5)\} \quad = + \; 0'',032$

$$\sin 2Ev \quad \left\{\begin{array}{l} -1586'',887\,(2) - 270'',444\,(3) \\ -39'',383\,(4) - 4'',002\,(5) - 0'',064\,(6) \\ -0'',025\,(7) - 0'',029\,(8) - 28'',042\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array}\right\} = -1900'',834$$

$$\sin 2Ev - cv \quad \left\{\begin{array}{l} -3173'',388\,(2) - 1127'',524\,(3) \\ -295'',811\,(4) - 67'',703\,(5) - 12'',187\,(6) \\ -1'',687\,(7) - 0'',151\,(8) - 94'',143\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array}\right\} = -4678'',451$$

$$\sin 2Ev + cv \quad \left\{\begin{array}{l} +126'',599\,(3) + 17'',417\,(4) + 2'',399\,(5) \\ +0'',099\,(6) - 0'',122\,(7) + 1'',851\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array}\right\} = + \; 146'',392$$

$$\sin 2Ev + c'mv \quad \left\{\begin{array}{l} +13'',341\,(3) - 0'',806\,(4) - 0'',228\,(5) \\ +0'',255\,(6) + 0'',242\,(7) + 0'',163\,(8) \end{array}\right\} = + \; 12'',967$$

$$\sin 2Ev - c'mv \quad \left\{\begin{array}{l} -93'',386\,(3) - 31'',425\,(4) - 9'',586\,(5) \\ -2'',259\,(6) - 0'',369\,(7) + 0'',026\,(8) \end{array}\right\} = - \; 136'',999$$

$$\sin 2Ev - 2cv \quad \left\{\begin{array}{l} -130'',539\,(3) - 19'',963\,(4) \\ -15'',083\,(5) - 7'',243\,(6) \\ -3'',412\,(7) - 1'',199\,(8) - 0'',96\,(\text{ind.}) \end{array}\right\} = - \; 177'',439$$

$$\sin 2Ev - 2gv \quad \left\{\begin{array}{l} -70'',390\,(3) + 12'',876\,(4) \\ +1'',885\,(5) + 0'',402\,(6) \end{array}\right\} = - \; 55'',227$$

$\sin 2Ev + 2cv \quad \{-7'',052\,(4) - 0'',654\,(5)\} \quad = - \; 7'',706$

$\sin 2Ev + 2gv \quad \{-3'',218\,(4) - 0'',308\,(5)\} \quad = - \; 3'',526$

$\sin 2Ev + 2c'mv \quad \{-0'',033\,(5)\} \quad = - \; 0'',033$

$$\sin 2Ev - 2c'mv \quad \left\{\begin{array}{l} -3'',814\,(4) - 1'',856\,(5) \\ -0'',888\,(6) - 0'',314\,(7) \end{array}\right\} = - \; 6'',872$$

$\sin 2Ev + c'mv - cv$	$\left\{\begin{array}{l} +53'',357\,(3) + 0'',499\,(4) \\ -12'',148\,(5) - 9'',562\,(6) \\ -5'',547\,(7) - 2'',701\,(8) - 2'',6\,(\text{ind.}) \end{array}\right\}$	$= + \; 21'',298$
$\sin 2Ev - c'mv - cv$	$\left\{\begin{array}{l} -124'',214\,(3) - 59'',036\,(4) \\ -19'',361\,(5) - 4'',864\,(6) \\ -0'',351\,(7) - 0'',424\,(8) \end{array}\right\}$	$= - \; 208'',250$
$\sin 2Ev + c'mv + cv$	$\left\{\begin{array}{l} -1'',064\,(4) - 0'',177\,(5) \\ -0'',171\,(6) - 0'',097\,(7) \end{array}\right\}$	$= - \; 1'',509$
$\sin 2Ev - c'mv + cv$	$\left\{\begin{array}{l} +7'',448\,(4) + 1'',964\,(5) \\ +0'',867\,(6) + 0'',301\,(7) \end{array}\right\}$	$= + \; 10'',580$
$\sin 2Ev + 3c'mv$	$\{-0'',000\,(5)\}$	$= - \; 0'',000$
$\sin 2Ev - 3c'mv$	$\{-0'',133\,(5)\}$	$= - \; 0'',133$
$\sin 2Ev + c'mv - 2cv$	$\{+2'',195\,(4) - 0'',571\,(5)\}$	$= + \; 1'',624$
$\sin 2Ev - c'mv - 2cv$	$\{-5'',121\,(4) - 0'',575\,(5)\}$	$= - \; 5'',694$
$\sin 2Ev + c'mv + 2cv$	$\{+0'',059\,(5)\}$	$= + \; 0'',059$
$\sin 2Ev - c'mv + 2cv$	$\{-0'',415\,(4)\}$	$= - \; 0'',415$
$\sin 2Ev + c'mv - 2gv$	$\{+1'',183\,(4) + 0'',290\,(5)\}$	$= + \; 1'',473$
$\sin 2Ev - c'mv - 2gv$	$\{-2'',762\,(4) + 0'',433\,(5)\}$	$= - \; 2'',329$
$\sin 2Ev + c'mv + 2gv$	$\{+0'',027\,(5)\}$	$= + \; 1'',473$
$\sin 2Ev - c'mv + 2gv$	$\{-0'',189\,(5)\}$	$= - \; 0'',189$
$\sin 2Ev - 3cv$	$\{+0'',488\,(5)\}$	$= + \; 0'',488$
$\sin 2Ev + 3cv$	$\{+0'',333\,(5)\}$	$= + \; 0'',333$
$\sin 2Ev - 2gv - cv$	$\{-1'',931\,(4) + 0'',209\,(5)\}$	$= - \; 1'',722$
$\sin 2Ev + 2gv - cv$	$\{-3'',217\,(4) - 1'',304\,(5)\}$	$= - \; 4'',521$

$\sin 2Ev - 2gv + cv$	$\{+10'',939(4) - 1'',434(5)\}$	$=+$	$9'',505$
$\sin 2Ev + 2gv + cv$	$\{+0'',385(5)\}$	$=+$	$0'',385$
$\sin 2Ev - 2c'mv - cv$	$\left\{\begin{matrix}-3'',813(4) - 2'',300(5) \\ -1'',016(6) - 0'',329(7)\end{matrix}\right\}$	$=-$	$7'',458$
$\sin 2Ev + 2c'mv - cv$	$\{+0'',673(4) + 0'',895(5) + 0'',435(6)\}$	$=+$	$2'',003$
$\sin 2Ev - 2c'mv + cv$	$\{+0'',304(5)\}$	$=+$	$0'',304$
$\sin 2Ev + 2c'mv - 2cv$	$\{-0'',189(5)\}$	$=-$	$0'',189$
$\sin 2Ev - 2c'mv - 2cv$	$\{-0'',157(5)\}$	$=-$	$0'',157$
$\sin 2Ev + 2c'mv - 2gv$	$\{+0'',020(5)\}$	$=+$	$0'',020$
$\sin 2Ev - 2c'mv - 2gv$	$\{-0'',085(5)\}$	$=-$	$0'',085$
$\sin 2Ev + 2gv - 2cv$	$\{-0'',618(5)\}$	$=-$	$0'',618$
$\sin 2Ev - 2gv + 2cv$	$\{-0'',406(5)\}$	$=-$	$0'',406$
$\sin 2Ev - 2gv - 2cv$	$\{+0'',035(5)\}$	$=+$	$0'',035$
$\sin 2Ev - 4gv$	$\{-0'',047(5)\}$	$=-$	$0'',047$
$\sin 2Ev - 4cv$	$\{-0'',033(5)\}$	$=-$	$0'',033$
$\sin 2Ev + 3c'mv - cv$	$\{+0'',0004(5)\}$	$=+$	$0'',0004$
$\sin 2Ev - 3c'mv - cv$	$\{-0'',106(5)\}$	$=-$	$0'',106$
$\sin 2Ev + c'mv - 2gv + cv$	$\{-0'',184(5)\}$	$=-$	$0'',184$
$\sin 2Ev + c'mv - 2gv - cv$	$\{+0'',032(5)\}$	$=+$	$0'',032$
$\sin 2Ev - c'mv - 2gv + cv$	$\{+0'',429(5)\}$	$=+$	$0'',429$
$\sin 2Ev - c'mv - 2gv - cv$	$\{-0'',079(5)\}$	$=-$	$0'',079$
$\sin 2Ev + c'mv + 2gv - cv$	$\{+0'',054(5)\}$	$=+$	$0'',054$
$\sin 2Ev - c'mv + 2gv - cv$	$\{-0'',126(5)\}$	$=-$	$0'',126$

$$\sin Ev \quad \left\{\begin{matrix} +72'',920\,(3)+33'',818\,(4) \\ +10'',710\,(5)+4'',572\,(6) \\ +1'',934(7)+0'',860(8)+0'',5(\text{ind.}) \end{matrix}\right\}\left(1-\frac{1}{44}\right) = +121'',489$$

$$\sin Ev-cv \quad \left\{\begin{matrix} +10'',999\,(4)+4'',232\,(5) \\ +1'',656(6)+0'',724(7)+0'',3(\text{ind.}) \end{matrix}\right\}\left(1-\frac{1}{44}\right) = +\ 17'',504$$

$$\sin Ev+cv \quad \left\{\begin{matrix} -3'',000\,(4)-1'',077\,(5) \\ -0'',299\,(6)-0'',107\,(7) \end{matrix}\right\}\left(1-\frac{1}{44}\right) = -\ 4'',381$$

$$\sin Ev+c'mv \quad \left\{\begin{matrix} -21'',855\,(3)+7'',357\,(4) \\ -3'',266\,(5)+0'',562\,(6) \end{matrix}\right\}\left(1-\frac{1}{44}\right) = -\ 16'',912$$

$\sin Ev-c'mv \quad \{-1'',226\,(4)+1'',202\,(5)+0'',157\,(6)\} = +\ 0'',133$

$\sin Ev-2cv \quad \{+0'',165\,(5)\} = +\ 0'',165$

$\sin Ev+2cv \quad \{+0'',110\,(5)\} = +\ 0'',110$

$\sin Ev-2gv \quad \{+0'',814\,(5)\} = +\ 0'',814$

$\sin Ev+2gv \quad \{+0'',074\,(5)\} = +\ 0'',074$

$\sin Ev+2c'mv \quad \{+0'',003\,(5)\} = +\ 0'',003$

$\sin Ev-2c'mv \quad \{-0'',075\,(5)\} = -\ 0'',075$

$\sin Ev+c'mv-cv \quad \{-1'',498\,(4)+1'',032\,(5)\} = -\ 0'',466$

$\sin Ev+c'mv+cv \quad \{+0'',899\,(4)-0'',303\,(5)\} = +\ 0'',596$

$\sin Ev-c'mv-cv \quad \{+0'',025\,(5)\} = +\ 0'',025$

$\sin Ev-c'mv+cv \quad \{+0'',051\,(5)\} = +\ 0'',051$

$\sin Ev+c'mv-2cv \quad \{-0'',082\,(5)\} = -\ 0'',082$

$\sin Ev+c'mv+2cv \quad \{-0'',033\,(5)\} = -\ 0'',033$

$\sin Ev+c'mv-2gv \quad \{-0'',037\,(5)\} = -\ 0'',037$

$\sin Ev+c'mv+2gv \quad \{-0'',021\,(5)\} = -\ 0'',021$

$\sin 3Ev$	$\left\{\begin{matrix}-1'',395(4)-0'',706(5)\\-0'',291(6)-0'',107(7)\end{matrix}\right\}\left(1-\frac{1}{44}\right)$	$=-\ 2'',442$
$\sin 3Ev-cv$	$\{+0'',309(5)+0'',077(6)+0'',005(7)\}$	$=+\ 0'',391$
$\sin 3Ev+cv$	$\{+0'',156(5)\}$	$=+\ 0'',156$
$\sin 3Ev+c'mv$	$\{+0'',145(5)\}$	$=+\ 0'',145$
$\sin 3Ev-c'mv$	$\{-0'',115(5)\}$	$=-\ 0'',115$
$\sin 3Ev-2cv$	$\{+0'',640(5)\}$	$=+\ 0'',640$
$\sin 3Ev-2gv$	$\{+0'',247(5)\}$	$=+\ 0'',247$
$\sin 3Ev+c'mv-cv$	$\{+0'',126(5)\}$	$=+\ 0'',126$
$\sin 4Ev$	$\{+7'',139(4)+0'',846(5)+0'',805(6)\}$	$=+\ 8'',790$
$\sin 4Ev-cv$	$\left\{\begin{matrix}+17'',756(4)+7'',318(5)\\+2'',592(6)+0'',702(7)\end{matrix}\right\}$	$=+28'',368$
$\sin 4Ev+cv$	$\{-1'',038(5)\}$	$=-\ 1'',038$
$\sin 4Ev+c'mv$	$\{-0'',120(5)-0'',006(6)\}$	$=-\ 0'',126$
$\sin 4Ev-c'mv$	$\{+0'',840(5)+0'',316(6)\}$	$=+\ 1'',156$
$\sin 4Ev-2cv$	$\left\{\begin{matrix}+9'',154(4)+4'',588(5)+1'',363(6)\\+0'',373(7)+0'',095(8)\end{matrix}\right\}$	$=+15'',473$
$\sin 4Ev-2gv$	$\{+0'',329(4)+0'',193(5)-0'',072(6)\}$	$=+\ 0'',450$
$\sin 4Ev+c'mv-cv$	$\{-0'',448(5)-0'',101(6)+0'',043(7)\}$	$=-\ 0'',506$
$\sin 4Ev-c'mv-cv$	$\{+1'',741(5)+0'',952(6)+0'',358(7)\}$	$=+\ 3'',051$
$\sin 4Ev-3cv$	$\{+0'',355(5)\}$	$=+\ 0'',355$
$\sin 4Ev-2gv-cv$	$\{+0'',163(5)\}$	$=+\ 0'',163$
$\sin 4Ev-2gv+cv$	$\{-0'',018(5)\}$	$=-\ 0'',018$
$\sin 4Ev+c'mv-2cv$	$\{-0'',308(5)\}$	$=-\ 0'',308$
$\sin 4Ev-c'mv-2cv$	$\{+0'',718(5)\}$	$=+\ 0'',718$
$\sin 4Ev+c'mv-2gv$	$\{-0'',011(5)\}$	$=-\ 0'',011$
$\sin 4Ev-c'mv-2gv$	$\{+0'',026(5)\}$	$=+\ 0'',026.$

Expression numérique de la latitude de la Lune en fonction de sa longitude vraie (*Voyez p.* 596-501).

L = Latitude de la Lune =

$\sin gv$	$\{+18576'',000(1)-37'',665(3)$ $+0'',094(5)-0'',002(6)\}$	$=+1853'',8427$
$\sin 3gv$	$\{+12'',556(3)+0'',002(5)\}$	$=+12'',558$
$\sin 5gv$	$\{+0'',015(5)\}$	$=+\ 0'',015$
$\sin gv+cv$	$\{-5'',701(4)+0'',160(5)$ $+0'',141(6)+0'',017(7)\}$	$=-\ 5'',383$
$\sin gv-cv$	$\{+17'',102(4)+1'',919(5)$ $+0'',348(6)+0'',086(7)\}$	$=+19'',455$
$\sin gv-2cv$	$\{-34'',926(3)+8'',817(4)$ $+0'',251(5)+0'',142(6)\}$	$=-25'',716$
$\sin gv+2cv$	$\{+0'',218(5)$	$=+\ 0'',218$
$\sin gv-3cv$	$\{-0'',011(6)-0'',004(7)\}$	$=-\ 0'',015$
$\sin 3gv-cv$	$\{+0'',046(6)-0'',008(7)\}$	$=+\ 0'',038$
$\sin 3gv-2cv$	$\{-0'',177(6)+0'',072(6)\}$	$=-\ 0'',105$
$\sin gv+c'mv$	$\{+26'',283(3)-1'',884(4)$ $-0'',492(5)-0'',156(6)\}$	$=+23'',751$
$\sin gv-c'mv$	$\{-26'',283(3)+0'',246(4)$ $+0'',504(5)+0'',253(6)\}$	$=-25'',280$
$\sin gv+2c'mv$	$\{+0'',332(4)-0'',019(5)\}$	$=+\ 0'',313$
$\sin gv-2c'mv$	$\{-0'',332(4)-0'',010(5)+0'',004(6)\}$	$=-\ 0'',338$
$\sin gv+3c'mv$	$\{+0'',006(5)\}$	$=+\ 0'',006$
$\sin gv-3c'mv$	$\{-0'',006(5)\}$	$=-\ 0'',006$
$\sin 3gv+c'mv$	$\{+0'',055(5)\}$	$=+\ 0'',055$
$\sin 3gv-c'mv$	$\{-0'',055(5)\}$	$=-\ 0'',055$

$\sin gv+cv+c'mv$	$\{-0'',144(5)\}$	$=-\ 0'',144$
$\sin gv-cv-c'mv$	$\{+0'',431(5)\}$	$=+\ 0'',431$
$\sin gv+cv-c'mv$	$\{-0'',144(5)\}$	$=-\ 0'',144$
$\sin gv-cv+c'mv$	$\{+0'',144(5)\}$	$=+\ 0'',144$
$\sin gv-2cv-c'mv$	$\{+0'',148(5)\}$	$=+\ 0'',148$
$\sin gv-2cv+c'mv$	$\{-0'',148(5)\}$	$=-\ 0'',148$
$\sin gv-2cv+c'mv$	$\{-0'',002(6)\}$	$=-\ 0'',002$
$\sin gv+cv-2c'mv$	$\{-0'',004(6)\}$	$=-\ 0'',004$
$\sin gv-cv+2c'mv$	$\{+0'',011(6)\}$	$=+\ 0'',011$
$\sin gv-cv-2c'mv$	$\{-0'',011(6)\}$	$=-\ 0'',011$
$\sin fv$	$\{-10'',440(1)-0'',195(2)-0'',161(3)=-10'',796\}\sin 2\omega$	$=-\ 7'',886$
$\sin 2Ev-gv$	$\left\{\begin{array}{l}+521'',066(2)+9'',744(3)\\-3'',492(4)-0'',135(5)\\+0'',173(6)+97'',12(\varepsilon'^2-E'^2)\end{array}\right\}$	$=+527'',011$
$\sin 2Ev+gv$	$\{-1'',059(4)-0'',400(5)-0'',054(6)\}$	$=-\ 1'',513$
$\sin 2Ev+c'mv-gv$	$\{-8'',751(3)-1'',556(4)-0'',157(5)\}$	$=-\ 10'',464$
$\sin 2Ev-c'mv-gv$	$\{+20'',443(3)+1'',775(4)+0'',025(5)\}$	$=+\ 22'',243$
$\sin 2Ev+c'mv+gv$	$\{-0'',017(5)\}$	$=-\ 0'',017$
$\sin 2Ev-c'mv+gv$	$\{+0'',041(5)\}$	$=+\ 0'',041$
$\sin 2Ev-gv-cv$	$\left\{\begin{array}{l}-17'',105(4)-3'',199(5)\\-0'',556(6)-0'',088(7)\end{array}\right\}$	$=-\ 20'',938$
$\sin 2Ev+gv+cv$	$\{+0'',032(6)\}$	$=+\ 0',032$
$\sin 2Ev-gv+cv$	$\{+5'',701(4)+0'',551(5)-0'',033(6)\}$	$=+\ 6'',219$
$\sin 2Ev+gv-cv$	$\{-0'',800(5)-0'',257(6)-0'',042(7)\}$	$=-\ 1'',099$

$\sin 2Ev - 2cv + gv$	{+0″,980(4) − 0″,559(5) − 0″,243(6)}	= + 0″,178
$\sin 2Ev + 2cv - gv$	{− 0″,145 (5) + 0″,012 (6)}	= − 0″,133
$\sin 2Ev - 2cv - gv$	{− 3″,918 (4) − 0″,813 (5)}	= − 4″,731
$\sin 2Ev - 3gv$	{− 1″,057 (4) + 0″,275 (5)}	= − 0″,782
$\sin 2Ev + 2c'mv - gv$	{−0″,111(4) − 0″,011(5) − 0″,006(6)}	= − 0″,128
$\sin 2Ev - 2c'mv - gv$	{+ 0″,626 (4) + 0″,091 (5)}	= + 0″,717
$\sin 2Ev - 3gv + cv$	{+ 0″,046 (6)}	= + 0″,046
$\sin 2Ev + gv - 3cv$	{− 0″,032 (6)}	= − 0″,032
$\sin 2Ev + 3c'mv - gv$	{− 0″,0001 (5)}	= − 0″,0001
$\sin 2Ev - 3c'mv - gv$	{+ 0″,017 (5)}	= + 0″,017
$\sin 2Ev + c'mv - 3gv$	{+ 0″,018 (5)}	= + 0″,018
$\sin 2Ev - c'mv - 3gv$	{− 0″,042 (5)}	= − 0″,042
$\sin 2Ev - 3gv + 2cv$	{− 0″,015 (6)}	= − 0″,015
$\sin 2Ev + 2c'mv - 3gv$	{+ 0″,0002 (6)}	= + 0″,0002
$\sin 2Ev + c'mv - gv + cv$	{− 0″,048 (5)}	= − 0″,048
$\sin 2Ev - c'mv - gv + cv$	{+ 0″,336 (5)}	= + 0″,336
$\sin 2Ev + c'mv - gv - cv$	{+ 0″,144 (5)}	= + 0″,144
$\sin 2Ev - c'mv - gv - cv$	{− 1″,007 (5)}	= − 1″,007
$\sin 2Ev + c'mv + gv - 2cv$	{− 0″,016 (5)}	= − 0″,016
$\sin 2Ev + c'mv - gv - 2cv$	{+ 0″,066 (5)}	= + 0″,066
$\sin 2Ev - c'mv + gv - 2cv$	{+ 0″,038 (6)}	= + 0″,038
$\sin 2Ev - c'mv - gv - 2cv$	{− 0″,154 (6)}	= − 0″,154
$\sin 2Ev + 2c'mv - gv + cv$	{− 0″,00007 (7)}	= − 0″,00007
$\sin 2Ev + 2c'mv + gv - 2cv$	{− 0″,0002 (6)}	= − 0″,0002
$\sin 2Ev + 2c'mv - gv - 2cv$	{− 0″,0008 (6)}	= − 0″,0008

$\sin Ev + gv$	$\{+0'',168\,(5)\}$	$= +0'',168$
$\sin Ev - gv$	$\{+0'',603\,(5)\}$	$= +0'',603$
$\sin Ev + gv - cv$	$\{+0'',452\,(5)\}$	$= +0'',452$
$\sin Ev - gv + cv$	$\{-0'',541\,(5)\}$	$= -0'',541$
$\sin Ev - gv - cv$	$\{+0'',541\,(5)\}$	$= +0'',541$
$\sin Ev + c'mv + gv$	$\{-0'',0027\,(6) + 0'',0027\,(7)\}$	$= -0'',000$
$\sin Ev + c'mv - gv$	$\{-0'',007\,(6) + 0'',005\,(7)\}$	$= -0'',002$
$\sin Ev - c'mv + gv$	$\{+0'',008\,(6)\}$	$= +0'',008$
$\sin Ev - c'mv - gv$	$\{+0'',014\,(6)\}$	$= +0'',014$
$\sin Ev + c'mv + gv - cv$	$\{-0'',027\,(5) - 0'',037\,(6)\}$	$= -0'',064$
$\sin Ev + c'mv - gv - cv$	$\{-0'',054\,(5) - 0'',022\,(6)\}$	$= -0'',076$
$\sin Ev + c'mv - gv + cv$	$\{+0'',036\,(5) - 0'',029\,(6)\}$	$= +0'',007$
$\sin Ev - c'mv + gv - cv$	$\{+0'',012\,(6)\}$	$= +0'',012$
$\sin Ev - c'mv - gv + cv$	$\{-0'',012\,(6)\}$	$= -0'',012$
$\sin 3Ev - gv$	$\{-0'',167\,(5)\}$	$= -0'',167$
$\sin 3Ev - gv - cv$	$\{-0'',150\,(5)\}$	$= -0'',150$
$\sin 3Ev + c'mv - gv$	$\{+0'',008\,(6)\}$	$= +0'',008$
$\sin 3Ev + c'mv - gv - cv$	$\{+0'',007\,(6)\}$	$= +0'',007$
$\sin 4Ev - gv$	$\{+0'',371\,(5)\}$	$= +0'',371$
$\sin 4Ev - gv - cv$	$\{+0'',800\,(5) + 0'',322\,(6)\}$	$= +1'',122$
$\sin 4Ev - gv - 2cv$	$\{+0'',282\,(5)\}$	$= +0'',282$

Expression numérique de la longitude vraie de la Lune en fonction de sa longitude moyenne (*V.* *p.* 574-584)

$$v = nt + \varepsilon - \int \zeta dv +$$

$$\sin c.nt \left\{\begin{array}{l} +22626'',255\,(1) + 40'',563\,(3) - 5'',548\,(4) \\ -13'',499\,(5) - 4'',876\,(6) - 1'',269\,(7) \\ +352'',222\,(\varepsilon'^2 - E'^2) + 415'',400\,(\varepsilon'^4 - E'^4) \end{array}\right\} = +22641'',626$$

$$\sin 2c.nt \left\{\begin{array}{l} +775'',622\,(2) - 0'',583\,(4) - 2'',616\,(5) \\ -2'',049\,(6) - 0'',708\,(7) - 0'',189\,(8) \\ +36'',454\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array}\right\} = +769'',477$$

$$\sin 3c.nt \quad \{+36'',869\,(3) - 0'',149\,(5)\} = +\ 36'',720$$

$$\sin 4c.nt \quad \{+2'',003\,(4)\} = +\ 2'',003$$

$$\sin 5c.nt \quad \{+0'',117\,(5)\} = +\ 0'',117$$

$$\sin g.nt - f.nt \quad \{-6'',577\} = -\ 6'',577$$

$$\sin g.nt + f.nt \quad \{+0'',343\} = +\ 0'',343$$

$$\sin 2g.nt \left\{\begin{array}{l} -418'',234\,(2) + 5'',300\,(4) \\ +1'',985\,(5) - 0'',092\,(6) \end{array}\right\} = -411'',041$$

$$\sin 4g.nt \quad \{+0'',424\,(4)\} = +\ 0'',424$$

$$\sin 2g.nt - c.nt \left\{\begin{array}{l} -68'',817\,(3) + 28'',968\,(4) \\ +2'',408\,(5) + 0'',250\,(6) \end{array}\right\} = -\ 37'',191$$

$$\sin 2g.nt + c.nt \quad \{-45'',880\,(3) + 0'',679\,(5)\} = -\ 45'',201$$

$$\sin 2g.nt - 2c.nt \quad \{+0'',629\,(4) + 0'',794\,(5) - 0'',344\,(6)\} = +\ 1'',079$$

$$\sin 2g.nt + 2c.nt \quad \{-4'',089\,(4)\} = -\ 4'',089$$

sin 2g.nt − 3c.nt	{+ 0″,081 (5) − 0″,033 (6)}	= + 0″,048
sin 2g.nt + 3c.nt	{− 0″,339 (5)}	= − 0″,339
sin 4g.nt − c.nt	{+ 0″,140 (5)}	= + 0″,140
sin 4g.nt + c.nt	{+ 0″,093 (5)}	= + 0″,093
sin c′m.nt	− 778″,263 (2) + 70″,898 (4) + 28″,317 (5) + 7″,725 (6) + 1″,351 (7) + 1″,328 (8)	= − 668″,644
sin 2c′m.nt	{− 9″,814 (3) + 1″,151 (5) + 0,″791 (6)}	= − 7″,872
sin 3c′m.nt	{− 0″,162 (4)}	= − 0″,162
sin 4c′m.nt	{− 0″,003 (5)}	= − 0″,003
sin c.nt + c′m.nt	− 74″,702 (3) − 23″,847 (4) − 7″,030 (5) − 4″,046 (6) − 0″,965 (7) − 0″,339 (8) − 0″,17 (ind.)	= − 111″,099
sin c.nt − c′m.nt	+ 74″,702 (3) + 41″,009 (4) + 17″,897 (5) + 8″,286 (6) + 3″,714 (7) + 1″,731 (8) + 0″,72 (ind.)	= + 148″,059
sin c.nt − 2c′m.nt	{+ 0″,942 (4) + 0″,749 (5) + 0″,440 (6)}	= + 2″,131
sin c.nt + 2c′m.nt	{− 0″,942 (4) − 0″,174 (5) − 0″,056 (6)}	= − 1″,172
sin 2c.nt − c′m.nt	+ 5″,121 (4) + 2″,819 (5) + 1″,104 (6) + 0″,6 (ind.)	= + 9″,644
sin 2c.nt + c′m.nt	{− 5″,121 (4) − 1″,673 (5) − 0′,55 (ind.)}	= − 7″,344
sin 2c.nt + 2c′m.nt	{− 0″,065 (5)}	= − 0″,065
sin 2c.nt − 2c′m.nt	{+ 0″,065 (5)}	= + 0″,065
sin c.nt − 3c′m.nt	{+ 0″,016 (5)}	= + 0″,016
sin c.nt + 3c′m.nt	{− 0″,016 (5)}	= − 0″,016

$$\sin 3c.nt + c'm.nt \quad \{-0'',365\,(5)\} \quad = - \quad 0'',365$$

$$\sin 3c.nt - c'm.nt \quad \{+0'',365\,(5)\} \quad = + \quad 0'',365$$

$$\sin 2g.nt - c'm.nt \quad \{-0'',395\,(4) + 0'',152\,(5) + 0'',113\,(6)\} \quad = - \quad 0'',130$$

$$\sin 2g.nt + c'm.nt \quad \{+0'',395\,(4) + 0'',190\,(5)\} \quad = + \quad 0'',585$$

$$\sin 2g.nt + 2c'm.nt \quad \{+0'',005\,(5)\} \quad = + \quad 0'',005$$

$$\sin 2g.nt - 2c'm.nt \quad \{-0'',005\,(5)\} \quad = - \quad 0'',005$$

$$\sin 2g.nt - c.nt + c'm.nt \quad \{-0'',162\,(5)\} \quad = - \quad 0'',162$$

$$\sin 2g.nt - c.nt - c'm.nt \quad \{+0'',162\,(5)\} \quad = + \quad 0'',162$$

$$\sin 2g.nt + c.nt + c'm.nt \quad \{+0'',195\,(5)\} \quad = + \quad 0'',195$$

$$\sin 2g.nt + c.nt - c'm.nt \quad \{-0'',195\,(5)\} \quad = - \quad 0'',195$$

$$\sin 2E.nt \quad \left\{\begin{matrix} +1586'',887\,(2) + 618'',517\,(3) \\ +131'',821\,(4) + 27'',154\,(5) \\ +4'',921\,(6) + 0'',990\,(7) \\ +0'',030\,(8) + 52'',511\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{matrix}\right\} \quad = + 2370'',320$$

$$\sin 2E.nt - c.nt \quad \left\{\begin{matrix} +3173'',388\,(2) + 1040'',488\,(3) \\ +291'',514\,(4) + 66'',253\,(5) \\ +12'',332\,(6) + 1'',566\,(7) \\ +0'',107\,(8) + 84'',283\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{matrix}\right\} \quad = + 4585'',648$$

$$\sin 2E.nt + c.nt \quad \left\{\begin{matrix} +134'',512\,(3) + 46'',280\,(4) \\ +9'',377\,(5) + 1'',716\,(6) \\ +0'',261\,(7) + 115'',932\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{matrix}\right\} \quad = + \quad 192'',146$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt \quad \left\{\begin{matrix} -13'',341\,(3) - 11'',035\,(4) - 1'',214\,(5) \\ +0'',595\,(6) + 1'',460\,(7) - 0'',076\,(8) \end{matrix}\right\} \quad = - \quad 23'',611$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt \quad \left\{\begin{matrix} +93'',386\,(3) + 51'',070\,(4) \\ +16'',384\,(5) + 4'',040\,(6) \\ +0'',871\,(7) + 0'',099\,(8) \end{matrix}\right\} \quad = + \quad 165'',850$$

$$\sin 2E.nt - 2c.nt \left\{\begin{array}{l} +130'',539\,(3)+46'',002\,(4) \\ +22'',602\,(5)+8'',439\,(6) \\ +3'',558\,(7)+0'',963\,(8)+0'',26\,(\text{ind.}) \end{array}\right\} = +\ 212'',363$$

$$\sin 2E.nt + 2c.nt \left\{+10'',307\,(4)+3'',364\,(5)+0'',448\,(6)\right\} = +\ 14'',119$$

$$\sin 2E.nt - 2g.nt \left\{\begin{array}{l} +70'',390\,(3)-12'',871\,(4) \\ -2'',125\,(5)-0'',479\,(6) \end{array}\right\} = +\ 54'',915$$

$$\sin 2E.nt + 2g.nt \left\{-3'',218\,(4)-0'',158\,(5)\right\} = -\ 3'',376$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt \left\{-0'',065\,(5)\right\} = -\ 0'',065$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt \left\{\begin{array}{l} +3'',814\,(4)+2'',701\,(5) \\ +0'',997\,(6)+0''301\,(7) \end{array}\right\} = +\ 7'',813$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - c.nt \left\{\begin{array}{l} -53'',357\,(3)-5'',754\,(4) \\ +10'',452\,(5)+8'',841\,(6) \\ +5'',693\,(7)+2'',814\,(8) \\ +2'',5\,(\text{ind.}) \end{array}\right\} = -\ 28'',811$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - c.nt \left\{\begin{array}{l} 124'',501\,(3)+59'',900\,(4) \\ +19'',436\,(5)+5'',321\,(6) \\ +0'',066\,(7)+0'',518\,(8) \end{array}\right\} = +\ 209'',742$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + c.nt \left\{\begin{array}{l} -1'',131\,(4)-1'',310\,(5) \\ -0'',363\,(6)-0'',081\,(7) \end{array}\right\} = -\ 2'',884$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + c.nt \left\{\begin{array}{l} +7'',916\,(4)+4'',403\,(5) \\ +1'',343\,(6)+0'',382\,(7) \end{array}\right\} = +\ 14'',044$$

$$\sin 2E.nt + 3c'm.nt \left\{+0'',0002\,(5)\right\} = +\ 0'',0002$$

$$\sin 2E.nt - 3c'm.nt \left\{+0'',130\,(5)\right\} = +\ 0'',130$$

$$(^*)\left\{\begin{array}{ll} \sin 2E.nt-3c.nt & \{+8'',353\,(4)+2'',981\,(5)+1'',473\,(6)\}=+12'',807 \\ \sin 2E.nt+3c.nt & \{+3'',252\,(5)+0'',057\,(6)\} \qquad\qquad\qquad =+\ 3'',309 \end{array}\right.$$

(*) Pour calculer la partie du sixième ordre qui appartient aux coefficiens des deux argumens $2E.nt-3c.nt$, $2E.nt+3c.nt$ j'ai ajouté au développement des fonctions $\overline{F(\nu)}^2$, $\overline{F(\nu)}^3$, $\overline{F(\nu)}^4$ les termes suivans ; savoir

$$\overline{F(\nu)}^2 = \cos 2E\nu-3c\nu \;\; e^3\left\{\frac{187057}{1536}+\frac{135}{32}-\frac{52041}{1024}-\frac{15}{64}+\frac{59}{36}=\frac{705797}{9216}\right\} m^3$$

$$\cos 2E\nu+3c\nu \;\; e^3\left\{-\frac{161}{24}-\frac{119}{32}-\frac{59}{36}=-\frac{3475}{288}\right\} m^3;$$

$$\overline{F(\nu)}^3 = \sin 2E\nu-3c\nu \;\; e^3\left\{\frac{17595}{128}+\frac{45}{8}-\frac{59}{16}-\frac{59}{16}+\frac{17347}{256}+\frac{45}{8}=\frac{53529}{256}\right\} m^3$$

$$\sin 2E\nu+3c\nu \;\; e^3\left\{-\frac{653}{48}-\frac{59}{16}-\frac{59}{16}-\frac{119}{24}=-\frac{415}{16}\right\} m^3;$$

$$\overline{F(\nu)}^4 = \cos 2E\nu-3c\nu \;\; e^3\left(-\frac{59}{3}m^3\right)+\cos 2E\nu+3c\nu \;\; e^3\left(\frac{59}{3}m^3\right).$$

Il suit de là, que la fonction

$$\frac{1}{2}\,\frac{d.\overline{F(\nu)}^2}{d\nu}-\frac{1}{2.3}\,\frac{d^2.\overline{F(\nu)}^3}{d\nu^2}+\frac{1}{2.3.4}\,\frac{d^3.\overline{F(\nu)}^4}{d\nu^3}$$

renferme ces deux termes

$$\sin 2E\nu-3c\nu \;\; e^3\left\{\frac{705797}{18432}-\frac{269}{192}-\frac{405}{128}+\frac{17843}{512}+\frac{537}{16}-\frac{15}{16}+\frac{59}{72}+\frac{11}{8}=\frac{1905793}{18432}\right\} m^3$$

$$\sin 2E\nu+3c\nu \;\; e^3\left\{\frac{17375}{576}-\frac{289}{48}-\frac{10375}{96}+\frac{955}{48}+\frac{7375}{72}-\frac{275}{8}=\frac{2317}{576}\right\} m^3,$$

lesquels étant réduits en nombres donnent

$$\sin 2E.nt-3c.nt\ (+1'',473), \qquad \sin 2E.nt+3c.nt\ (0'',057).$$

A la vérité on néglige de cette manière les termes analogues, que l'intégration directe introduit dans $-F(\nu)$; mais la petitesse de ces termes dispense d'en faire le calcul.

$$(*)\begin{cases}\sin 2E.nt+c'm.nt-2c.nt & \{-2'',195(4)+0'',704(5)+0'',096(6)\}=-1'',395\\ \sin 2E.nt-c'm.nt-2c.nt & \{+5'',121(4)+2'',105(5)+0'',536(6)\}=+7'',762\end{cases}$$

$$\sin 2E.nt+c'm.nt+2c.nt \quad \{-0'',087(5)\} \quad =-0'',087$$

$$\sin 2E.nt-c'm.nt+2c.nt \quad \{+0'',607(5)\} \quad =+0'',607$$

$$\sin 2E.nt+c'm.nt-2g.nt \quad \{-1'',184(4)-0'',291(5)\} \quad =-1'',475$$

$$\sin 2E.nt-c'm.nt-2g.nt \quad \{+2'',762(4)-0'',433(5)\} \quad =+2'',329$$

$$\sin 2E.nt+c'm.nt+2g.nt \quad \{+0'',028(5)\} \quad =+0'',028$$

$$\sin 2E.nt-c'm.nt+2g.nt \quad \{-0'',189(5)\} \quad =-0'',189$$

$$(**)\begin{cases}\sin 2E.nt-2g.nt-c.nt & \{+2'',574(4)-1'',958(5)-0'',586(6)\}=+0'',030\\ \sin 2E.nt+2g.nt-c.nt & \{-6'',435(4)-2'',439(5)-0'',510(6)\}=-9'',384\end{cases}$$

$$\sin 2E.nt-2g.nt+c.nt \quad \{-7'',078(4)+0'',927(5)\} \quad =-6'',151$$

$$\sin 2E.nt+2g.nt+c.nt \quad \{-0'',626(5)\} \quad =-0'',626$$

$$\sin 2E.nt-2c'm.nt-c.nt \quad \left\{\begin{matrix}+3'',813(4)+2'',402(5)\\ +1'',014(6)+0'',298(7)\end{matrix}\right\} \quad =+7'',527$$

$$\sin 2E.nt+2c'm.nt-c.nt \quad \left\{\begin{matrix}-0'',673(4)-0'',870(5)\\ -0'',471(6)\end{matrix}\right\} \quad =-2'',014$$

$$\sin 2E.nt-2c'm.nt+c.nt \quad \{+0'',323(5)\} \quad =+0'',323$$

(*) Pour avoir la partie du sixième ordre qui appartient aux coefficiens des deux argumens $2E.nt+c'm.nt-2c.nt$, $2E.nt-c'm.nt-2c.nt$, j'ai réduit en nombres les coefficiens de ces deux termes (Voyez p. 517 et 518);

$$\frac{1}{2}\frac{d.\overline{F(v)}^2}{dv} = \sin 2Ev+c'mv-2cv \;\; e^2\varepsilon'\left(\frac{1053}{64}+\frac{45}{8}=\frac{1413}{64}\right)m^3$$

$$\sin 2Ev-c'mv-2cv \;\; e^2\varepsilon'\left(\frac{17367}{128}-\frac{105}{8}=\frac{15687}{128}\right)m^3;$$

ce qui revient à négliger les termes analogues que l'intégration introduit dans le développement de $-F(v)$.

(**) Voyez la page 627.

$\sin 2E.nt + 2c'm.nt + 2c.nt$	$\{-0'',190\,(5)\}$	$= -\ 0'',190$
$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - 2c.nt$	$\{+0'',157\,(5)\}$	$= +\ 0'',157$
$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - 2g.nt$	$\{-0'',020\,(5)\}$	$= -\ 0'',020$
$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - 2g.nt$	$\{+0'',085\,(5)\}$	$= +\ 0'',085$
$\sin 2E.nt + c'm.nt - 3c.nt$	$\{-0'',140\,(5)\}$	$= -\ 0'',140$
$\sin 2E.nt - c'm.nt - 3c.nt$	$\{+0'',328\,(5)\}$	$= +\ 0'',328$
$\sin 2E.nt + 2g.nt - 2c.nt$	$\{-0'',941\,(5)\}$	$= -\ 0'',941$
$\sin 2E.nt - 2g.nt - 2c.nt$	$\{-0'',177\,(5)\}$	$= -\ 0'',177$
$\sin 2E.nt - 2g.nt + 2c.nt$	$\{-0'',529\,(5)\}$	$= -\ 0'',529$
$\sin 2E.nt - 4g.nt$	$\{-0'',095\,(5)\}$	$= -\ 0'',095$
$\sin 2E.nt - 4c.nt$	$\{+0'',873\,(5)\}$	$= +\ 0'',873$
$\sin 2E.nt + 3c'm.nt - c.nt$	$\{-0'',0006\,(5)\}$	$= -\ 0'',0006$
$\sin 2E.nt - 3c'm.nt - c.nt$	$\{+0'',106\,(5)\}$	$= +\ 0'',106$
$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt + c.nt$	$\{+0'',119\,(5)\}$	$= +\ 0'',119$
$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt + c.nt$	$\{-0'',278\,(5)\}$	$= -\ 0'',278$
$\sin 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt - c.nt$	$\{-0'',043\,(5)\}$	$= -\ 0'',043$
$\sin 2E.nt + c'm.nt + 2g.nt - c.nt$	$\{+0'',108\,(5)\}$	$= +\ 0'',188$
$\sin 2E.nt - c'm.nt + 2g.nt - c.nt$	$\{-0'',253\,(5)\}$	$= -\ 0'',253$
$\sin 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt - c.nt$	$\{+0'',101\,(5)\}$	$= +\ 0'',101$

$$\sin E.nt \quad \left\{\begin{array}{l} -72'',920\,(3) - 33'',818\,(4) \\ -10'',939\,(5) - 4'',393\,(6) \\ -1'',847\,(7) - 0'',829\,(8) \\ -0'',5\,(\text{ind.}) \end{array}\right\}\left(1 - \frac{1}{44}\right) = -122'',110$$

$\sin E.nt - c.nt$	$\left\{\begin{array}{l} -10'',999(4) - 4'',560(5) \\ -1'',820(6) - 0'',786(7) \\ -0'',3(\text{ind.}) \end{array}\right\}\left(1-\frac{1}{44}\right)$	$= -\ 18'',045$
$\sin E.nt + c.nt$	$\left\{\begin{array}{l} -4'',999(4) - 2'',334(5) \\ -0'',821(6) - 0'',284(7) \end{array}\right\}\left(1-\frac{1}{44}\right)$	$= -\ 8'',237$
$\sin E.nt + c'm.nt$	$\left\{\begin{array}{l} +21'',855(3) - 7'',357(4) \\ +3'',468(5) - 0'',350(6) \end{array}\right\}\left(1-\frac{1}{44}\right)$	$= +\ 17'',216$
$\sin E.nt - c'm.nt$	$\{+1'',226(4) - 1'',423(5) - 0'',186(6)\}$	$= -\ 0'',383$
$\sin E.nt - 2c.nt$	$\{-0'',796(5)\}$	$= -\ 0'',796$
$\sin E.nt + 2c.nt$	$\{-0'',357(5)\}$	$= -\ 0'',357$
$\sin E.nt - 2g.nt$	$\{-0'',739(5)\}$	$= -\ 0'',739$
$\sin E.nt + 2g.nt$	$\{+0'',148(5)\}$	$= +\ 0'',148$
$\sin E.nt + 2c'm.nt$	$\{-0'',044(5)\}$	$= -\ 0'',044$
$\sin E.nt - 2c'm.nt$	$\{+0'',075(5)\}$	$= +\ 0'',075$
$\sin E.nt + c'm.nt - c.nt$	$\{+1'',498(4) - 1'',032(5)\}$	$= +\ 0'',466$
$\sin E.nt + c'm.nt + c.nt$	$\{+1'',498(4) - 0'',504(5)\}$	$= +\ 0'',994$
$\sin E.nt - c'm.nt - c.nt$	$\{-0'',025(5)\}$	$= -\ 0'',025$
$\sin E.nt - c'm.nt + c.nt$	$\{+0'',084(5)\}$	$= +\ 0'',084$
$\sin E.nt + c'm.nt - 2c.nt$	$\{+0'',172(5)\}$	$= +\ 0'',172$
$\sin E.nt + c'm.nt + 2c.nt$	$\{+0'',117(5)\}$	$= +\ 0'',117$
$\sin E.nt + c'm.nt - 2g.nt$	$\{+0'',015(5)\}$	$= +\ 0'',015$
$\sin E.nt + c'm.nt + 2g.nt$	$\{-0'',046(5)\}$	$= -\ 0'',046$

$\sin 3E.nt$	$+1'',364(4)-0'',082(5)$ $-0'',262(6)-0'',133(7)$	$=+\ 0'',887$
$\sin 3E.nt-c.nt$	$-1'',580(5)-0'',954(6)$ $-0'',416(7)$	$=-\ 2'',950$
$\sin 3E.nt+c.nt$	$+0'',143(5)$	$=+\ 0'',143$
$\sin 3E.nt+c'm.nt$	$+0'',011(5)$	$=+\ 0'',011$
$\sin 3E.nt-c'm.nt$	$+0'',012(5)$	$=+\ 0'',012$
$\sin 3E.nt-2c.nt$	$-0'',640(5)$	$=-\ 0'',640$
$\sin 3E.nt-2g.nt$	$-0'',246(5)$	$=-\ 0'',246$
$\sin 3E.nt+c'm.nt-c.nt$	$+0'',194(5)$	$=+\ 0'',194$
(*) $\sin 4E.nt$	$+5'',070(4)+5'',322(5)$ $+2'',287(6)+1'',130(7)+0'',6\,(ind.)$	$=+14'',409$
(*) $\sin 4E.nt-c.nt$	$+18'',866(4)+12'',499(5)$ $+5'',121(6)+1'',115(7)+0'',4\,(ind.)$	$=+38'',001$
$\sin 4E.nt+c.nt$	$+0'',855(5)$	$=+\ 0'',855$
$\sin 4E.nt+c'm.nt$	$-0'',085(5)-0'',116(6)$	$=-\ 0'',201$
$\sin 4E.nt-c'm.nt$	$+0'',597(5)+0'',613(6)$	$=+\ 1'',210$
$\sin 4E.nt-2c.nt$	$+15'',254(4)+14'',737(5)$ $+2'',567(6)+1'',746(7)$ $+0'',214(8)$	$=+34'',518$
$\sin 4E.nt-2g.nt$	$-0'',330(4)+0'',349(5)$ $+0'',035(6)$	$=+\ 0'',054$

(*) Voyez la page 631.

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - c.nt \quad \left\{ \begin{array}{l} -0'',476\,(5) - 0'',253\,(6) \\ -0'',193\,(7) \end{array} \right\} \quad = -\ 0'',922$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - c.nt \quad \left\{ \begin{array}{l} +1'',850\,(5) + 1'',363\,(6) \\ +0'',624\,(7) \end{array} \right\} \quad = +\ 3'',837$$

$$\sin 4E.nt - 3c.nt \quad \{+0'',502\,(5)\} \quad = +\ 0'',502$$

$$\sin 4E.nt - 2g.nt - c.nt \quad \{+0'',397\,(5)\} \quad = +\ 0'',397$$

$$\sin 4E.nt - 2g.nt + c.nt \quad \{-0'',036\,(5)\} \quad = -\ 0'',036$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - 2c.nt \quad \{-0'',513\,(5)\} \quad = -\ 0'',513$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - 2c.nt \quad \{+1'',197\,(5)\} \quad = +\ 1'',197$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - 2g.nt \quad \{+0'',011\,(5)\} \quad = +\ 0'',011$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - 2g.nt \quad \{-0'',026\,(5)\} \quad = -\ 0'',026.$$

57. Pour calculer la partie du sixième ordre qui appartient aux coefficiens des deux argumens $2E.nt - 2g.nt - c.nt$, $2E.nt + 2g.nt - c.nt$, j'ai d'abord trouvé qu'on a ;

$$F\overline{(v)}^2 =$$

$$\cos 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{27}{32} - \frac{1883}{1536} - \frac{17347}{1024} + \frac{165}{64} + \frac{59}{48} = -\frac{41519}{3072}\right) m^3 \\ -\left(\frac{33}{32} + \frac{9}{32} - \frac{21}{32} - \frac{15}{32} + \frac{3}{64} = \frac{15}{64}\right) m\gamma^2 \\ -\left(\frac{75}{16} - \frac{15}{32} - \frac{225}{64} + \frac{45}{64} = \frac{45}{32}\right) me^2 - \left(\frac{45}{16} - \frac{75}{32} = \frac{15}{32}\right) m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{85}{48} + \frac{17347}{1024} - \frac{165}{64} + \frac{59}{12} - \frac{1485}{256} = \frac{15615}{1024}\right) m^3 \\ -\left(\frac{3}{32} + \frac{21}{32} + \frac{15}{32} + \frac{3}{16} = \frac{45}{32}\right) m\gamma^2 - \frac{75}{32} m\varepsilon'^2 \\ -\left(\frac{45}{32} + \frac{15}{32} + \frac{225}{64} + \frac{45}{16} + \frac{45}{64} = \frac{285}{32}\right) me^2 \end{array} \right\};$$

$$F\overline{(v)}^3 =$$

$$\sin 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{59}{48} + \frac{59}{48} + \frac{59}{48} = \frac{59}{16}\right) m^3 + \left(\frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{3}{32}\right) m\gamma^2 \\ + \left(\frac{45}{32} + \frac{15}{4} - \frac{15}{16} + \frac{45}{64} - \frac{75}{16} + \frac{45}{64} - \frac{9}{16} = \frac{3}{8}\right) me^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{59}{48} + \frac{59}{48} + \frac{59}{48} = \frac{59}{16}\right) m^3 - \left(\frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{9}{64}\right) m\gamma^2 \\ -\left(\frac{165}{64} + \frac{45}{32} + \frac{15}{4} + \frac{15}{16} + \frac{45}{64} + \frac{75}{16} + \frac{45}{64} + \frac{15}{16} = \frac{1005}{64}\right) me^2 \end{array} \right\};$$

$$F\overline{(v)}^4 =$$

$$\cos 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left(-\frac{15}{4} me^2\right) + \cos 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left(\frac{15}{4} me^2\right);$$

d'où j'ai conclu que,

$$\frac{1}{2} \frac{d.F\overline{(v)}^2}{dv} = \sin 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{41519}{6144} + \frac{439}{64} - \frac{9}{128} = \frac{83231}{6144}\right) m^3 \\ -\frac{15}{128} m\gamma^2 - \frac{45}{64} me^2 - \frac{15}{64} m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$+ \sin 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{46845}{2048} + \frac{135}{128} - \frac{417}{64} = \frac{35661}{2048}\right) m^3 \\ + \frac{135}{64} m\gamma^2 + \frac{855}{64} me^2 + \frac{225}{64} m\varepsilon'^2 \end{array} \right\};$$

$$-\frac{1}{2.3} \frac{d^2.F\overline{(v)}^3}{dv^2} =$$

$$\sin 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\left(\frac{59}{96} + \frac{11}{16} = \frac{125}{96}\right) m^3 + \frac{1}{64} m\gamma^2 + \frac{1}{16} me^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \left(\frac{177}{32} - \frac{33}{16} = \frac{111}{32}\right) m^3 - \frac{27}{128} m\gamma^2 - \frac{3015}{128} me^2 \right\};$$

$$\frac{1}{2.3.4} \frac{d^3.F\overline{(v)}^4}{dv^3} = \sin 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left(\frac{5}{32} me^2\right)$$

$$\sin 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left(\frac{135}{32} me^2\right).$$

La réunion de ces trois dernières parties donne

$$\frac{1}{2}\frac{d.\overline{F(v)}^2}{dv}-\frac{1}{2.3}\frac{d^2.\overline{F(v)}^3}{dv^2}+\frac{1}{2.3.4}\frac{d^3.\overline{F(v)}^4}{dv^3}=$$

$$\sin 2Ev-2gv-cv\quad e\gamma^2\left(-\frac{91231}{6144}m^3-\frac{13}{128}m\gamma^2-\frac{31}{64}me^2-\frac{15}{64}m\varepsilon'^2\right)$$

$$\sin 2Ev+2gv-cv\quad e\gamma^2\left(-\frac{28557}{2048}m^3+\frac{243}{128}m\gamma^2-\frac{765}{128}me^2+\frac{225}{64}m\varepsilon'^2\right).$$

En réduisant en nombres ces coefficiens on obtient

$$\sin 2E.nt-2g.nt-c.nt\ (-0'',586);\quad \sin 2E.nt+2g.nt-c.nt\ (-0'',546).$$

58. La partie, du même ordre, que l'intégration introduit dans la valeur de $-F(v)$ serait beaucoup plus petite. C'est ce qu'il nous est facile de démontrer relativement à l'argument $2Ev+2gv-cv$. En effet; d'après les résultats trouvés dans les pages 377, 441, et 619 du second Volume, nous avons;

$$-\int R_1 dv=\ \cos 2Ev+2gv-cv\quad e\gamma^2\left(\frac{1}{4}-\frac{517}{192}m\right);$$

$$\frac{\delta u}{u_1}=\ \cos 2Ev+2gv-cv\quad e\gamma^2\left\{\begin{matrix}\frac{15}{64}m+\frac{205}{256}m^2+\frac{3617}{12288}m^3\\ +\frac{75}{256}me^2-\frac{9}{32}m\gamma^2-\frac{75}{128}m\varepsilon'^2\end{matrix}\right\};$$

$$\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2=\ \cos 2Ev+2gv-cv\quad e\gamma^2\left(-\frac{7}{8}m^2+\frac{53}{192}m^3+\frac{105}{64}me^2+\frac{21}{128}m\gamma^2\right);$$

et par conséquent;

$$-B=-m^2\int R_1 dv=\ \cos 2Ev+2gv-cv\quad e\gamma^2\left(\frac{1}{4}m^2-\frac{517}{192}m^3\right);$$

$$A=2\frac{\delta u}{u_1}-3\left(\frac{\delta u}{u_1}\right)^2=$$

$$\cos 2Ev+2gv-cv\quad e\gamma^2\left\{\begin{matrix}\frac{15}{32}m+\frac{541}{128}m^2-\left(\frac{53}{64}-\frac{3617}{6144}=\frac{1471}{6144}\right)m^3\\ -\left(\frac{315}{64}-\frac{75}{128}=\frac{555}{128}\right)me^2-\left(\frac{9}{16}+\frac{63}{128}=\frac{135}{128}\right)m\gamma^2-\frac{75}{64}m\varepsilon'^2\end{matrix}\right\}.$$

Le produit AB donne le terme

$$\cos 2Ev+2gv-cv \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{21}{32} - \frac{405}{256} = -\frac{237}{256} \right\} m^3 ;$$

partant on a ;

$$Y = A - B + AB =$$

$$\cos 2Ev+2gv-cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{32}m + \frac{657}{128}m^2 - \left(\frac{1471}{6144} + \frac{517}{192} + \frac{237}{256} = \frac{7901}{2048}\right) m^3 \\ - \frac{555}{128} m e^2 - \frac{135}{128} m \gamma^2 - \frac{75}{64} m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}.$$

Le produit $Y\left(1 - \frac{X}{\lambda}\right)$ renferme le terme

$$\cos 2Ev+2gv-cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{32281}{3072} - \frac{13}{12} - \frac{85}{32} = \frac{6931}{1024}\right) m^3 \\ + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{32} + \frac{15}{32} - \frac{9}{64} = \frac{63}{64}\right) m\gamma^2 \\ - \left(\frac{15}{32} + \frac{45}{32} + \frac{45}{64} = \frac{165}{64}\right) m e^2 \end{array} \right\}.$$

Donc nous avons l'équation

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = \left(1 - \frac{X}{\lambda}\right) Y - Y =$$

$$\cos 2Ev+2gv-cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{45}{32}m - \frac{855}{128}m^2 - \left(\frac{6931}{1024} - \frac{7901}{2048} = \frac{5961}{2048}\right) m^3 \\ + \left(\frac{555}{128} - \frac{165}{64} = \frac{225}{128}\right) m e^2 + \left(\frac{135}{128} + \frac{63}{64} = \frac{261}{128}\right) m\gamma^2 \\ + \left(\frac{75}{32} + \frac{75}{64} = \frac{225}{64}\right) m \varepsilon'^2 \end{array} \right\},$$

qui étant intégrée, donne

$$\delta nt =$$

$$\sin 2Ev+2gv-cv \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{32}m - \frac{325}{128}m^2 - \left(\frac{1987}{2048} + \frac{95}{64} - \frac{55}{384} = \frac{14201}{6144}\right) m^3 \\ + \frac{75}{128} m e^2 + \frac{87}{128} m \gamma^2 + \frac{75}{64} m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}.$$

Maintenant, si l'on réduit en nombres la partie du sixième ordre de ce coefficient on la trouvera égale à $-0'',036$.

59. La partie du sixième ordre et celle du septième, qui appartiennent au coefficient de l'argument $4E.nt$, ont été calculées par le procédé que je vais exposer en peu de mots. Avant tout, il est nécessaire d'ajouter le terme $-\frac{19125}{512}m^4e^2 = -0'',726$ au coefficient de l'argument $4E\nu$ posé dans la page 495, ce qui réduit à $+0'',079$ la partie correspondante du sixième ordre donnée dans la page 613: de sorte que, on a $8'',064$ pour le coefficient de $\sin 4E\nu$. La petitesse de la partie $0'',079$ permet de négliger la suivante, qui serait du septième ordre dans l'expression de $F(\nu)$; mais, relativement au carré, au cube, et à la quatrième puissance de cette même fonction il est indispensable de tenir compte, au moins, des termes suivans; savoir

$$\overline{F(\nu)}^2 =$$

$$\cos 4E\nu \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{369}{8}+6+\frac{6633}{512}+\frac{885}{64}+\frac{595}{32}+\frac{285}{8}=\frac{68161}{512}\right)m^4e^2 \\ +\left(\frac{250469}{1280}+\frac{45}{8}+\frac{371459}{8192}+\frac{11859}{256}+\frac{4465}{128}+\frac{96915}{2304}+\frac{11305}{128}=\frac{168925287}{368640}\right)m^5e^2 \\ -\left(\frac{31405}{864}+\frac{52687}{864}=\frac{21023}{216}\right)m^7 \end{array}\right\};$$

$$\overline{F(\nu)}^3 =$$

$$\sin 4E\nu \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{2889}{64}+\frac{635}{128}+\frac{3487}{128}+\frac{205}{16}+\frac{295}{16}+\frac{3135}{128}+\frac{11}{4}+\frac{283}{128}=\frac{9115}{64}\right)m^4e^2 \\ +\left\{\begin{array}{l} \frac{7363727}{30720}+\frac{495}{128}+\frac{638099}{6144}+\frac{18703}{192}+\frac{4465}{96}+\frac{19345}{384} \\ +\frac{5605}{64}+\frac{190817}{2048}+\frac{59}{6}+\frac{2309}{192}+\frac{1991}{160}=\frac{23248349}{30720} \end{array}\right\}m^5e^2 \end{array}\right\};$$

$$\overline{F(\nu)}^4 =$$

$$\cos 4E\nu \left\{-\left(\frac{121}{16}+\frac{121}{32}=\frac{363}{32}\right)m^4e^2-\left(\frac{649}{24}+\frac{649}{24}+\frac{649}{24}=\frac{649}{8}\right)m^5e^2\right\};$$

lesquels donnent;

$$\frac{1}{2}\frac{d.\overline{F(v)}^2}{dv} = \sin 4Ev \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{21023}{108} - \frac{1865}{32} = \frac{117829}{864}\right) m^7 \\ -\left(\frac{68161}{256} - \frac{2415}{64} = \frac{58501}{256}\right) m^4 e^2 \\ -\left(\frac{168925287}{184320} - \frac{68161}{256} = \frac{119849367}{184320}\right) m^5 e^2 \end{array} \right\};$$

$$-\frac{1}{2.3}\frac{d^2.\overline{F(v)}^3}{dv^2} = \sin 4Ev \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{9115}{24} - \frac{165}{2} = \frac{7135}{24}\right) m^4 e^2 \\ +\left(\frac{23248349}{11520} - \frac{9115}{12} + \frac{165}{4} = \frac{14973149}{11520}\right) m^5 e^2 \end{array} \right\};$$

$$\frac{1}{2.3.4}\frac{d^3.\overline{F(v)}^4}{dv^3} = \sin 4Ev \left\{ -\frac{121}{4} m^4 e^2 - \left(\frac{649}{3} - \frac{363}{4} = \frac{1507}{12}\right) m^5 e^2 \right\}.$$

En ajoutant ces trois parties avec le terme

$$-F(v) = \sin 4Ev \left(\frac{647623}{28800} m^6 + \frac{19125}{512} m^4 e^2\right)$$

on obtient

$$-F(v) + \frac{1}{2}\frac{d.\overline{F(v)}^2}{dv} - \frac{1}{2.3}\frac{d^2.\overline{F(v)}^3}{dv^2} + \frac{1}{2.3.4}\frac{d^3.\overline{F(v)}^4}{dv^3} =$$

$$\sin 4Ev \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{7135}{24} - \frac{121}{4} - \frac{58501}{256} + \frac{19125}{512} = \frac{116545}{1536}\right) m^4 e^2 + \frac{647623}{28800} m^6 + \frac{117829}{864} m^7 \\ +\left(\frac{14973149}{11520} - \frac{1507}{12} - \frac{119849367}{184320} = \frac{96573497}{184320}\right) m^5 e^2 \end{array} \right\}$$

$$= \sin 4Ev \left\{ \quad 2'',287\,(6) + 1'',130\,(7) \right\}.$$

60. La partie du sixième ordre qui appartient au coefficient de l'argument $4E.nt - c.nt$ est égale à la somme de ces deux termes $+\frac{631979}{4096} m^5 e + \frac{74295}{1024} m^3 e^3$, dont le second a été calculé en faisant

$$\overline{F(v)}^2 =$$

$$\cos 4Ev - cv \quad e \left\{ \frac{975}{64} + \frac{9045}{256} + \frac{165}{64} + \frac{12825}{256} + \frac{9045}{256} + \frac{45}{8} = \frac{36915}{256} \right\} m^3 e^2;$$

$$\overline{F(v)}^3 =$$

$$\sin 4Ev - cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} \frac{2415}{128} + \frac{10005}{128} + \frac{495}{64} + \frac{495}{128} + \frac{4755}{64} \\ + \frac{4275}{64} + \frac{15}{2} + \frac{495}{128} + \frac{15}{2} = \frac{8595}{32} \end{array} \right\} m^3 e^2 ;$$

$$\overline{F(v)}^4 =$$

$$\cos 4Ev - cv \quad e \left\{ -\frac{165}{8} - \frac{165}{8} - \frac{165}{8} = -\frac{495}{8} \right\} m^3 e^2 ;$$

$$\frac{1}{2} \frac{d.\overline{F(v)}^2}{dv} = \sin 4Ev - cv \quad e \left\{ \frac{2025}{64} - \frac{110745}{512} = -\frac{94545}{512} \right\} m^3 e^2 ;$$

$$-\frac{1}{2.3} \frac{d^2.\overline{F(v)}^3}{dv^2} = \sin 4Ev - cv \quad e \left\{ \frac{25785}{64} - \frac{675}{8} = \frac{20385}{64} \right\} m^3 e^2 ;$$

$$\frac{1}{2.3.4} \frac{d^3.\overline{F(v)}^4}{dv^3} = \sin 4Ev - cv \quad e \left(-\frac{4455}{64} m^3 e^2 \right) ;$$

et en prenant la somme de ces trois derniers termes, augmentée du terme $\sin 4Ev - cv \; e\left(\frac{8505}{1024} m^3 e^2\right)$ appartenant au développement de $-F(v)$ (*).

Je ne pousse pas plus loin ces calculs partiels : il suffit d'avoir indiqué par quelques exemples comment la réduction en nombres de nos formules met en évidence l'ordre et la forme des termes qui, pour plus de précision, doivent être ajoutés à l'expression analytique des coefficiens de la longitude de la Lune à l'aide d'un développement ultérieur.

(*) On obtiendra aisément ce terme de $-F(v)$, en cherchant d'abord le terme

$$\cos 4Ev - cv \quad e\left(\frac{465}{512} m^3 e^2\right)$$

appartenant à l'expression de δu; ce qui n'exige que l'addition d'un petit nombre de termes dans les développemens exposés depuis la page 349 jusqu'à la page 421 du second Volume. La même remarque s'applique au terme précédent, $-\frac{19125}{512} m^4 e^2$, qui fait partie du coefficient de l'argument $4Ev$.

La méthode des coefficiens numériques pour retourner la formule primitive, serait sans doute plus ex péditive; mais elle a l'inconvénient de confondre les quantités d'ordre différent, et de présenter des résultats définitifs sur lesquels on ne peut rien statuer à l'égard de la partie négligée.

61. Pour pouvoir calculer, par la formule précédente, la longitude vraie de la Lune correspondante à un instant donné, il faudra former la valeur numérique des argumens, en partant d'une époque fixe, et en supposant connues, d'après l'observation, les quantités constantes (Voyez p. 564) qui entrent dans leur composition, c'est-à-dire les élémens suivans.

Prenons pour l'origine du temps t l'instant de minuit moyen, au méridien de Paris, du premier jour de Janvier de l'année 1801. Pour cet instant on a;

ε = Époque de la Longitude moyenne de la Lune = 111.° 36.′ 42″,8.

θ_1 = Époque de la Longitude moyenne du noeud ascendant de l'orbite de la Lune = 13.° 54.′ 54″,2.

ϖ_1 = Époque de la Long.e moy.e du périgé Lunaire = 266.° 6.′ 44″,4.

ε'_1 = Époque de la Longitude moyenne du Soleil = 280.° 9.′ 32″,0.

$\varkappa'$ = Époque du périgée Solaire = 279.° 30.′ 25″,0.

n = Moyen mouvement sidéral de la Lune en 365 jours $\frac{1}{4}$ = 13. cir. 132.° 39.′ 53″,54.

n' = Moyen mouvement sidéral du Soleil en 365 jours $\frac{1}{4}$ = 359.° 59.′ 37″,43.

Il est presque superflu de faire observer, que les argumens étant composés par des différences ils demeurent les mêmes en employant pour n et n' les moyens mouvements relatifs au point équinoxial.

§ 7.

Expression analytique et numérique de la parallaxe équatoriale de la Lune.

62. La formule (9) posée dans la page 5 du troisième Volume, donne

$$\sin\varpi = \left(1 - \frac{K_{(2)}}{1+\frac{1}{3}K_{(2)}}\sin^2\lambda\right)\frac{(1+p)\,au}{\sqrt{1+ss}}\cdot\left(1+\frac{1}{3}K_{(2)}\right)\sqrt[3]{\frac{4D(1-\frac{4}{3}\Psi)}{L'(1+i)T^2}}$$

pour le *sinus* de la parallaxe horizontale de la Lune; où le facteur

$$\left(1+\frac{1}{3}K_{(2)}\right)\sqrt[3]{\frac{4D(1-\frac{4}{3}\Psi)}{L'(1+i)T^2}} = 0{,}01658095 = 3420'',0667\,.\sin 1''.$$

La petitesse de $\sin\varpi$ permet de prendre $\varpi = \sin\varpi + \frac{1}{6}\sin^3\varpi$, et même de faire

$$\frac{1}{6}.\sin^3\varpi = \frac{1}{6}\left(1+K_{(2)}\right)\frac{4D(1-\frac{4}{3}\Psi)}{L'(1+i)T^2} = 0'',1567.$$

En prenant (Voyez p. 855 du second Volume)

$$p = \frac{1}{6}m^2 + \frac{217}{288}m^4 + \frac{45}{64}m^2e^2 + \frac{9}{256}m^2\gamma^2 + \frac{1}{4}m^2E'^2$$
$$+ \frac{47}{8}m^5 + \frac{2475}{128}m^3e^2 - \frac{135}{512}m^3\gamma^2 - \frac{3}{4}m^2(\varepsilon'^2 - E'^2),$$

et développant la fonction $\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}}$ jusqu'aux quantités du cinquième ordre inclusivement, à l'aide des résultats posés dans les pages 838-854 du troisième Volume, j'ai obtenu la formule suivante.

$$\frac{(1+p)\,au}{\sqrt{1+ss}} =$$

$$\cos 0v \left\{ \begin{array}{l} 1 + e^2 + \frac{1}{6}m^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\right)\gamma^2 + e^4 - \left(\frac{1}{16} - \frac{9}{64} + \frac{1}{32} + \frac{3}{64} = 0\right)\gamma^4 \\ - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\right)e^2\gamma^2 + \left(\frac{9}{256} - \frac{9}{256} = 0\right)m^2\gamma^2 - \left(\frac{135}{512} + \frac{9}{512} - \frac{3}{32} = \frac{3}{16}\right)m^3\gamma^2 \\ + \frac{217}{288}m^4 + \left(\frac{45}{64} + \frac{1}{6} = \frac{167}{192}\right)m^2e^2 + \frac{1}{4}m^2E'^2 + \frac{47}{8}m^5 + \frac{2475}{128}m^3e^2 - \frac{3}{4}m^2(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\}$$

$$\cos cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} 1 + e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{6}m^2 + e^4 + \left(\frac{9}{64} - \frac{7}{64} = \frac{1}{32}\right)\gamma^4 + \frac{217}{288}m^4 \\ + \left(\frac{45}{64} + \frac{1}{6} = \frac{167}{192}\right)m^2e^2 + \frac{1}{4}m^2E'^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{32} + \frac{1}{2} = \frac{19}{32}\right)e^2\gamma^2 \\ - \left(1 - \frac{45}{256} + \frac{9}{256} - \frac{9}{256} + \frac{1}{24} = \frac{665}{768}\right)m^2\gamma^2 - \frac{3}{4}m^2(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\}$$

$$\cos 2cv \qquad e^2 \left\{ \frac{1}{2}m^2 + \frac{15}{4}m^3 + \left(\frac{5}{16} - \frac{5}{16} = 0\right)\gamma^2 + \left(\frac{135}{128} - \frac{135}{128} = 0\right)m\gamma^2 \right\}$$

$$\cos 3cv \qquad e^3 \left(\frac{5}{32}\gamma^2 - \frac{5}{32}m^2 \right)$$

$$\cos 2gv \qquad \gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}m^2 - \left(\frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{3}{16}\right)m^3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\right) \\ + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\right)e^2 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{3}{16} = 0\right)\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 4gv \qquad \gamma^4 \left(-\frac{1}{64} - \frac{1}{32} + \frac{3}{64} = 0 \right)$$

$$\cos 2gv - cv \qquad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\right) + \frac{135}{64}m + \left(\frac{3}{2} - \frac{45}{256} + \frac{221}{512} - \frac{1}{8} = \frac{835}{512}\right)m^2 \\ + \left(\frac{7}{32} - \frac{1}{32} - \frac{3}{32} = \frac{3}{32}\right)\gamma^2 - \left(\frac{31}{64} + \frac{5}{32} - \frac{1}{8} = \frac{33}{64}\right)e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2gv + cv \qquad e\gamma^2 \left\{ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{32} - \frac{1}{48} = \frac{37}{96}\right)m^2 - \frac{3}{32}\gamma^2 \right\}$$

$$\cos 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ - \left(\frac{15}{16} + \frac{5}{16} = \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{135}{128} + \frac{405}{128} = \frac{135}{32}\right)m \right\}$$

$$\cos 2gv - 3cv \quad e^3\gamma^2 \left(-\frac{35}{64} - \frac{5}{32} = -\frac{45}{64} \right)$$

$$\cos 4gv - cv \qquad e\gamma^4 \left(-\frac{7}{64} + \frac{3}{128} = -\frac{11}{128} \right)$$

$$\cos 4gv + cv \qquad e\gamma^4 \left(\frac{3}{128} \right)$$

$$\cos c'mv \quad \varepsilon'\left\{-\frac{3}{2}m^2+\left(\frac{585}{16}+\frac{1}{4}=\frac{581}{16}\right)m^4+\frac{69}{4}m^2e^2-\frac{27}{16}m^2\varepsilon'^2+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{9}{4}\right)m^2\gamma^2\right\}$$

$$\cos 2c'mv \quad \varepsilon'^2\left(-\frac{9}{4}m^2\right)$$

$$\cos 3c'mv \quad \varepsilon'^3\left(-\frac{53}{16}m^2\right)$$

$$\cos cv+c'mv \quad e\varepsilon'\left\{\begin{array}{l}-\frac{9}{8}m-\frac{837}{64}m^2-\left(\frac{17433}{256}+\frac{3}{16}=\frac{17481}{256}\right)m^3\\ -\frac{9}{16}me^2-\frac{81}{64}m\varepsilon'^2+\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{32}=\frac{81}{32}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$\cos cv-c'mv \quad e\varepsilon'\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{8}m+\frac{1113}{64}m^2+\left(\frac{35553}{256}+\frac{3}{16}=\frac{35601}{256}\right)m^3\\ +\frac{9}{16}me^2+\frac{81}{64}m\varepsilon'^2-\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{32}=\frac{81}{32}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$\cos cv+2c'mv \quad e\varepsilon'^2\left(-\frac{27}{32}m-\frac{2685}{256}m^2\right)$$

$$\cos cv-2c'mv \quad e\varepsilon'^2\left(\frac{27}{32}m+\frac{3915}{256}m^2\right)$$

$$\cos cv+3c'mv \quad e\varepsilon'^3\left(-\frac{53}{64}m\right)$$

$$\cos cv-3c'mv \quad e\varepsilon'^3\left(\frac{53}{64}m\right)$$

$$\cos 2cv+c'mv \quad e^2\varepsilon'\left(\frac{3}{4}m^2\right)$$

$$\cos 2cv-c'mv \quad e^2\varepsilon'\left(\frac{3}{4}m^2\right)$$

$$\cos 2gv+c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{\left(\frac{9}{16}-\frac{9}{16}=0\right)m+\left(\frac{189}{128}-\frac{3}{16}-\frac{69}{128}=\frac{3}{4}\right)m^2\right\}$$

$$\cos 2gv-c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2\left\{\left(\frac{9}{16}-\frac{9}{16}=0\right)m+\left(\frac{111}{128}+\frac{9}{128}-\frac{3}{16}=\frac{3}{4}\right)m^2\right\}$$

$$\cos 2gv-2c'mv \quad \varepsilon'^2\gamma^2\left\{\frac{27}{64}-\frac{27}{64}=0\right\}m$$

$$\cos 2gv+2c'mv \quad \varepsilon'^2\gamma^2\left\{\frac{27}{64}-\frac{27}{64}=0\right\}m$$

$$\cos 2gv-cv+c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left\{\frac{9}{64}-\frac{189}{64}+\frac{9}{32}=-\frac{81}{32}\right\}m$$

$$\cos 2gv-cv-c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left\{\frac{189}{64}-\frac{9}{64}-\frac{9}{32}=\frac{81}{32}\right\}m$$

$\cos 2gv + cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{32} - \frac{9}{64} = \frac{9}{64} \right\} m$

$\cos 2gv + cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{64} - \frac{9}{32} = -\frac{9}{64} \right\} m$

$$\cos 2Ev \begin{cases} m^2 + \frac{19}{6} m^3 + \left(\frac{64}{9} + \frac{1}{6} = \frac{131}{18}\right) m^4 + \left(\frac{19}{36} + \frac{1475}{108} = \frac{383}{27}\right) m^5 + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0\right) m\gamma^2 \\ + \left(\frac{3}{64} - \frac{1}{4} - \frac{19}{64} = -\frac{1}{2}\right) m^2\gamma^2 - \left(\frac{19}{24} + \frac{273}{1024} + \frac{461}{3072} = \frac{29}{24}\right) m^3\gamma^2 \\ + 2 . m^2 e^2 + \frac{233}{24} m^3 e^2 - \frac{5}{2} m^2 \varepsilon'^2 - \frac{95}{12} m^3 \varepsilon'^2 + \left(\frac{15}{32} - \frac{15}{32} = 0\right) m\varepsilon'^2\gamma^2 \\ + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \frac{9}{16} = 0\right) me^2\gamma^2 - \left(\frac{27}{128} - \frac{3}{64} - \frac{3}{64} - \frac{3}{128} - \frac{9}{128} = \frac{3}{128}\right) m\gamma^4 \end{cases}$$

$$\cos 2Ev - cv \quad e \begin{cases} \frac{15}{8} m + \frac{273}{32} m^2 + \left(\frac{13875}{512} + \frac{5}{16} = \frac{14035}{512}\right) m^3 \\ + \left(\frac{164711}{2048} + \frac{91}{64} = \frac{167623}{2048}\right) m^4 + \frac{45}{16} me^2 + \frac{1527}{128} m^2 e^2 \\ - \frac{75}{16} m\varepsilon'^2 - \frac{75}{8} m^2 \varepsilon'^2 - \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{32} + \frac{15}{32} = \frac{3}{2}\right) m\gamma^2 \\ - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{128} + \frac{273}{128} + \frac{315}{64} = \frac{273}{32}\right) m^2\gamma^2 \end{cases}$$

$$\cos 2Ev + cv \quad e \begin{cases} -\frac{5}{8} m^2 - \frac{23}{48} m^3 - \left(\frac{71}{1152} + \frac{5}{48} = \frac{191}{1152}\right) m^4 - \frac{5}{8} m^2 e^2 \\ + \frac{25}{16} m^2 \varepsilon'^2 + \frac{3}{32} m\gamma^2 + \left(\frac{3}{128} + \frac{1}{2} - \frac{3}{16} + \frac{5}{32} = \frac{63}{128}\right) m^2\gamma^2 \end{cases}$$

$$\cos 2Ev + c'mv \quad \varepsilon' \begin{cases} -\frac{1}{2} m^2 - \frac{19}{24} m^3 - \left(\frac{317}{144} + \frac{1}{12} = \frac{329}{144}\right) m^4 - m^2 e^2 + \frac{1}{16} m^2 \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0\right) m\gamma^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{15}{64} + \frac{23}{64} = \frac{1}{4}\right) m^2\gamma^2 \end{cases}$$

$$\cos 2Ev - c'mv \quad \varepsilon' \begin{cases} \frac{7}{2} m^2 + \frac{133}{8} m^3 + \left(\frac{1003}{16} + \frac{7}{12} = \frac{3037}{48}\right) m^4 + 7 . m^2 e^2 \\ - \frac{123}{16} m^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{7}{16} - \frac{7}{16} = 0\right) m\gamma^2 - \left(\frac{7}{8} - \frac{19}{64} + \frac{75}{64} = \frac{7}{4}\right) m^2\gamma^2 \end{cases}$$

$$\cos 2Ev - 2cv \quad e^2 \begin{cases} \frac{15}{4} m + \frac{147}{16} m^2 + \left(\frac{8451}{256} + \frac{5}{8} = \frac{8611}{256}\right) m^3 \\ + \frac{45}{8} me^2 - \frac{75}{8} m\varepsilon'^2 - \left(\frac{135}{64} + \frac{45}{64} - \frac{15}{16} = \frac{15}{8}\right) m\gamma^2 \end{cases}$$

$\cos 2Ev + 2cv \quad e^2 \left(\frac{3}{8} m^2 - \frac{1}{4} m^3 \right)$

$$\cos 2Ev - 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0\right) m - \left(\frac{3}{64} + \frac{69}{64} - \frac{1}{8} = 1\right) m^2 \\ + \left(\frac{19}{48} + \frac{273}{1024} - \frac{657}{1024} = \frac{1}{48}\right) m^3 + \left(\frac{15}{32} - \frac{15}{32} = 0\right) m\varepsilon'^2 \\ - \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{33}{8} = \frac{75}{16}\right) me^2 \\ - \left(\frac{3}{128} + \frac{3}{128} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} - \frac{3}{64} - \frac{27}{128} - \frac{3}{128} = -\frac{3}{32}\right) m\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\right) m^2 + \left(\frac{7}{48} + \frac{19}{48} = \frac{13}{24}\right) m^3 \\ + \left(\frac{9}{128} - \frac{3}{128} - \frac{3}{128} - \frac{3}{128} = 0\right) m\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{8} m - \frac{3}{64} m^2 + \left(\frac{17889}{256} - \frac{5}{16} = \frac{17809}{256}\right) m^3 \\ - \frac{45}{16} me^2 + \frac{15}{64} m\varepsilon'^2 + \left(\frac{9}{8} - \frac{8}{32} + \frac{15}{32} = \frac{3}{2}\right) m\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + c'mv + cv \quad e\varepsilon' \left(\frac{5}{16} m^2 + \frac{79}{96} m^3 - \frac{3}{32} m\gamma^2 \right)$$

$$\cos 2Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \frac{35}{8} m + \frac{1691}{64} m^2 + \left(\frac{23115}{256} + \frac{35}{48} = \frac{69905}{768}\right) m^3 \\ + \frac{105}{16} me^2 - \frac{615}{64} m\varepsilon'^2 - \left(\frac{21}{8} - \frac{7}{32} + \frac{35}{32} = \frac{7}{2}\right) m\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - c'mv + cv \quad e\varepsilon' \left(-\frac{35}{16} m^2 - \frac{103}{32} m^3 + \frac{7}{32} m\gamma^2 \right)$$

$$\cos 2Ev - 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \left\{ \frac{17}{2} m^2 + \frac{323}{6} m^3 - \left(\frac{51}{64} - \frac{51}{64} = 0.\right) m\gamma^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev + 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \left\{ \frac{9}{64} - \frac{9}{64} = 0 \right\} m\gamma^2$$

$$\cos 2Ev - 3cv \quad e^3 \left(\frac{15}{8} m + \frac{61}{128} m^2 \right)$$

$$\cos 2Ev + 3cv \quad e^3 \left(-\frac{7}{32} m^2 \right)$$

$$\cos 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{32} - \frac{15}{64} = \frac{39}{64}\right) m - \left(\frac{579}{128} - \frac{273}{256} + \frac{3}{128} - \frac{3}{2} = \frac{507}{256}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{15}{64} m + \left(\frac{273}{256} - \frac{5}{64} = \frac{253}{256}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev - 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\left(\frac{45}{64} + \frac{3}{32} = \frac{51}{64}\right) m - \left(\frac{5}{64} + \frac{3}{128} + \frac{1}{2} - \frac{335}{512} = -\frac{27}{512}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev + 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ -\frac{5}{32} - \frac{5}{64} = -\frac{15}{64} \right\} m^2$$

$\cos 2Ev + 3c'mv$	$\varepsilon'^3\left(\frac{1}{48}m^2\right)$
$\cos 2Ev - 3c'mv$	$\varepsilon'^3\left(\frac{845}{48}m^2\right)$
$\cos 2Ev + 2c'mv - cv$	$e\varepsilon'^2\left(-\frac{45}{32}m - \frac{6399}{256}m^2\right)$
$\cos 2Ev - 2c'mv - cv$	$e\varepsilon'^2\left(\frac{255}{32}m + \frac{15639}{256}m^2\right)$
$\cos 2Ev - 2c'mv + cv$	$e\varepsilon'^2\left(-\frac{85}{16}m^2\right)$
$\cos 2Ev + c'mv - 2cv$	$e^2\varepsilon'\left(-\frac{15}{4}m + \frac{129}{16}m^2\right)$
$\cos 2Ev - c'mv - 2cv$	$e^2\varepsilon'\left(\frac{35}{4}m + \frac{337}{16}m^2\right)$
$\cos 2Ev + c'mv + 2cv$	$e^2\varepsilon'\left(-\frac{3}{16}m^2\right)$
$\cos 2Ev - c'mv + 2cv$	$e^2\varepsilon'\left(\frac{21}{16}m^2\right)$
$\cos 2Ev + c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left\{\left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0\right)m + \left(\frac{21}{32} - \frac{3}{32} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\right)m^2\right\}$
$\cos 2Ev - c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left\{\left(\frac{7}{16} + \frac{7}{16} = \frac{7}{8}\right)m - \left(\frac{103}{32} - \frac{7}{16} + \frac{23}{32} = \frac{7}{4}\right)m^2\right\}$
$\cos 2Ev + c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left\{-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{8}\right\}m^2$
$\cos 2Ev - c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left\{\frac{7}{16} + \frac{7}{16} = \frac{7}{8}\right\}m^2$
$\cos 2Ev - 2c'mv - 2cv$	$e^2\varepsilon'^2\left(\frac{255}{16}m\right)$
$\cos 2Ev + 2c'mv - 2cv$	$e^2\varepsilon'^2\left(-\frac{45}{16}m\right)$
$\cos 2Ev - 2c'mv - 2gv$	$\varepsilon'^2\gamma^2\left\{\frac{51}{64} + \frac{51}{64} = \frac{51}{32}\right\}m$
$\cos 2Ev + 2c'mv - 2gv$	$\varepsilon'^2\gamma^2\left\{-\frac{9}{64} + \frac{9}{64} = 0\right\}m$
$\cos 2Ev + 2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2\left\{-\frac{75}{128} + \frac{15}{32} + \frac{15}{128} = 0\right\}m$

$$\cos 2Ev-2gv+2cv \qquad e^2\gamma^2\left\{-\frac{15}{128}+\frac{15}{128}=0\right\}m$$

$$\cos 2Ev-2gv-2cv \qquad e^2\gamma^2\left\{-\frac{15}{16}+\frac{15}{32}+\frac{15}{32}=0\right\}m$$

$$\cos 2Ev-4gv \qquad \gamma^4\left\{-\frac{9}{128}+\frac{3}{128}+\frac{3}{32}-\frac{9}{128}=-\frac{3}{128}\right\}m$$

$$\cos 2Ev+c'mv-3cv \qquad e^3\varepsilon'\left(-\frac{15}{8}m\right)$$

$$\cos 2Ev-c'mv-3cv \qquad e^3\varepsilon'\left(\frac{35}{8}m\right)$$

$$\cos 2Ev+3c'mv-cv \qquad e\varepsilon'^3\left(-\frac{5}{64}m\right)$$

$$\cos 2Ev-3c'mv-cv \qquad e\varepsilon'^3\left(\frac{845}{64}m\right)$$

$$\cos 2Ev+c'mv-2gv+cv \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left\{\frac{45}{64}+\frac{3}{32}=\frac{51}{64}\right\}m$$

$$\cos 2Ev-c'mv-2gv+cv \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left\{-\frac{105}{64}+\frac{7}{32}=-\frac{91}{64}\right\}m$$

$$\cos 2Ev+c'mv-2gv-cv \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left\{\frac{3}{4}-\frac{15}{64}+\frac{3}{32}=\frac{39}{64}\right\}m$$

$$\cos 2Ev-c'mv-2gv-cv \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left\{-\frac{7}{4}+\frac{35}{64}+\frac{7}{32}=-\frac{63}{64}\right\}m$$

$$\cos 2Ev+c'mv+2gv-cv \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{15}{64}m\right)$$

$$\cos 2Ev-c'mv+2gv-cv \qquad e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{35}{64}m\right)$$

$$\cos Ev \qquad b^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{15}{16}m-\frac{81}{16}m^2-\left(\frac{3231}{128}+\frac{5}{32}=\frac{3251}{128}\right)m^3\\ +\left(\frac{75}{32}+\frac{15}{64}=\frac{165}{64}\right)m\gamma^2-\frac{45}{16}me^2-\frac{45}{16}m\varepsilon'^2\end{array}\right\}$$

$$\cos Ev-cv \qquad eb^2\left(-\frac{15}{8}m-\frac{681}{64}m^2\right)$$

$$\cos Ev+cv \qquad eb^2\left(-\frac{9}{8}m^2\right)$$

$$\cos Ev+c'mv \qquad \varepsilon'b^2\left\{\frac{5}{4}-\frac{45}{8}m+\left(\frac{2121}{64}+\frac{5}{24}=\frac{6403}{192}\right)m^2+5.e^2-\frac{5}{8}\gamma^2+\frac{5}{4}\varepsilon'^2\right\}$$

$$\cos Ev-c'mv \qquad \varepsilon'b^2\left(\frac{15}{16}m-\frac{21}{2}m^2\right)$$

$\cos Ev - 2cv$	$e^2b^2\left(-\frac{15}{64}m\right)$
$\cos Ev - 2gv$	$\gamma^2b^2\left\{\frac{105}{64}-\frac{15}{128}=\frac{195}{128}\right\}m$
$\cos Ev + 2gv$	$\gamma^2b^2\left(-\frac{15}{128}m\right)$
$\cos Ev + 2c'mv$	$\varepsilon'^2b^2\left(-\frac{15}{128}m\right)$
$\cos Ev - 2c'mv$	$\varepsilon'^2b^2\left(\frac{435}{128}m\right)$
$\cos Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon'b^2\left(\frac{5}{2}-\frac{45}{4}m\right)$
$\cos Ev - c'mv - cv$	$e\varepsilon'b^2\left(\frac{105}{16}m\right)$
$\cos Ev + c'mv - 2cv$	$e^2\varepsilon'b^2\left(-\frac{5}{16}\right)$
$\cos Ev + c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2b^2\left(-\frac{35}{48}+\frac{5}{32}=-\frac{55}{96}\right)$
$\cos Ev + c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2b^2\left(\frac{5}{32}\right)$
$\cos 3Ev$	$b^2\left(\frac{25}{64}m^2+\frac{415}{256}m^3\right)$
$\cos 3Ev - c'mv$	$\varepsilon'b^2\left(\frac{125}{64}m^2\right)$
$\cos 3Ev + c'mv$	$\varepsilon'b^2\left(-\frac{75}{64}m^2\right)$
$\cos 3Ev - cv$	$eb^2\left(-\frac{5}{2}m^2\right)$
$\cos 3Ev + cv$	$eb^2\left(-\frac{15}{32}m^2\right)$
$\cos 3Ev - 2cv$	$e^2b^2\left(-\frac{175}{64}m\right)$
$\cos 3Ev - 2gv$	$\gamma^2b^2\left(-\frac{25}{64}m\right)$
$\cos 4Ev$	$\left\{-\frac{1}{2}m^4-\frac{351}{160}m^5+\frac{45}{32}m^3e^2+\left(\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}\right)m^3\gamma^2\right\}$

$\cos 4Ev - cv$	$e\left(-\frac{75}{64}m^3 - \frac{1215}{256}m^4 + \frac{45}{256}m^2\gamma^2\right)$
$\cos 4Ev + cv$	$e\left(\frac{119}{128}m^4\right)$
$\cos 4Ev + c'mv$	$\varepsilon'\left(\frac{1}{2}m^4\right)$
$\cos 4Ev - c'mv$	$\varepsilon'\left(-\frac{7}{2}m^4\right)$
$\cos 4Ev - 2cv$	$e^2\left(\frac{15}{4}m^3\right)$
$\cos 4Ev - 2gv$	$\gamma^2\left\{\left(\frac{9}{256} - \frac{9}{256} = 0\right)m^2 - \left(\frac{57}{512} + \frac{3}{32} - \frac{9}{512} = \frac{3}{16}\right)m^3\right\}$
$\cos 4Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon'\left(\frac{225}{128}m^3\right)$
$\cos 4Ev - c'mv - cv$	$e\varepsilon'\left(-\frac{875}{128}m^3\right)$
$\cos 4Ev + c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left\{\frac{9}{128} - \frac{9}{128} = 0\right\}m^2$
$\cos 4Ev - c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left\{-\frac{21}{128} + \frac{21}{128} = 0\right\}m^2$
$\cos 4Ev - 3cv$	$e^3\left(\frac{675}{256}m^2\right)$
$\cos 4Ev - 2gv - cv$	$e\gamma^2\left\{-\frac{9}{256} - \frac{45}{256} + \frac{9}{512} = -\frac{99}{512}\right\}m^2$
$\cos 4Ev - 2gv + cv$	$e\gamma^2\left(\frac{9}{512}m^2\right)$

Maintenant, si l'on réduit en nombres les différens termes de cette formule on trouvera, que la parallaxe équatoriale de la Lune en fonction de sa longitude vraie est exprimée ainsi qu'il suit.

Parallaxe équatoriale de la Lune =

$$\frac{au(1+p)\left(1+\frac{1}{3}K_{(2)}\right)}{\sqrt{1+ss}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4D\left(1-\frac{4}{3}\Psi\right)}{L'(1+i)T^2}} =$$

cos ov	{ + 3420″,0667 (1) + 13″,4779 (3) + 0″,1117 (5) + 0″,1293 (6) + 0″,1567 + 0″,0124 $(\varepsilon'^2 - E'^2)$ }	= + 3433″,9413
cos cv	{ + 187″,5824 (2) + 0″,3590 (4) − 0″,0009 (5) + 1″,0496 $(\varepsilon'^2 - E'^2)$ }	= + 187″,9405
cos 2cv	{ + 0″,0287 (5) + 0″,0162 (6) }	= + 0″,0449
cos 3cv	{ + 0″,0022 (6) }	= + 0″,0022
cos 2gv	{ + 0″,0776 (5) − 0″,0022 (6) }	= + 0″,0754
cos 2gv − cv	{ − 1″,1410 (4) + 0″,2401 (5) + 0″,0126 (6) }	= − 0″,8883
cos 2gv + cv	{ + 0″,1902 (4) + 0″,0027 (6) }	= + 0″,1929
cos 2gv − 2cv	{ − 0″,1047 (5) + 0″,0263 (6) }	= − 0″,0784
cos 2gv − 3cv	{ − 0″,0032 (6) }	= − 0″,0032
cos 4gv − cv	{ − 0″,0011 (6) }	= − 0″,0011
cos 4gv + cv	{ + 0″,0003 (6) }	= + 0″,0003
cos c′mv	{ − 0″,4826 (4) + 0″,0762 (6) }	= − 0″,4064
cos 2c′mv	{ − 0″,0122 (5) }	= − 0″,0122
cos 3c′mv	{ − 0″,0003 (6) }	= − 0″,0003
cos cv + c′mv	{ − 0″,2654 (4) − 0″,2308 (5) − 0″,0858 (6) }	= − 0″,5820
cos cv − c′mv	{ + 0″,2654 (4) + 0″,3069 (5) + 0″,1793 (6) }	= + 0″,7516
cos cv + 2c′mv	{ − 0″,0034 (5) − 0″,0031 (6) }	= − 0″,0065
cos cv − 2c′mv	{ + 0″,0034 (5) + 0″,0045 (6) }	= + 0″,0079

$\cos cv + 3c'mv$	$\{-0'',00006\,(6)\}$	$=-\ 0'',00006$
$\cos cv - 3c'mv$	$\{+0'',00006\,(6)\}$	$=+\ 0'',00006$
$\cos 2cv + c'mv$	$\{+0'',0007\,(6)\}$	$=+\ 0'',0007$
$\cos 2cv - c'mv$	$\{+0'',0007\,(6)\}$	$=+\ 0'',0007$
$\cos 2gv + c'mv$	$\{+0'',0020\,(6)\}$	$=+\ 0'',0020$
$\cos 2gv - c'mv$	$\{+0'',0020\,(6)\}$	$=+\ 0'',0020$
$\cos 2gv - cv + c'mv$	$\{-0'',0048\,(6)\}$	$=-\ 0'',0048$
$\cos 2gv - cv - c'mv$	$\{+0'',0048\,(6)\}$	$=+\ 0'',0048$
$\cos 2gv + cv - c'mv$	$\{+0'',0003\,(6)\}$	$=+\ 0'',0003$
$\cos 2gv + cv + c'mv$	$\{-0'',0003\,(6)\}$	$=-\ 0'',0003$
$\cos 2Ev$	$\left\{\begin{matrix}+19'',1361\,(3)+4'',5327\,(4)\\+0'',8033\,(5)+0'',1378\,(6)\end{matrix}\right\}$	$=+24'',6099$
$\cos 2Ev - cv$	$\left\{\begin{matrix}+26'',3089\,(3)+8'',9540\,(4)\\+2'',0805\,(5)+0'',4429\,(6)\end{matrix}\right\}$	$=+37'',7863$
$\cos 2Ev + cv$	$\{-0'',6560\,(4)-0'',0269\,(5)+0'',0017\,(6)\}$	$=-\ 0'',6812$
$\cos 2Ev + c'mv$	$\{-0'',1609\,(4)-0'',0191\,(5)-0'',0045\,(6)\}$	$=-\ 0'',1845$
$\cos 2Ev - c'mv$	$\{+1'',1263\,(4)+0'',4001\,(5)+0'',1155\,(6)\}$	$=+\ 1'',6419$
$\cos 2Ev - 2cv$	$\{+2'',8859\,(4)+0'',5289\,(5)+0'',1442\,(6)\}$	$=+\ 3'',5590$
$\cos 2Ev + 2cv$	$\{+0'',0216\,(4)-0'',0011\,(5)\}$	$=+\ 0'',0205$
$\cos 2Ev - 2gv$	$\{+0'',1552\,(5)-0'',0133\,(6)\}$	$=-\ 0'',1419$
$\cos 2Ev + 2gv$	$\{+0'',0388\,(5)+0'',0063\,(6)\}$	$=+\ 0'',0063$

$\cos 2Ev + c'mv - cv$	$\{-0'',4423(4) - 0'',0008(5) + 0'',0927(6)\}$	$= -0'',3504$
$\cos 2Ev + c'mv + cv$	$\{+0'',0055(5) + 0'',0009(6)\}$	$= +0'',0064$
$\cos 2Ev - c'mv - cv$	$\{+1'',0322(4) + 0'',4663(5) + 0'',1174(6)\}$	$= +1'',6159$
$\cos 2Ev - c'mv + cv$	$\{-0'',0386(5) - 0'',0017(6)\}$	$= -0'',0403$
$\cos 2Ev - 2c'mv$	$\{+0'',0460(5) + 0'',0218(6)\}$	$= +0'',0678$
$\cos 2Ev - 3cv$	$\{+0'',0792(5) + 0'',0015(6)\}$	$= +0'',0807$
$\cos 2Ev + 3cv$	$\{-0'',0007(6)\}$	$= -0'',0007$
$\cos 2Ev - 2gv - cv$	$\{-0'',0693(5) - 0'',0169(6)\}$	$= -0'',0862$
$\cos 2Ev + 2gv - cv$	$\{+0'',0268(5) + 0'',0252(6)\}$	$= +0'',0252$
$\cos 2Ev - 2gv + cv$	$\{-0'',0907(5) - 0'',0005(6)\}$	$= -0'',0912$
$\cos 2Ev + 2gv + cv$	$\{-0'',0020(6)\}$	$= -0'',0020$
$\cos 2Ev + 3c'mv$	$\{+0'',000002(6)\}$	$= +0'',000002$
$\cos 2Ev - 3c'mv$	$\{+0'',0016(6)\}$	$= +0'',0016$
$\cos 2Ev + 2c'mv - cv$	$\{-0'',0056(5) - 0'',0074(6)\}$	$= -0'',0130$
$\cos 2Ev - 2c'mv - cv$	$\{+0'',0316(5) + 0'',0181(6)\}$	$= +0'',0497$
$\cos 2Ev - 2c'mv + cv$	$\{-0'',00158(6)\}$	$= -0'',00158$
$\cos 2Ev + c'mv - 2cv$	$\{-0'',0485(5) + 0'',0078(6)\}$	$= -0'',0407$
$\cos 2Ev - c'mv - 2cv$	$\{+0'',1132(5) + 0'',0204(6)\}$	$= +0'',1336$
$\cos 2Ev + c'mv + 2cv$	$\{-0'',0002(6)\}$	$= -0'',0002$
$\cos 2Ev - c'mv + 2cv$	$\{+0'',0013(6)\}$	$= +0'',0013$
$\cos 2Ev + c'mv - 2gv$	$\{+0'',0013(6)\}$	$= +0'',0013$
$\cos 2Ev - c'mv - 2gv$	$\{+0'',0305(5) - 0'',0046(6)\}$	$= +0'',0259$

$\cos 2Ev + c'mv + 2gv$	$\{-0'',0003\,(6)\}$	$= -0'',0003$
$\cos 2Ev - c'mv + 2gv$	$\{-0'',0023\,(6)\}$	$= -0'',0023$
$\cos 2Ev - 2c'mv - 2cv$	$\{+0'',0035\,(6)\}$	$= +0'',0035$
$\cos 2Ev + 2c'mv - 2cv$	$\{-0'',0006\,(6)\}$	$= -0'',0006$
$\cos 2Ev - 2c'mv - 2gv$	$\{+0'',0009\,(6)\}$	$= +0'',0009$
$\cos 2Ev - 4gv$	$\{-0'',0004\,(6)\}$	$= -0'',0004$
$\cos 2Ev + c'mv - 3cv$	$\{-0'',0013\,(6)\}$	$= -0'',0013$
$\cos 2Ev - c'mv - 3cv$	$\{+0'',0031\,(6)\}$	$= +0'',0031$
$\cos 2Ev + 3c'mv - cv$	$\{-0'',000006\,(6)\}$	$= -0'',000006$
$\cos 2Ev - 3c'mv - cv$	$\{+0'',0009\,(6)\}$	$= +0'',0009$
$\cos 2Ev + c'mv - 2g + cv$	$\{+0'',0016\,(6)\}$	$= +0'',0016$
$\cos 2Ev - c'mv - 2g + cv$	$\{-0'',0027\,(6)\}$	$= -0'',0027$
$\cos 2Ev + c'mv - 2g - cv$	$\{+0'',0012\,(6)\}$	$= +0'',0012$
$\cos 2Ev - c'mv - 2g - cv$	$\{-0'',0019\,(6)\}$	$= -0'',0019$
$\cos 2Ev + c'mv + 2g - cv$	$\{-0'',0005\,(6)\}$	$= -0'',0005$
$\cos 2Ev - c'mv + 2g - cv$	$\{+0'',0010\,(6)\}$	$= +0'',0010$
$\cos Ev$	$\{-0'',6045\,(4) - 0'',2442\,(5) - 0'',0841\,(6)\}$	$= -0'',9328$
$\cos Ev - cv$	$\{-0'',0663\,(5) - 0'',0282\,(6)\}$	$= -0'',0945$
$\cos Ev + cv$	$\{-0'',0030\,(6)\}$	$= -0'',0030$
$\cos Ev + c'mv$	$\{+0'',1812\,(4) + 0'',0610\,(5) + 0'',0236\,(6)\}$	$= +0'',2648$
$\cos Ev - c'mv$	$\{+0'',0102\,(5) - 0'',0085\,(6)\}$	$= +0'',0017$
$\cos Ev - 2cv$	$\{-0'',0005\,(6)\}$	$- -0'',0005$
$\cos Ev - 2gv$	$\{+0'',0079\,(6)\}$	$= +0'',0079$
$\cos Ev + 2gv$	$\{-0'',0006\,(6)\}$	$= -0'',0006$

$\cos Ev + 2c'mv$	$\{-0'',00002\,(6)\}$	$= -0'',00002$
$\cos Ev - 2c'mv$	$\{+0'',0006\,(6)\}$	$= +0'',0006$
$\cos Ev + c'mv - cv$	$\{+0'',0199\,(5) - 0'',0067\,(6)\}$	$= +0'',0132$
$\cos Ev - c'mv - cv$	$\{+0'',0039\,(6)\}$	$= +0'',0039$
$\cos Ev + c'mv - 2cv$	$\{-0'',0001\,(6)\}$	$= -0'',0001$
$\cos Ev + c'mv - 2gv$	$\{-0'',0007\,(6)\}$	$= -0'',0007$
$\cos Ev + c'mv + 2gv$	$\{+0'',0002\,(6)\}$	$= +0'',0002$
$\cos 3Ev$	$\{+0'',0189\,(5) + 0'',0059\,(6)\}$	$= +0'',0258$
$\cos 3Ev - c'mv$	$\{+0'',0016\,(6)\}$	$= +0'',0016$
$\cos 3Ev + c'mv$	$\{-0'',0009\,(6)\}$	$= -0'',0009$
$\cos 3Ev - cv$	$\{-0'',0066\,(6)\}$	$= -0'',0066$
$\cos 3Ev + cv$	$\{-0'',0012\,(6)\}$	$= -0'',0012$
$\cos 3Ev - 2cv$	$\{-0'',0053\,(5)\}$	$= -0'',0053$
$\cos 3Ev - 2gv$	$\{-0'',0020\,(6)\}$	$= -0'',0020$
$\cos 4Ev$	$\{-0'',0535\,(5) - 0'',0095\,(6)\}$	$= -0'',0630$
$\cos 4Ev - cv$	$\{-0'',0921\,(5) - 0'',0129\,(6)\}$	$= -0'',1050$
$\cos 4Ev + cv$	$\{+0'',0546\,(6)\}$	$= +0'',0546$
$\cos 4Ev + c'mv$	$\{+0'',0009\,(6)\}$	$= +0'',0009$
$\cos 4Ev - c'mv$	$\{-0'',0063\,(6)\}$	$= -0'',0063$
$\cos 4Ev - 2cv$	$\{+0'',0162\,(6)\}$	$= +0'',0162$
$\cos 4Ev - 2gv$	$\{-0'',0022\,(6)\}$	$= -0'',0022$

$\cos 4Ev + c'mv - cv$	$\{+0'',0023\,(6)\}$	$=+0'',0023$
$\cos 4Ev - c'mv - cv$	$\{-0'',0090\,(6)\}$	$=-0'',0090$
$\cos 4Ev - 3cv$	$\{+0'',0083\,(6)\}$	$=+0'',0083$
$\cos 4Ev - 2gv - cv$	$\{+0'',0018\,(6)\}$	$=+0'',0018$
$\cos 4Ev - 2gv + cv$	$\{+0'',0015\,(6)\}$	$=+0'',0015.$

63. Pour avoir l'expression de la parallaxe horizontale en fonction explicite du temps il faut éliminer v de la fonction $\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}}$ à l'aide de l'équation

$$nt+\varepsilon-\int\zeta dv = v+F(v)$$

(Voyez p. 502) ; ce qui revient à former les différens termes de la série

$$\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}} - F(v)\times\frac{d.}{dv}\left(\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}}\right) + \frac{1}{1.2}\frac{d.}{dv}\left\{\overline{F(v)}^2\frac{d.}{dv}\left(\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}}\right)\right\}$$
$$-\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.}{dv^2}\left\{\overline{F(v)}^3\frac{d.}{dv}\left(\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}}\right)\right\} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^3.}{dv^3}\left\{\overline{F(v)}^4\frac{d.}{dv}\left(\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}}\right)\right\},$$

et à changer v en $nt+\varepsilon-\int\zeta dv$, après l'exécution des opérations indiquées.

En différentiant la valeur précédente de $\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}}$, et faisant ensuite le produit par celle de $-F(v)$, de manière que toutes les quantités d'un ordre supérieur au cinquième soient négligées, on obtient

$$-F(v)\times\frac{d.}{dv}\left\{\frac{au(1+p)}{\sqrt{1+ss}}\right\}=$$

$$\cos 0v \quad \left\{\begin{aligned}
&-e^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\right)e^2\gamma^2-e^4-\frac{11}{8}m^4-\left(\frac{225}{64}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{707}{192}\right)m^2e^2\\
&-\left(\frac{59}{12}+\frac{143}{48}=\frac{379}{48}\right)m^5+\frac{3}{16}m^3\gamma^2\\
&+\left(\frac{45}{16}-\frac{4275}{256}-\frac{2295}{256}-\frac{45}{64}+\frac{225}{32}=-\frac{2115}{128}\right)m^3e^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\cos cv \quad e\left\{\begin{aligned}
&\frac{3}{8}e^2-\left(\frac{15}{4}+\frac{165}{128}=\frac{645}{128}\right)m^3\\
&-\left(\frac{285}{16}+\frac{65}{8}-2+\frac{295}{64}+\frac{1683}{512}-\frac{165}{128}=\frac{15639}{512}\right)m^4+\frac{45}{256}m^2\gamma^2\\
&-\left(\frac{27}{16}+\frac{27}{16}=\frac{27}{8}\right)m^2e'^2+\left(\frac{1}{32}-\frac{7}{32}-1+\frac{675}{256}-\frac{675}{256}=-\frac{19}{16}\right)m^2e^2\\
&-\left(\frac{1}{32}+\frac{3}{32}=\frac{1}{8}\right)e^2\gamma^2+\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{8}=\frac{7}{16}\right)e^4-\left(\frac{3}{32}-\frac{3}{64}=\frac{3}{64}\right)\gamma^4
\end{aligned}\right\}$$

$$\cos 2cv \quad e^2\left\{\begin{aligned}
&1+\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{1}{6}\right)m^2+\left(1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\right)e^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\right)\gamma^2\\
&+\left(\frac{45}{64}-\frac{225}{32}-\frac{45}{16}+\frac{15}{8}+\frac{225}{64}=-\frac{15}{4}\right)m^3
\end{aligned}\right\}$$

$$\cos 3cv \quad e^3\left\{\begin{aligned}
&-\frac{3}{8}+\left(1+\frac{7}{32}-\frac{1}{32}=\frac{19}{16}\right)m^2+\left(\frac{1}{32}+\frac{3}{32}=\frac{1}{8}\right)\gamma^2\\
&-\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{8}-\frac{5}{64}=\frac{23}{64}\right)e^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\cos 4cv \quad e^4\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\cos 5cv \quad e^5\left(-\frac{5}{64}\right)$$

$$\cos 2gv \quad \gamma^2\left\{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{7}{4}\right)e^2+\left(\frac{135}{64}+\frac{135}{64}=\frac{135}{32}\right)me^2-\frac{9}{16}m^3\right\}$$

$$\cos 2gv-cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{8}-\left(\frac{11}{32}+\frac{7}{96}+1+\frac{135}{256}=\frac{1493}{768}\right)m^2\\
&-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{3}{32}\right)\gamma^2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{9}{64}-\frac{15}{32}=-\frac{9}{64}\right)e^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\cos 2gv+cv \quad e\gamma^2\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{8}+\left(1+\frac{11}{32}+\frac{7}{96}=\frac{17}{12}\right)m^2+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{3}{32}\right)\gamma^2\\
&+\left(\frac{15}{32}-\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{9}{32}=\frac{23}{32}\right)e^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\cos 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{135}{64}+\frac{135}{64}=\frac{135}{32}\right) m \right\}$$

$$\cos 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8} = \frac{5}{8} \right)$$

$$\cos 4gv - cv \quad e\gamma^4 \left(\frac{1}{64}+\frac{3}{32} = \frac{7}{64} \right)$$

$$\cos 4gv + cv \quad e\gamma^4 \left(-\frac{1}{64}-\frac{3}{64} = -\frac{1}{16} \right)$$

$$\cos 2gv - 3cv \quad e^3\gamma^2 \left(-\frac{1}{16}-\frac{9}{32} = -\frac{11}{32} \right)$$

$$\cos 2gv + 3cv \quad e^3\gamma^2 \left(-\frac{3}{32}-\frac{9}{64} = -\frac{15}{64} \right)$$

$$\cos c'mv \quad \varepsilon' \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{9}{8}-\frac{9}{8}+\frac{9}{8}-\frac{9}{8}=0\right) me^2 - \left(\frac{77}{16}-\frac{11}{16}+\frac{77}{16}-\frac{11}{16}=\frac{33}{4}\right) m^4 \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &\frac{621}{64}-\frac{1329}{64}+\frac{909}{64}-\frac{1041}{64}+\frac{225}{64} \\ &-\frac{525}{64}+\frac{225}{64}-\frac{525}{64}=-\frac{45}{2} \end{aligned} \right\} m^2 e^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\cos 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \left\{ \frac{27}{32}-\frac{27}{32}+\frac{27}{32}-\frac{27}{32}=0 \right\} m e^2$$

$$\cos cv + c'mv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{aligned} &-\frac{3}{2} m + \left(\frac{735}{32}+\frac{7}{8}-\frac{3}{2}-\frac{35}{4}+\frac{165}{256}+\frac{15}{8}-\frac{385}{128}=\frac{3355}{256}\right) m^3 \\ &-\left(\frac{27}{16}+\frac{3}{2}+\frac{27}{32}-\frac{27}{64}=\frac{231}{64}\right) m e^2 \\ &-\frac{27}{16} m \varepsilon'^2 + \left(\frac{27}{16}+\frac{3}{8}=\frac{33}{16}\right) m\gamma^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\cos cv - c'mv \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{aligned} &\frac{3}{2} m + \left(\frac{3}{2}-\frac{735}{32}-\frac{7}{8}-\frac{1155}{256}-\frac{105}{8}+\frac{165}{128}+\frac{15}{4}=-\frac{8945}{256}\right) m^3 \\ &+\left(\frac{27}{16}+\frac{3}{2}+\frac{27}{32}-\frac{27}{64}=\frac{231}{64}\right) m e^2 \\ &+\frac{27}{16} m \varepsilon'^2 - \left(\frac{27}{16}+\frac{3}{8}=\frac{33}{16}\right) m\gamma^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\cos cv + 2c'mv \quad e\varepsilon'^2 \left(-\frac{9}{8} m + \frac{27}{16} m^2 \right)$$

$$\cos cv - 2c'mv \quad e\varepsilon'^2 \left(\frac{9}{8} m + \frac{27}{16} m^2 \right)$$

$$\cos 2cv + c'mv \qquad e^2\varepsilon' \left\{ -\left(\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}\right) m - \left(\frac{621}{64} + \frac{909}{64} = \frac{765}{32}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2cv - c'mv \qquad e^2\varepsilon' \left\{ \left(\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}\right) m + \left(\frac{1329}{64} + \frac{1041}{64} = \frac{1185}{32}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2cv - 2c'mv \qquad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{27}{32} + \frac{27}{32} = \frac{27}{16} \right\} m$$

$$\cos 2cv + 2c'mv \qquad e^2\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{27}{32} - \frac{27}{32} = -\frac{27}{16} \right\} m$$

$$\cos 3cv - c'mv \qquad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{27}{32} - \frac{27}{64} = -\frac{81}{64} \right\} m$$

$$\cos 3cv + c'mv \qquad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{27}{32} + \frac{27}{64} = \frac{81}{64} \right\} m$$

$$\cos 2gv + cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{32} + \frac{9}{16} - \frac{9}{64} = \frac{45}{64} \right\} m$$

$$\cos 2gv - cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{32} - \frac{9}{64} - \frac{9}{8} = -\frac{99}{64} \right\} m$$

$$\cos 2gv + cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{32} - \frac{9}{16} + \frac{9}{64} = -\frac{45}{64} \right\} m$$

$$\cos 2gv - cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{32} + \frac{9}{64} + \frac{9}{8} = \frac{99}{64} \right\} m$$

$$\cos 2Ev \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{15}{8} + \frac{15}{8} = \frac{15}{4}\right) m e^2 + \left(1 + \frac{285}{32} + \frac{15}{8} + \frac{153}{32} = \frac{265}{16}\right) m^2 e^2 \\ + \left(\frac{17347}{512} - \frac{35}{32} + \frac{119}{48} + \frac{3}{16} + \frac{6019}{512} + \frac{45}{32} = \frac{37337}{768}\right) m^3 e^2 \\ - \left(\frac{75}{16} + \frac{75}{16} = \frac{75}{8}\right) m e^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{15}{8} - \frac{15}{16} - \frac{15}{16} + \frac{45}{16} = \frac{45}{16}\right) m e^4 \\ - \left(\frac{3}{2} + \frac{21}{2} = 12\right) m^3 \varepsilon'^2 - \left(\frac{21}{16} + \frac{15}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{32} + \frac{3}{2} + \frac{15}{32} = \frac{33}{8}\right) m e^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{11}{16} + 2 = \frac{43}{16}\right) m^2 - \left(\frac{59}{24} + \frac{13}{3} = \frac{163}{24}\right) m^3 + \frac{3}{32} m \gamma^2 \\ + \left(\frac{77}{192} - \frac{893}{144} - \frac{74}{9} - \frac{3}{2} = -\frac{8941}{576}\right) m^4 + \left(\frac{45}{32} + \frac{45}{32} = \frac{45}{16}\right) m e^2 \\ + \left(\frac{603}{128} - \frac{11}{16} + \frac{23}{8} - 4 - \frac{45}{64} - \frac{15}{2} = \frac{679}{128}\right) m^2 e^2 \\ + \left(\frac{47}{128} + \frac{11}{64} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{261}{128}\right) m^2 \gamma^2 + \left(\frac{55}{32} + 5 - \frac{45}{16} - \frac{105}{16} = -\frac{85}{32}\right) m^2 \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E\nu + c\nu \quad e \left\{ \begin{array}{l} \left(2+\frac{11}{16}=\frac{43}{16}\right)m^2+\left(\frac{59}{24}+\frac{13}{3}=\frac{163}{24}\right)m^3 \\ +\left(\frac{893}{144}-\frac{77}{192}+\frac{74}{9}+\frac{3}{2}=\frac{8941}{576}\right)m^4-\left(\frac{45}{32}+\frac{45}{64}=\frac{135}{64}\right)me^2 \\ -\frac{3}{32}m\gamma^2-\left(\frac{47}{128}+\frac{11}{64}+1+\frac{1}{2}=\frac{261}{128}\right)m^2\gamma^2-\left(\frac{55}{32}+5=\frac{215}{32}\right)m^2\varepsilon'^2 \\ +\left(\frac{11}{16}-\frac{603}{128}-\frac{65}{64}+4-\frac{459}{256}-\frac{3}{2}=-\frac{1109}{256}\right)m^2e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E\nu + c'm\nu \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -3.m^3-\frac{13}{2}m^4-\left(\frac{15}{8}+\frac{15}{8}=\frac{15}{4}\right)me^2 \\ -\left(\frac{15}{64}+\frac{1}{2}+\frac{135}{64}+\frac{135}{64}-\frac{117}{64}+\frac{15}{16}=\frac{65}{16}\right)m^2e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E\nu - c'm\nu \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} 3.m^3+\frac{13}{2}m^4+\left(\frac{35}{8}+\frac{35}{8}=\frac{35}{4}\right)me^2 \\ +\left(\frac{1775}{64}+\frac{7}{2}+\frac{135}{64}+\frac{135}{64}+\frac{851}{64}+\frac{105}{16}=\frac{885}{16}\right)m^2e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E\nu - 2c\nu \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{15}{8}+\frac{15}{8}=\frac{15}{4}\right)m-\left(\frac{285}{32}-\frac{3}{4}+\frac{153}{32}=\frac{207}{16}\right)m^2 \\ +\left(\frac{35}{32}-\frac{17347}{512}+\frac{13}{8}-\frac{6019}{512}-\frac{45}{32}=-\frac{11347}{256}\right)m^3 \\ -\left(\frac{15}{8}-\frac{15}{16}+\frac{45}{16}+\frac{15}{8}=\frac{45}{8}\right)me^2+\left(\frac{75}{16}+\frac{75}{16}=\frac{75}{8}\right)m\varepsilon'^2 \\ +\left(\frac{21}{16}+\frac{15}{32}+\frac{3}{2}+\frac{15}{32}=\frac{15}{4}\right)m\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E\nu + 2c\nu \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(1+\frac{3}{4}+\frac{15}{8}=\frac{29}{8}\right)m^2-\left(\frac{119}{48}+\frac{13}{8}+\frac{3}{16}=\frac{103}{24}\right)m^3 \\ +\left(\frac{15}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{4}\right)me^2+\left(\frac{3}{32}+\frac{9}{32}=\frac{3}{8}\right)m\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E\nu + c'm\nu + c\nu \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\left(1+\frac{11}{32}=\frac{43}{32}\right)m^2+\left(\frac{45}{32}+\frac{45}{64}=\frac{135}{64}\right)me^2 \\ +\frac{3}{32}m\gamma^2-\left(\frac{59}{96}+\frac{99}{128}+\frac{9}{4}-\frac{45}{16}+\frac{13}{6}=\frac{383}{128}\right)m^3 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E\nu + c'm\nu - c\nu \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(1+\frac{11}{32}-\frac{45}{16}=-\frac{47}{32}\right)m^2-\left(\frac{45}{32}+\frac{45}{32}=\frac{45}{16}\right)me^2 \\ -\frac{3}{32}m\gamma^2+\left(\frac{59}{96}-\frac{99}{128}-\frac{9}{4}-\frac{459}{64}+\frac{13}{6}=-\frac{949}{128}\right)m^3 \end{array} \right\}$$

$$
\begin{array}{lll}
\cos 2Ev - c'mv + cv & e\varepsilon' & \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{77}{32} + 7 = \frac{301}{32}\right) m^2 - \left(\frac{105}{32} + \frac{105}{64} = \frac{315}{64}\right) m e^2 \\ - \frac{7}{32} m\gamma^2 + \left(\frac{413}{32} + \frac{99}{128} + \frac{9}{4} - \frac{45}{16} + \frac{91}{4} = \frac{4591}{128}\right) m^3 \end{array} \right\} \\
\cos 2Ev - c'mv - cv & e\varepsilon' & \left\{ \begin{array}{l} - \left(7 + \frac{77}{32} - \frac{45}{16} = \frac{211}{32}\right) m^2 + \left(\frac{105}{32} + \frac{105}{32} = \frac{105}{16}\right) m e^2 \\ + \frac{7}{32} m\gamma^2 + \left(\frac{99}{128} - \frac{413}{32} + \frac{9}{4} + \frac{459}{64} - \frac{91}{4} = - \frac{3259}{128}\right) m^3 \end{array} \right\} \\
\cos 2Ev - 3cv & e^3 & \left\{ - \left(\frac{45}{32} - \frac{45}{64} = \frac{45}{64}\right) m + \left(\frac{15}{2} + \frac{459}{256} - \frac{1}{3} - \frac{23}{8} = \frac{4673}{768}\right) m^2 \right\} \\
\cos 2Ev + 3cv & e^3 & \left\{ \frac{65}{64} + \frac{1}{3} + \frac{45}{64} + \frac{3}{2} = \frac{341}{96} \right\} m^2 \\
\cos 2Ev - 2gv + cv & e\gamma^2 & \left\{ \frac{9}{32} m + \left(\frac{33}{64} - \frac{11}{16} + 1 - \frac{15}{64} = \frac{19}{32}\right) m^2 \right\} \\
\cos 2Ev - 2gv - cv & e\gamma^2 & \left\{ - \left(\frac{9}{32} - \frac{15}{64} = \frac{3}{64}\right) m + \left(\frac{11}{16} - \frac{33}{128} - \frac{1}{4} + \frac{153}{256} = \frac{199}{256}\right) m^2 \right\} \\
\cos 2Ev + 2gv - cv & e\gamma^2 & \left\{ - \frac{15}{64} m - \left(\frac{11}{64} + \frac{33}{64} + 1 + \frac{153}{256} + 1 = \frac{841}{256}\right) m^2 \right\} \\
\cos 2Ev + 2gv + cv & e\gamma^2 & \left\{ \frac{11}{64} + \frac{33}{128} + \frac{1}{4} + \frac{15}{64} + 1 = \frac{245}{128} \right\} m^2 \\
\cos 2Ev - 2c'mv + cv & e\varepsilon'^2 & \left\{ 17 + \frac{187}{32} = \frac{731}{32} \right\} m^2 \\
\cos 2Ev - 2c'mv - cv & e\varepsilon'^2 & \left\{ \frac{135}{64} - \frac{187}{32} + \frac{105}{16} - 17 = - \frac{907}{64} \right\} m^2 \\
\cos 2Ev + 2c'mv - cv & e\varepsilon'^2 & \left\{ \frac{45}{16} - \frac{135}{64} = \frac{45}{64} \right\} m^2 \\
\cos 2Ev + c'mv - 2cv & e^2\varepsilon' & \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{15}{8} + \frac{15}{8} = \frac{15}{4}\right) m \\ + \left(\frac{15}{64} - \frac{135}{64} - \frac{3}{8} - \frac{117}{64} - \frac{135}{64} = - \frac{99}{16}\right) m^2 \end{array} \right\} \\
\cos 2Ev - c'mv - 2cv & e^2\varepsilon' & \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{35}{8} + \frac{35}{8} = \frac{35}{4}\right) m \\ + \left(\frac{135}{64} - \frac{1775}{64} + \frac{135}{64} + \frac{21}{8} - \frac{851}{64} = - \frac{547}{16}\right) m^2 \end{array} \right\} \\
\cos 2Ev + c'mv + 2cv & e^2\varepsilon' & \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{15}{16} = \frac{29}{16} \right\} m^2
\end{array}
$$

$\cos 2Ev - c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ -\frac{7}{2} - \frac{21}{8} - \frac{105}{16} = -\frac{203}{16} \right\} m^2$

$\cos 2Ev + c'mv - 3cv \quad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{45}{32} - \frac{45}{64} = \frac{45}{64} \right\} m$

$\cos 2Ev - c'mv - 3cv \quad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{105}{32} + \frac{105}{64} = -\frac{105}{64} \right\} m$

$\cos 2Ev - 2gv \quad \gamma^2 \left\{ \frac{1}{4} m^2 + \frac{13}{24} m^3 + \left(\frac{9}{64} + \frac{51}{64} + \frac{45}{32} + \frac{15}{16} + \frac{39}{64} + \frac{51}{64} = \frac{75}{16} \right) me^2 \right\}$

$\cos 2Ev + 2gv \quad \gamma^2 \left\{ -\frac{1}{4} m^2 - \frac{13}{24} m^3 + \left(\frac{15}{64} + \frac{45}{64} + \frac{15}{64} + \frac{45}{64} = \frac{15}{8} \right) me^2 \right\}$

$\cos 2Ev + 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \left\{ -\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \right) m^3 - \left(\frac{45}{32} + \frac{45}{32} = \frac{45}{16} \right) me^2 \right\}$

$\cos 2Ev - 2c'mv \quad \varepsilon'^2 \left\{ \left(\frac{9}{4} + \frac{21}{2} = \frac{51}{4} \right) m^3 + \left(\frac{255}{32} + \frac{255}{32} = \frac{255}{16} \right) me^2 \right\}$

$\cos 2Ev - 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{64} - \frac{45}{64} - \frac{15}{64} - \frac{39}{64} = -\frac{27}{16} \right\} m$

$\cos 2Ev + 2gv - 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ -\frac{15}{64} - \frac{45}{32} - \frac{15}{16} - \frac{45}{64} = -\frac{105}{32} \right\} m$

$\cos 2Ev - 2gv + 2cv \quad e^2\gamma^2 \left\{ -\frac{51}{64} - \frac{51}{64} = -\frac{51}{32} \right\} m$

$\cos 2Ev + c'mv - 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left(-\frac{9}{32} m \right)$

$\cos 2Ev + c'mv - 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{32} - \frac{15}{64} = \frac{3}{64} \right\} m$

$\cos 2Ev - c'mv - 2gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{21}{32} m \right)$

$\cos 2Ev - c'mv - 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{21}{32} + \frac{35}{64} = -\frac{7}{64} \right\} m$

$\cos 2Ev + c'mv + 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{15}{64} m \right)$

$\cos 2Ev - c'mv + 2gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left(-\frac{35}{64} m \right)$

$\cos 2Ev - 2c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{255}{32} - \frac{255}{32} = -\frac{255}{16} \right\} m$

$\cos 2Ev + 2c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{45}{32} + \frac{45}{32} = \frac{45}{16} \right\} m$

$\cos 2Ev - 4cv$	$e^4\left\{-\frac{5}{16}+\frac{15}{8}=\frac{25}{16}\right\}m$
$\cos 2Ev + c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{1}{8}m^2\right)$
$\cos 2Ev + c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{1}{8}m^2\right)$
$\cos 2Ev - c'mv + 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{7}{8}m^2\right)$
$\cos 2Ev - c'mv - 2gv$	$\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{7}{8}m^2\right)$
$\cos Ev$	$b^2\left\{\left(\frac{165}{256}+\frac{15}{8}=\frac{645}{256}\right)m^3+\frac{15}{8}m\varepsilon'^2-\left(\frac{165}{64}+\frac{45}{64}=\frac{105}{32}\right)me^2\right\}$
$\cos Ev + cv$	$eb^2\left\{-\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}=\frac{15}{8}\right)m-\left(\frac{93}{16}+\frac{33}{8}=\frac{159}{16}\right)m^2\right\}$
$\cos Ev - cv$	$eb^2\left\{\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}=\frac{15}{8}\right)m+\left(\frac{93}{16}+\frac{225}{128}+\frac{33}{8}+\frac{225}{128}=\frac{861}{64}\right)m^2\right\}$
$\cos Ev + c'mv$	$\varepsilon'b^2\left\{\left(\frac{25}{16}+\frac{15}{16}=\frac{5}{2}\right)e^2+\frac{45}{32}m^2\right\}$
$\cos Ev - c'mv$	$\varepsilon'b^2\left\{-\frac{5}{2}-\frac{55}{64}-\frac{45}{32}=-\frac{305}{32}\right\}m^2$
$\cos Ev - 2cv$	$e^2b^2\left\{\frac{165}{64}-\frac{45}{128}=\frac{285}{128}\right\}m$
$\cos Ev + 2cv$	$e^2b^2\left\{\frac{45}{64}+\frac{45}{128}=\frac{135}{128}\right\}m$
$\cos Ev + 2gv$	$\gamma^2b^2\left(\frac{15}{128}m\right)$
$\cos Ev - 2gv$	$\gamma^2b^2\left(-\frac{15}{128}m\right)$
$\cos Ev + c'mv + cv$	$e\varepsilon'b^2\left\{\left(\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{45}{8}+\frac{45}{8}=\frac{45}{4}\right)m\right\}$
$\cos Ev + c'mv - cv$	$e\varepsilon'b^2\left\{-\left(\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{45}{8}+\frac{45}{8}=\frac{45}{4}\right)m\right\}$
$\cos Ev + c'mv - 2cv$	$e^2\varepsilon'b^2\left\{-\frac{25}{16}+\frac{15}{32}=-\frac{35}{32}\right\}$
$\cos Ev + c'mv + 2cv$	$e^2\varepsilon'b^2\left\{-\frac{15}{16}-\frac{15}{32}=-\frac{45}{32}\right\}$

$\cos Ev - c'mv - cv \qquad e\varepsilon'b^2 \left\{ -\frac{75}{32} - \frac{15}{16} - \frac{75}{32} - \frac{15}{16} = -\frac{105}{16} \right\} m$

$\cos Ev - c'mv + cv \qquad e\varepsilon'b^2 \left\{ \frac{15}{15} + \frac{15}{16} = \frac{15}{8} \right\} m$

$\cos Ev + 2c'mv \qquad \varepsilon'^2 b^2 \left(-\frac{15}{8} m \right)$

$\cos Ev + c'mv + 2gv \qquad \varepsilon'\gamma^2 b^2 \left(-\frac{5}{32} \right)$

$\cos Ev + c'mv - 2gv \qquad \varepsilon'\gamma^2 b^2 \left(\frac{5}{32} \right)$

$\cos 3Ev \qquad b^2 \left\{ -\frac{165}{256} - \frac{15}{8} = -\frac{645}{256} \right\} m^3$

$\cos 3Ev + cv \qquad eb^2 \left\{ \frac{15}{64} + \frac{75}{64} = \frac{45}{32} \right\} m^2$

$\cos 3Ev - cv \qquad eb^2 \left\{ -\frac{15}{64} - \frac{225}{128} - \frac{225}{128} - \frac{75}{64} = -\frac{315}{64} \right\} m^2$

$\cos 3Ev + c'mv \qquad \varepsilon'b^2 \left\{ \frac{55}{64} + \frac{5}{2} = \frac{215}{64} \right\} m^2$

$\cos 3Ev + c'mv - cv \qquad e\varepsilon'b^2 \left\{ \frac{75}{32} + \frac{75}{32} = \frac{75}{16} \right\} m$

$$\cos 4Ev \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{8} m^4 + \left(\frac{59}{12} + \frac{143}{48} = \frac{379}{48} \right) m^5 - \frac{3}{16} m^3 \gamma^2 \\ - \left(\frac{15}{8} + \frac{45}{16} + \frac{15}{8} + \frac{225}{64} + \frac{225}{32} = \frac{1095}{64} \right) m^3 e^2 \end{array} \right\}$$

$\cos 4Ev + cv \qquad e \left\{ -\frac{283}{512} - 2 - \frac{165}{128} - 2 = -\frac{299}{512} \right\} m^4$

$$\cos 4Ev - cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{15}{4} + \frac{165}{128} = \frac{645}{128} \right) m^3 - \frac{45}{256} m^2 \gamma^2 - \left(\frac{675}{256} + \frac{675}{512} = \frac{2025}{512} \right) m^2 e^2 \\ + \left(\frac{283}{512} + \frac{285}{16} + \frac{65}{8} + \frac{295}{64} + \frac{1683}{512} + 2 = \frac{9315}{256} \right) m^4 \end{array} \right\}$$

$\cos 4Ev + c'mv \qquad \varepsilon' \left\{ -\frac{11}{16} - \frac{11}{16} = -\frac{11}{8} \right\} m^4$

$\cos 4Ev - c'mv \qquad \varepsilon' \left\{ \frac{77}{16} + \frac{77}{16} = \frac{77}{8} \right\} m^4$

$\cos 4Ev - 2gv \qquad \gamma^2 \left(\frac{9}{16} m^3 \right)$

$\cos 4Ev - 2cv \quad e^2 \left\{ \frac{225}{64} m^2 + \left(\frac{15}{8} + \frac{45}{16} + \frac{4275}{256} + \frac{2295}{256} + \frac{225}{32} = \frac{4785}{128} \right) m^3 \right\}$

$\cos 4Ev - 3cv \quad e^3 \left\{ \frac{675}{512} + \frac{675}{256} = \frac{2025}{512} \right\} m^2$

$\cos 4Ev - 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left(-\frac{9}{512} m^2 \right)$

$\cos 4Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{9}{512} + \frac{135}{256} = \frac{279}{512} \right\} m^2$

$\cos 4Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left(-\frac{15}{4} - \frac{165}{256} - \frac{15}{8} - \frac{165}{128} = -\frac{1935}{256} \right) m^3$

$\cos 4Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left(\frac{35}{4} + \frac{1155}{256} + \frac{105}{8} + \frac{385}{128} = \frac{7525}{256} \right) m^3$

$\cos 4Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left(-\frac{225}{64} - \frac{225}{64} = -\frac{225}{32} \right) m^2$

$\cos 4Ev - c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left(\frac{525}{64} + \frac{525}{64} = \frac{525}{32} \right) m^2.$

En prenant dans le § 4 les valeurs de $\overline{F(v)}^2$, $\overline{F(v)}^3$, $\overline{F(v)}^4$, on formera par un procédé analogue les équations suivantes.

$$\frac{1}{2} \overline{F(v)}^2 \times \frac{d.}{dv} \left\{ \frac{au(1+p)}{\sqrt{1+ss}} \right\} =$$

$$\sin cv \quad e \left\{ \begin{array}{l} -\left(1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right) e^2 - \left(1 + \frac{9}{64} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{283}{192}\right) e^4 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{9}{8}\right) e^2\gamma^2 \\ -\frac{\gamma^4}{64} - \frac{9}{4} m^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{7}{12} - \frac{321}{64} + \frac{7}{24} - \frac{3}{4} - \frac{225}{64} - \frac{225}{64} = -\frac{763}{64}\right) m^2 e^2 \\ -\left(\frac{121}{256} + \frac{11}{8} + \frac{11}{8} = \frac{825}{256}\right) m^4 \end{array} \right\}$$

$\sin 2cv \quad e^2 \left\{ \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}\right) e^2 - \left(\frac{165}{128} + \frac{15}{4} - \frac{165}{128} = \frac{15}{4}\right) m^3 \right\}$

$\sin 3cv \quad e^3 \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{91}{384} = \frac{37}{384}\right) e^2 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}\right) \gamma^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{24} = \frac{11}{24}\right) m^2 \right\}$

$\sin 4cv \quad e^4 \left(-\frac{3}{8} \right)$

$\sin 5cv \quad e^5 \left(\frac{91}{384} \right)$

$\sin 2gv + cv$	$e\gamma^2 \left\{ -\frac{5}{8} - \frac{11}{64} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{99}{64} \right\} e^2$
$\sin 2gv - cv$	$e\gamma^2 \left\{ \frac{5}{8} + \frac{29}{64} + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{129}{64} \right\} e^2$
$\sin 4gv + cv$	$e\gamma^4 \left(\frac{1}{128} \right)$
$\sin 4gv - cv$	$e\gamma^4 \left(-\frac{1}{128} \right)$
$\sin 2gv$	$\gamma^2 \left\{ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \right\} . e^2$
$\sin 2gv - 2cv$	$e^2\gamma^2 \left(-\frac{1}{8} \right)$
$\sin 2gv + 2cv$	$e^2\gamma^2 \left(-\frac{1}{8} \right)$
$\sin 2gv - 3cv$	$e^3\gamma^2 \left(-\frac{29}{64} - \frac{3}{8} = -\frac{53}{64} \right)$
$\sin 2gv + 3cv$	$e^3\gamma^2 \left(\frac{11}{64} + \frac{3}{16} = \frac{23}{64} \right)$
$\sin c'mv$	$\varepsilon' \left\{ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \right\} m e^2$
$\sin 2c'mv$	$\varepsilon'^2 \left\{ \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4} \right\} m e^2$
$\sin cv + 2c'mv$	$e\varepsilon'^2 \left(\frac{9}{8} m^2 \right)$
$\sin cv - 2c'mv$	$e\varepsilon'^2 \left(\frac{9}{8} m^2 \right)$
$\sin 2cv + c'mv$	$e^2\varepsilon' \left(-\frac{3}{2} m \right)$
$\sin 2cv - c'mv.$	$e^2\varepsilon' \left(\frac{3}{2} m \right)$
$\sin 2cv + 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2 \left(-\frac{9}{8} m \right)$
$\sin 2cv - 2c'mv$	$e^2\varepsilon'^2 \left(\frac{9}{8} m \right)$

$\sin 3cv + c'mv \quad e^3\varepsilon'\left\{-\frac{9}{16}-\frac{9}{16}=-\frac{9}{8}\right\}m$

$\sin 3cv - c'mv \quad e^3\varepsilon'\left\{\frac{9}{16}+\frac{9}{16}=\frac{9}{8}\right\}m$

$\sin cv + c'mv \quad e\varepsilon'\left\{\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{9}{8}=\frac{9}{8}\right\}me^2$

$\sin cv - c'mv \quad e\varepsilon'\left\{-\frac{9}{16}+\frac{9}{16}-\frac{9}{8}=-\frac{9}{8}\right\}me^2$

$\sin 2gv + cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{3}{16}m\right)$

$\sin 2gv - cv + c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m\right)$

$\sin 2gv + cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{3}{16}m\right)$

$\sin 2gv - cv - c'mv \quad e\varepsilon'\gamma^2\left(\frac{3}{16}m\right)$

$$\sin 2Ev \quad \left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{11}{16}+\frac{11}{16}+2=\frac{27}{8}\right)m^2e^2-\left(\frac{59}{24}+\frac{59}{24}+\frac{13}{3}=\frac{111}{12}\right)m^3e^2 \\ +\left(\frac{45}{16}+\frac{135}{64}+\frac{45}{64}=\frac{45}{8}\right)me^4+\left(\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}\right)me^2\gamma^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev - cv \quad e\left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{15}{8}+\frac{15}{8}+\frac{15}{8}=\frac{45}{8}\right)me^2 \\ -\left(\frac{317}{32}+\frac{1107}{128}-\frac{3}{4}+\frac{153}{32}+\frac{15}{16}=\frac{3011}{128}\right)m^2e^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev + cv \quad e\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{15}{8}+\frac{15}{16}=\frac{45}{16}\right)me^2 \\ +\left(\frac{317}{32}+\frac{161}{128}+\frac{3}{4}+\frac{153}{64}+\frac{15}{8}=\frac{2071}{128}\right)m^2e^2 \end{array}\right\}$$

$\sin 2Ev + c'mv \quad \varepsilon'\left\{\frac{11}{32}-\frac{79}{32}-\frac{45}{16}+1=-\frac{63}{16}\right\}m^2e^2$

$\sin 2Ev - c'mv \quad \varepsilon'\left\{\frac{13}{32}-\frac{77}{32}+\frac{45}{16}-7=-\frac{99}{16}\right\}m^2e^2$

$$\sin 2Ev - 2cv \quad e^2\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{11}{16}+1=\frac{27}{16}\right)m^2+\left(\frac{59}{24}+\frac{13}{6}=\frac{37}{8}\right)m^3 \\ -\frac{3}{32}m\gamma^2-\left(\frac{45}{64}-\frac{45}{64}+\frac{45}{16}=\frac{45}{16}\right)me^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev + 2cv \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{11}{16} + 1 = \frac{27}{16}\right) m^2 + \left(\frac{59}{24} + \frac{13}{6} = \frac{37}{8}\right) m^3 \\ - \frac{3}{32} m \gamma^2 - \left(\frac{135}{64} + \frac{45}{64} = \frac{45}{16}\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - 2gv \quad \gamma^2 \left\{ - \frac{9}{32} - \frac{3}{64} + \frac{15}{64} = - \frac{3}{32} \right\} m e^2$$

$$\sin 2Ev + 2gv \quad \gamma^2 \left\{ - \frac{15}{64} - \frac{15}{64} = - \frac{15}{32} \right\} m e^2$$

$$\sin 2Ev - 3cv \quad e^3 \left\{ \left(\frac{15}{8} + \frac{15}{16} = \frac{45}{16}\right) m + \left(\frac{1107}{128} - \frac{3}{4} + \frac{153}{64} = \frac{1317}{128}\right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + 3cv \quad e^3 \left\{ - \frac{161}{128} - \frac{3}{4} - \frac{15}{16} = - \frac{377}{128} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev - 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{11}{128} + \frac{1}{4} = \frac{43}{128} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev - 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ - \frac{11}{128} - \frac{1}{4} = - \frac{43}{128} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + 2gv + cv \quad e\gamma^2 \left\{ - \frac{11}{128} - \frac{1}{4} = - \frac{43}{128} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + 2gv - cv \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{11}{128} + \frac{1}{4} = \frac{43}{128} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + c'mv + cv \quad e\varepsilon' \left\{ - \left(\frac{33}{32} + 3 = \frac{129}{32}\right) m^3 - \frac{15}{16} m e^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ \left(\frac{33}{32} + 3 = \frac{129}{32}\right) m^3 + \left(\frac{15}{8} + \frac{15}{8} = \frac{15}{4}\right) m e^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv + cv \quad e\varepsilon' \left\{ \left(\frac{33}{32} + 3 = \frac{129}{32}\right) m^3 + \frac{35}{16} m e^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv - cv \quad e\varepsilon' \left\{ - \left(\frac{33}{32} + 3 = \frac{129}{32}\right) m^3 - \left(\frac{35}{8} + \frac{35}{8} = \frac{35}{4}\right) m e^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{79}{32} + \frac{45}{16} - \frac{1}{2} = \frac{153}{32} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev - c'mv - 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ - \frac{13}{32} - \frac{45}{16} + \frac{7}{2} = \frac{9}{32} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ - \frac{11}{32} - \frac{1}{2} = - \frac{27}{32} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev - c'mv + 2cv \quad e^2\varepsilon' \left\{ \frac{77}{32} + \frac{7}{2} = \frac{189}{32} \right\} m^2$$

$\sin 2Ev - 4cv \qquad e^4 \left\{ \frac{45}{64} - \frac{45}{64} = 0 \right\} m$

$\sin 2Ev - 2gv + 2cv \qquad e^2\gamma^2 \left(\frac{9}{32} m \right)$

$\sin 2Ev - 2gv - 2cv \qquad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{3}{64} - \frac{15}{64} = -\frac{3}{16} \right\} m$

$\sin 2Ev + 2gv - 2cv \qquad e^2\gamma^2 \left\{ \frac{15}{64} + \frac{15}{64} = \frac{15}{32} \right\} m$

$\sin 2Ev + c'mv - 3cv \qquad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{15}{16} - \frac{15}{8} = -\frac{45}{8} \right\} m$

$\sin 2Ev - c'mv - 3cv \qquad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{35}{16} + \frac{35}{8} = \frac{105}{16} \right\} m$

$\sin Ev \qquad b^2 \left\{ \frac{15}{16} + \frac{15}{16} + \frac{15}{16} = \frac{45}{16} \right\} m e^2$

$\sin Ev - 2cv \qquad e^2 b^2 \left\{ -\frac{15}{16} - \frac{15}{32} = -\frac{45}{32} \right\} m$

$\sin Ev + 2cv \qquad e^2 b^2 \left\{ -\frac{15}{16} - \frac{15}{32} = -\frac{45}{32} \right\} m$

$\sin Ev + c'mv \qquad \varepsilon' b^2 \left(-\frac{5}{4} e^2 \right)$

$\sin Ev + c'mv + 2cv \qquad e^2\varepsilon' b^2 \left(\frac{5}{8} \right)$

$\sin Ev + c'mv - 2cv \qquad e^2\varepsilon' b^2 \left(\frac{5}{8} \right)$

$\sin 4Ev \qquad \left\{ \frac{165}{128} + \frac{15}{4} - \frac{165}{128} = \frac{15}{4} \right\} m^3 e^2$

$\sin 4Ev + cv \qquad e \left\{ \frac{121}{512} + \frac{11}{8} = \frac{825}{512} \right\} m^4$

$\sin 4Ev - cv \qquad e \left\{ -\left(\frac{121}{512} + \frac{11}{8} = \frac{825}{512} \right) m^4 + \left(\frac{225}{128} + \frac{225}{64} = \frac{675}{128} \right) m^2 e^2 \right\}$

$\sin 4Ev - 2cv \qquad e^2 \left\{ -\frac{165}{128} - \frac{15}{4} - \frac{165}{128} = -\frac{405}{64} \right\} m^3$

$\sin 4Ev - 3cv \qquad e^3 \left\{ -\frac{225}{128} - \frac{225}{64} = -\frac{675}{128} \right\} m^2 ;$

$$-\frac{1}{2.3}F\overline{(v)}^3 \times \frac{d.}{dv}\left\{\frac{au(1+p)}{\sqrt{1+ss}}\right\} =$$

$\cos cv$	$e\left(\frac{3}{8}e^4\right)$
$\cos 2cv$	$e^2\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3}\right\}e^2$
$\cos 3cv$	$e^3\left\{-\frac{3}{8}-\frac{3}{16}=-\frac{9}{16}\right\}e^2$
$\cos 4cv$	$e^4\left(-\frac{1}{6}\right)$
$\cos 5cv$	$e^5\left(\frac{3}{16}\right)$
$\cos 2gv+cv$	$e\gamma^2\left\{-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=-\frac{3}{16}\right\}e^2$
$\cos 2gv-cv$	$e\gamma^2\left\{\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{3}{16}\right\}e^2$
$\cos 2gv-3cv$	$e^3\gamma^2\left(-\frac{1}{16}\right)$
$\cos 2gv+3cv$	$e^3\gamma^2\left(\frac{1}{16}\right)$
$\cos cv+c'mv$	$e\varepsilon'\left\{-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{9}{4}\right\}me^2$
$\cos cv-c'mv$	$e\varepsilon'\left\{\frac{3}{2}+\frac{3}{4} = \frac{9}{4}\right\}me^2$
$\cos 3cv-c'mv$	$e^3\varepsilon'\left(-\frac{3}{4}m\right)$
$\cos 3cv+c'mv$	$e^3\varepsilon'\left(\frac{3}{4}m\right)$
$\cos 2Ev$	$\left\{\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\frac{15}{16} = \frac{15}{4}\right\}me^4$
$\cos 2Ev-cv$	$e\left\{-\frac{11}{16}-\frac{11}{32}-1=-\frac{65}{32}\right\}m^2e^2$
$\cos 2Ev+cv$	$e\left\{\frac{11}{16}+1=\frac{27}{16}\right\}m^2e^2$

$$\cos 2Ev - 2cv \quad e^2 \left\{ -\frac{15}{8} - \frac{15}{16} - \frac{15}{16} = -\frac{15}{4} \right\} m e^2$$

$$\cos 2Ev + 2cv \quad e^2 \left\{ -\frac{15}{16} - \frac{5}{16} = -\frac{5}{4} \right\} m e^2$$

$$\cos 2Ev - 3cv \quad e^3 \left\{ \frac{11}{32} + \frac{1}{3} = \frac{65}{96} \right\} m^2$$

$$\cos 2Ev + 3cv \quad e^3 \left(-\frac{1}{3} m^2 \right)$$

$$\cos 2Ev - 4cv \quad e^4 \left\{ \frac{15}{16} + \frac{5}{16} = \frac{5}{4} \right\} m;$$

$$\frac{1}{2.3.4} F\overline{(v)}^4 \frac{d.}{dv} \left\{ \frac{au(1+p)}{\sqrt{1+ss}} \right\} =$$

$$\sin cv \quad e\left(-\frac{1}{6} e^4 \right)$$

$$\sin 3cv \quad e^3 \left\{ \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{5}{24} \right\} e^2$$

$$\sin 5cv \quad e^5 \left(-\frac{1}{24} \right);$$

d'où l'on a conclu l'expression suivante de $\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}}$ en fonction du temps.

$$\frac{(1+p)au}{\sqrt{1+ss}} =$$

$$\cos 0.nt \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(1 - 1 = 0\right) e^2 + \frac{1}{6} m^2 + \left(1 - 1 = 0\right) e^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\right) e^2 \gamma^2 \\ - \left(\frac{11}{8} - \frac{217}{288} = \frac{179}{288}\right) m^4 - \left(\frac{707}{192} - \frac{167}{192} = \frac{45}{16}\right) m^2 e^2 + \frac{1}{4} m^2 E'^2 \\ - \frac{3}{4} m^2 (\varepsilon'^2 - E'^2) - \left(\frac{379}{48} - \frac{47}{8} = \frac{97}{48}\right) m^5 \\ + \left(\frac{2475}{128} - \frac{2115}{128} = \frac{45}{16}\right) m^3 e^2 + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0\right) m^3 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos c.nt \; e \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(1 + \frac{3}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}\right) e^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{1}{6} m^2 - \frac{645}{128} m^3 \\ - \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{64} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}\right) \gamma^4 + \left(1 + \frac{7}{16} - \frac{283}{192} - \frac{3}{8} + \frac{1}{6} = -\frac{47}{192}\right) e^4 \\ + \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{8} - \frac{19}{32} = \frac{13}{32}\right) e^2 \gamma^2 - \left(\frac{15639}{512} + \frac{825}{256} - \frac{217}{288} = \frac{152129}{4608}\right) m^4 \\ - \left(\frac{665}{768} - \frac{45}{256} = \frac{265}{384}\right) m^2 \gamma^2 - \left(\frac{19}{16} + \frac{763}{64} - \frac{9}{8} - \frac{167}{192} = \frac{1067}{96}\right) m^2 e^2 \\ - \left(\frac{27}{8} + \frac{9}{4} = \frac{45}{8}\right) m^2 \varepsilon'^2 + \frac{1}{4} m^2 E'^2 - \frac{3}{4} m^2 (\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\}$$

$$\cos 2c.nt\ e^2 \left\{ \begin{array}{l} 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\right)m^2-\frac{1}{2}\gamma^2+\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-\frac{8}{3}=-\frac{1}{3}\right)e^2 \\ -\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{4}-\frac{15}{4}=\frac{15}{2}\right)m^3 \end{array} \right\}$$

$$\cos 3c.nt\ e^3 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}=\frac{9}{8}\right)+\left(\frac{19}{16}-\frac{5}{32}+\frac{11}{8}-\frac{9}{8}=\frac{41}{32}\right)m^2 \\ -\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{8}-\frac{5}{32}=\frac{27}{32}\right)\gamma^2+\left(\frac{37}{128}-\frac{23}{64}+\frac{81}{16}-\frac{45}{8}=-\frac{81}{128}\right)e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 4c.nt \qquad e^4\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\right)$$

$$\cos 5c.nt \qquad e^5\left(-\frac{5}{64}+\frac{455}{384}-\frac{75}{16}+\frac{125}{24}=\frac{625}{384}\right)$$

$$\cos 2g.nt \qquad \gamma^2\left\{\frac{1}{2}m^2-\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}\right)e^2+\frac{135}{32}me^2-\left(\frac{3}{16}+\frac{9}{16}=\frac{3}{4}\right)m^3\right\}$$

$$\cos 2g.nt-c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}\right)+\frac{135}{64}m-\left(\frac{1493}{768}-\frac{835}{512}=\frac{481}{1536}\right)m^2 \\ +\left(\frac{3}{32}-\frac{3}{32}=0\right)\gamma^2+\left(\frac{129}{64}-\frac{33}{64}-\frac{9}{64}-\frac{3}{16}=\frac{75}{64}\right)e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2g.nt+c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0\right)+\left(\frac{17}{12}-\frac{37}{96}=\frac{33}{32}\right)m^2+\left(\frac{3}{32}-\frac{3}{32}=0\right)\gamma^2 \\ +\left(\frac{1}{8}+\frac{23}{32}-\frac{297}{64}+\frac{27}{16}=-\frac{135}{64}\right)e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2g.nt-2c.nt \quad e^2\gamma^2\left\{\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0\right)+\left(\frac{135}{32}-\frac{135}{32}=0\right)m\right\}$$

$$\cos 2g.nt+2c.nt \quad e^2\gamma^2\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\right)$$

$$\cos 2g.nt-3c.nt \quad e^3\gamma^2\left(-\frac{45}{64}-\frac{11}{32}+\frac{53}{64}+\frac{1}{16}=-\frac{5}{32}\right)$$

$$\cos 2g.nt+3c.nt \quad e^3\gamma^2\left(-\frac{15}{64}+\frac{115}{64}-\frac{25}{16}=0\right)$$

$$\cos 4g.nt-c.nt \quad e\gamma^4\left(-\frac{11}{128}+\frac{7}{64}-\frac{3}{128}=-0\right)$$

$$\cos 4g.nt+c.nt \quad e\gamma^4\left(\frac{3}{128}-\frac{1}{16}+\frac{5}{128}=0\right)$$

$$\cos c'm.nt \qquad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2}m^2 + \left(\frac{581}{16} - \frac{33}{4} = \frac{449}{16}\right) m^4 \\ + \left(\frac{69}{4} - \frac{45}{2} + 3 = -\frac{9}{4}\right) m^2 e^2 - \frac{27}{16} m^2 \varepsilon'^2 + \frac{9}{4} m^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2c'm.nt \qquad \varepsilon'^2 \left(-\frac{9}{4} m^2\right)$$

$$\cos 3c'm.nt \qquad \varepsilon'^3 \left(-\frac{53}{16} m^2\right)$$

$$\cos c.nt + c'm.nt \qquad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{9}{8} + \frac{3}{2} = \frac{21}{8}\right) m - \frac{837}{64} m^2 - \left(\frac{17481}{256} - \frac{3355}{256} = \frac{7063}{128}\right) m^3 \\ -\left(\frac{9}{16} + \frac{231}{64} - \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{51}{64}\right) m e^2 - \left(\frac{81}{64} + \frac{27}{16} = \frac{189}{64}\right) m \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{81}{32} + \frac{33}{16} = \frac{147}{32}\right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos c.nt - c'm.nt \qquad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{2} = \frac{21}{8}\right) m + \frac{1113}{64} m^2 + \left(\frac{35601}{256} - \frac{8945}{256} = \frac{833}{8}\right) m^3 \\ + \left(\frac{9}{16} + \frac{231}{64} - \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{51}{64}\right) m e^2 + \left(\frac{81}{64} + \frac{27}{16} = \frac{189}{64}\right) m \varepsilon'^2 \\ - \left(\frac{81}{32} + \frac{33}{16} = \frac{147}{32}\right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos c.nt + 2c'm.nt \qquad e\varepsilon'^2 \left\{ -\left(\frac{27}{32} + \frac{9}{8} = \frac{63}{32}\right) m - \left(\frac{2685}{256} - \frac{27}{16} - \frac{9}{8} = \frac{1965}{256}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos c.nt - 2c'm.nt \qquad e\varepsilon'^2 \left\{ \left(\frac{27}{32} + \frac{9}{8} = \frac{63}{32}\right) m + \left(\frac{3915}{256} + \frac{27}{16} + \frac{9}{8} = \frac{4635}{256}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos c.nt + 3c'm.nt \qquad e\varepsilon'^3 \left(-\frac{53}{64} m\right)$$

$$\cos c.nt - 3c'm.nt \qquad e\varepsilon'^3 \left(\frac{53}{64} m\right)$$

$$\cos 2c.nt + c'm.nt \qquad e^2\varepsilon' \left\{ -\left(\frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}\right) m - \left(\frac{765}{32} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{789}{32}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2c.nt - c'm.nt \qquad e^2\varepsilon' \left\{ \left(\frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}\right) m + \left(\frac{1185}{32} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1161}{32}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2g.nt + c'm.nt \qquad \varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{3}{4} m^2\right)$$

$$\cos 2g.nt - c'm.nt \qquad \varepsilon'\gamma^2 \left(\frac{3}{4} m^2\right)$$

$$\cos 2c.nt - 2c'm.nt \qquad e^2\varepsilon'^2 \left\{ \frac{27}{16} + \frac{9}{4} = \frac{63}{16} \right\} m$$

$$\cos 2c.nt + 2c'm.nt \qquad e^2\varepsilon'^2 \left\{ -\frac{27}{16} - \frac{9}{4} = -\frac{63}{16} \right\} m$$

$$\cos 3c.nt - c'm.nt \qquad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{81}{64} + \frac{27}{8} + \frac{27}{4} = \frac{567}{64} \right\} m$$

$$\cos 3c.nt + c'm.nt \qquad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{81}{64} - \frac{27}{8} - \frac{27}{4} = -\frac{567}{64} \right\} m$$

$$\cos 2g.nt - c.nt + c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{81}{32} + \frac{99}{64} - \frac{3}{16} = -\frac{75}{64} \right\} m$$

$$\cos 2g.nt - c.nt - c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{81}{32} - \frac{99}{64} + \frac{3}{16} = \frac{75}{64} \right\} m$$

$$\cos 2g.nt + c.nt + c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{9}{64} - \frac{45}{64} + \frac{9}{16} = 0 \right\} m$$

$$\cos 2g.nt + c.nt - c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{9}{64} + \frac{45}{64} - \frac{9}{16} = 0 \right\} m$$

$$\cos 2E.nt \left(\begin{array}{l} m^2 + \frac{19}{6}m^3 + \frac{15}{4}me^2 + \frac{131}{18}m^4 - \frac{1}{2}m^2\gamma^2 - \frac{5}{2}m^2\varepsilon'^2 \\ + \left(2 + \frac{265}{16} - \frac{27}{4} = \frac{189}{16}\right)m^2e^2 + \frac{383}{27}m^5 - \left(\frac{95}{12} + 12 = \frac{239}{12}\right)m^3\varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{233}{24} + \frac{37337}{768} - \frac{111}{6} + \frac{27}{4} = \frac{11023}{256}\right)m^3e^2 - \frac{3}{128}m\gamma^4 - \frac{29}{24}m^3\gamma^2 \\ - \frac{75}{8}me^2\varepsilon'^2 - \left(\frac{33}{8} - \frac{3}{8} = \frac{15}{4}\right)me^2\gamma^2 - \left(15 - \frac{45}{4} - \frac{45}{16} = \frac{15}{16}\right)me^4 \end{array} \right)$$

$$\cos 2E.nt - c.nt \quad e \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{8}m + \left(\frac{273}{32} - \frac{43}{16} = \frac{187}{32}\right)m^2 + \left(\frac{14035}{512} - \frac{163}{24} = \frac{31673}{1536}\right)m^3 \\ + \left(\frac{45}{16} + \frac{45}{16} - \frac{45}{8} = 0\right)me^2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{32} = \frac{45}{32}\right)m\gamma^2 \\ - \frac{75}{16}m\varepsilon'^2 + \left(\frac{167623}{2048} - \frac{8941}{576} = \frac{1222495}{18432}\right)m^4 \\ + \left(\frac{1527}{128} + \frac{679}{128} - \frac{3011}{128} + \frac{45}{4} + \frac{65}{32} = \frac{895}{128}\right)m^2e^2 \\ - \left(\frac{75}{8} + \frac{85}{32} = \frac{385}{32}\right)m^2\varepsilon'^2 - \left(\frac{273}{32} - \frac{261}{128} = \frac{831}{128}\right)m^2\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt + c.nt \quad e \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{43}{16} - \frac{5}{8} = \frac{33}{16}\right) m^2 + \left(\frac{163}{24} - \frac{23}{48} = \frac{101}{16}\right) m^3 \\ + \left(\frac{135}{16} - \frac{135}{64} = \frac{405}{64}\right) m e^2 + \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{32} = 0\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{8941}{576} - \frac{191}{1152} = \frac{5897}{384}\right) m^4 - \left(\frac{215}{32} - \frac{25}{16} = \frac{165}{32}\right) m^2 \varepsilon'^2 \\ - \left(\frac{261}{128} - \frac{63}{128} = \frac{99}{64}\right) m^2 \gamma^2 \\ + \left(\frac{6213}{128} - \frac{5}{8} - \frac{1109}{256} - \frac{45}{8} - \frac{243}{16} = \frac{5829}{256}\right) m^2 e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt + c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{2} m^2 - \left(\frac{19}{24} + 3 = \frac{91}{24}\right) m^3 - \frac{15}{4} m e^2 \\ - \left(1 + \frac{65}{16} + \frac{63}{8} = \frac{207}{16}\right) m^2 e^2 \\ - \left(\frac{329}{144} + \frac{13}{2} = \frac{1265}{144}\right) m^4 + \frac{1}{4} m^2 \gamma^2 + \frac{1}{16} m^2 \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{2} m^2 + \left(\frac{133}{8} + 3 = \frac{157}{8}\right) m^3 + \frac{35}{4} m e^2 \\ + \left(7 + \frac{885}{16} - \frac{99}{8} = \frac{799}{16}\right) m^2 e^2 \\ + \left(\frac{3037}{48} + \frac{13}{2} = \frac{3349}{48}\right) m^4 - \frac{7}{4} m^2 \gamma^2 - \frac{123}{16} m^2 \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt - 2c.nt \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{15}{4} - \frac{15}{4} = 0\right) m - \left(\frac{207}{16} - \frac{147}{16} = \frac{15}{4}\right) m^2 \\ + \left(\frac{8611}{256} - \frac{11347}{256} - \frac{27}{8} = -\frac{225}{16}\right) m^3 + \left(\frac{45}{8} - \frac{45}{8} = 0\right) m e^2 \\ + \left(\frac{15}{4} - \frac{15}{8} = \frac{15}{8}\right) m \gamma^2 + \left(\frac{75}{8} - \frac{75}{8} = 0\right) m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt + 2c.nt \quad e^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{8} - \frac{29}{8} + \frac{27}{4} = \frac{7}{2}\right) m^2 + \left(\frac{37}{2} - \frac{1}{4} - \frac{103}{24} - \frac{27}{8} = \frac{127}{12}\right) m^3 \\ + \left(20 + \frac{5}{4} - \frac{45}{4} = 10\right) m e^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 0\right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} - \left(1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\right) m^2 + \left(\frac{13}{24} + \frac{1}{48} = \frac{9}{16}\right) m^3 \\ + \frac{3}{32} m \gamma^2 + \left(\frac{75}{16} - \frac{75}{16} = 0\right) m e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt + 2g.nt \quad \gamma^2 \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\right) m^2 + \left(\frac{13}{24} - \frac{13}{24} = 0\right) m^3 + \left(\frac{15}{8} - \frac{15}{8} = 0\right) m e^2 \right\}$$

$$\cos 2E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{8}m - \left(\frac{3}{64} + \frac{47}{32} = \frac{97}{64}\right) m^2 \\ + \left(\frac{17809}{256} - \frac{949}{128} + \frac{129}{32} = \frac{16843}{256}\right) m^3 \\ - \left(\frac{45}{16} + \frac{45}{16} - \frac{15}{4} = \frac{15}{8}\right) m e^2 \\ + \frac{15}{64} m \varepsilon'^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{32} = \frac{45}{32}\right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt + c'm.nt + c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{43}{32} - \frac{5}{16} = \frac{33}{32}\right) m^2 - \left(\frac{383}{128} + \frac{387}{32} - \frac{79}{96} = \frac{5477}{384}\right) m^3 \\ - \left(\frac{45}{16} - \frac{135}{64} = \frac{45}{64}\right) m e^2 + \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{32} = 0\right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt - c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \frac{35}{8} m + \left(\frac{1691}{64} - \frac{211}{32} = \frac{1269}{64}\right) m^2 - \frac{615}{64} m \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{69905}{768} - \frac{3259}{128} - \frac{129}{32} = \frac{47255}{768}\right) m^3 \\ + \left(\frac{105}{16} + \frac{105}{16} - \frac{35}{4} = \frac{35}{8}\right) m e^2 - \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{32} = \frac{105}{32}\right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt - c'm.nt + c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{301}{32} - \frac{35}{16} = \frac{231}{32}\right) m^2 \\ + \left(\frac{4591}{128} + \frac{387}{32} - \frac{103}{32} = \frac{5727}{128}\right) m^3 \\ + \left(\frac{105}{16} - \frac{315}{64} = \frac{105}{64}\right) m e^2 + \left(\frac{7}{32} - \frac{7}{32} = 0\right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt - 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2 \left\{ \frac{17}{2} m^2 + \left(\frac{323}{6} + \frac{51}{4} = \frac{799}{12}\right) m^3 + \frac{255}{16} m e^2 \right\}$$

$$\cos 2E.nt + 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2 \left\{ -\frac{3}{4} m^3 - \frac{45}{16} m e^2 \right\}$$

$$\cos 2E.nt - 3c.nt \quad e^3 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{45}{64} + \frac{45}{16} - \frac{15}{8} = \frac{105}{64}\right) m \\ + \left(\frac{61}{128} + \frac{4673}{768} - \frac{1317}{128} - \frac{45}{8} - \frac{65}{96} = -\frac{7703}{768}\right) m^3 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2E.nt + 3c.nt \quad e^3 \left\{ \frac{341}{96} - \frac{7}{32} - \frac{1885}{128} + \frac{25}{3} = -\frac{1175}{384} \right\} m^2$$

$$\cos 2E.nt - 2g.nt - c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ -\left(\frac{39}{64} + \frac{3}{64} = \frac{21}{32}\right) m - \left(\frac{507}{256} - \frac{199}{256} - \frac{43}{128} = \frac{111}{128}\right) m^2 \right\}$$

$$\cos 2E.nt + 2g.nt - c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ \left(\frac{15}{64} - \frac{15}{64} = 0\right) m + \left(\frac{253}{256} - \frac{841}{256} + \frac{129}{128} = -\frac{165}{128}\right) m^2 \right\}$$

$\cos 2E.nt - 2g.nt + c.nt$	$e\gamma^2$	$\left\{-\left(\frac{51}{64} - \frac{9}{32} = \frac{33}{64}\right) m + \left(\frac{27}{512} + \frac{19}{32} + \frac{43}{128} = \frac{503}{512}\right) m^2\right\}$
$\cos 2E.nt + 2g.nt + c.nt$	$e\gamma^2$	$\left\{- \frac{15}{64} + \frac{245}{128} - \frac{215}{128} = 0\right\} m^2$
$\cos 2E.nt + 3c'm.nt$	ε'^3	$\left(\frac{1}{48} m^2\right)$
$\cos 2E.nt - 3c'm.nt$	ε'^3	$\left(\frac{845}{48} m^2\right)$
$\cos 2E.nt + 2c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon'^2$	$\left\{- \frac{45}{32} m - \left(\frac{6399}{256} - \frac{45}{64} = \frac{6219}{256}\right) m^2\right\}$
$\cos 2E.nt - 2c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon'^2$	$\left\{\frac{255}{32} m + \left(\frac{15639}{256} - \frac{907}{64} = \frac{12011}{256}\right) m^2\right\}$
$\cos 2E.nt - 2c'm.nt + c.nt$	$e\varepsilon'^2$	$\left\{- \frac{85}{16} + \frac{731}{32} = \frac{561}{32}\right\} m^2$
$\cos 2E.nt + c'm.nt - 2c.nt$	$e^2\varepsilon'$	$\left\{\left(\frac{15}{4} - \frac{15}{4} = 0\right) m + \left(\frac{129}{16} - \frac{99}{16} = \frac{15}{8}\right) m^2\right\}$
$\cos 2E.nt - c'm.nt - 2c.nt$	$e^2\varepsilon'$	$\left\{\left(\frac{35}{4} - \frac{35}{4} = 0\right) m - \left(\frac{547}{16} - \frac{337}{16} = \frac{105}{8}\right) m^2\right\}$
$\cos 2E.nt + c'm.nt + 2c.nt$	$e^2\varepsilon'$	$\left\{- \frac{3}{16} + \frac{29}{16} - \frac{27}{8} = - \frac{7}{2}\right\} m^2$
$\cos 2E.nt - c'm.nt + 2c.nt$	$e^2\varepsilon'$	$\left\{\frac{21}{16} - \frac{203}{16} + \frac{189}{8} = \frac{49}{4}\right\} m^2$
$\cos 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}\right\} m^2$
$\cos 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{\frac{7}{8} m - \left(\frac{7}{4} - \frac{7}{8} = \frac{7}{8}\right) m^2\right\}$
$\cos 2E.nt + c'm.nt + 2g.nt$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{- \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0\right\} m^2$
$\cos 2E.nt - c'm.nt + 2g.nt$	$\varepsilon'\gamma^2$	$\left\{\frac{7}{8} - \frac{7}{8} = 0\right\} m^2$
$\cos 2E.nt - 2c'm.nt - 2c.nt$	$e^2\varepsilon'^2$	$\left\{\frac{255}{16} - \frac{255}{16} = 0\right\} m$
$\cos 2E.nt + 2c'm.nt - 2c.nt$	$e^2\varepsilon'^2$	$\left\{- \frac{45}{16} + \frac{45}{16} = 0\right\} m$
$\cos 2E.nt - 2c'm.nt - 2g.nt$	$\varepsilon'^2\gamma^2$	$\left(\frac{51}{32} m\right)$

$\cos 2E.nt + 2g.nt - 2c.nt \qquad e^2\gamma^2 \left\{ -\frac{105}{32} + \frac{15}{16} = -\frac{75}{32} \right\} m$

$\cos 2E.nt - 2g.nt - 2c.nt \qquad e^2\gamma^2 \left\{ -\frac{27}{16} + \frac{3}{8} = -\frac{21}{16} \right\} m$

$\cos 2E.nt - 2g.nt + 2c.nt \qquad e^2\gamma^2 \left\{ -\frac{51}{32} + \frac{9}{16} = -\frac{33}{32} \right\} m$

$\cos 2E.nt - 4c.nt \qquad e^4 \left\{ \frac{15}{16} - 5 = -\frac{55}{16} \right\} m$

$\cos 2E.nt - 4g.nt \qquad \gamma^4 \left(-\frac{3}{128} m \right)$

$\cos 2E.nt + c'm.nt - 3c.nt \qquad e^3\varepsilon' \left\{ -\frac{15}{8} + \frac{45}{64} + \frac{45}{8} = \frac{285}{64} \right\} m$

$\cos 2E.nt - c'm.nt - 3c.nt \qquad e^3\varepsilon' \left\{ \frac{35}{8} - \frac{105}{64} - \frac{105}{16} = -\frac{245}{64} \right\} m$

$\cos 2E.nt + 3c'm.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'^3 \left(-\frac{5}{64} m \right)$

$\cos 2E.nt - 3c'm.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'^3 \left(\frac{845}{64} m \right)$

$\cos 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{51}{64} - \frac{9}{32} = \frac{33}{64} \right\} m$

$\cos 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{91}{64} + \frac{21}{32} = -\frac{49}{64} \right\} m$

$\cos 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{39}{64} + \frac{3}{64} = \frac{21}{32} \right\} m$

$\cos 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{63}{64} - \frac{7}{64} = -\frac{35}{32} \right\} m$

$\cos 2E.nt + c'm.nt + 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ -\frac{15}{64} + \frac{15}{64} = 0 \right\} m$

$\cos 2E.nt - c'm.nt + 2g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma^2 \left\{ \frac{35}{64} - \frac{35}{64} = 0 \right\} m$

$$\cos E.nt \qquad b^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{16} m - \frac{81}{16} m^2 - \left(\frac{3251}{128} - \frac{645}{256} = \frac{5857}{256} \right) m^3 + \frac{165}{64} m\gamma^2 \\ -\left(\frac{105}{32} + \frac{45}{16} - \frac{45}{16} = \frac{105}{32} \right) m e^2 - \left(\frac{45}{16} - \frac{15}{8} = \frac{15}{16} \right) m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$\cos E.nt - c.nt \qquad eb^2 \left\{ \left(\frac{15}{8} - \frac{15}{8} = 0 \right) m + \left(\frac{861}{64} - \frac{681}{64} = \frac{45}{16} \right) m^2 \right\}$

$\cos E.nt + c.nt$	$eb^2 \left\{ -\frac{15}{8}m - \left(\frac{9}{8} + \frac{159}{16} = \frac{177}{16}\right) m^2 \right\}$
$\cos E.nt + c'm.nt$	$\varepsilon' b^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{4} - \frac{45}{8}m + \left(\frac{6403}{192} + \frac{45}{32} = \frac{6673}{192}\right) m^2 \\ + \left(5 + \frac{5}{2} - \frac{5}{4} = \frac{25}{4}\right) e^2 - \frac{5}{8}\gamma^2 + \frac{5}{4}\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$
$\cos E.nt - c'm.nt$	$\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{15}{16}m - \left(\frac{21}{2} + \frac{305}{32} = \frac{641}{32}\right) m^2 \right\}$
$\cos E.nt - 2c.nt$	$e^2 b^2 \left\{ -\frac{15}{64} + \frac{285}{128} + \frac{45}{32} = \frac{435}{128} \right\} m$
$\cos E.nt + 2c.nt$	$e^2 b^2 \left\{ \frac{135}{128} - \frac{135}{32} = -\frac{405}{128} \right\} m$
$\cos E.nt - 2g.nt$	$\gamma^2 b^2 \left\{ \frac{195}{128} - \frac{15}{128} = \frac{45}{32} \right\} m$
$\cos E.nt + 2g.nt$	$\gamma^2 b^2 \left\{ -\frac{15}{128} + \frac{15}{128} = 0 \right\} m$
$\cos E.nt + 2c'm.nt$	$\varepsilon'^2 b^2 \left\{ -\frac{15}{128} - \frac{15}{8} = -\frac{255}{128} \right\} m$
$\cos E.nt - 2c'm.nt$	$\varepsilon'^2 b^2 \left(\frac{435}{128} m \right)$
$\cos E.nt + c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left\{ \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0\right) + \left(\frac{45}{4} - \frac{45}{4} = 0\right) m \right\}$
$\cos E.nt - c'm.nt - c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left\{ \frac{105}{16} - \frac{105}{16} = 0 \right\} m$
$\cos E.nt + c'm.nt + c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{45}{4} m \right)$
$\cos E.nt - c'm.nt + c.nt$	$e\varepsilon' b^2 \left(\frac{15}{8} m \right)$
$\cos E.nt + c'm.nt - 2c.nt$	$e^2\varepsilon' b^2 \left(-\frac{5}{16} - \frac{35}{32} - \frac{5}{8} = -\frac{65}{32} \right)$
$\cos E.nt + c'm.nt + 2c.nt$	$e^2\varepsilon' b^2 \left(-\frac{45}{32} + \frac{15}{8} = \frac{15}{32} \right)$
$\cos E.nt + c'm.nt - 2g.nt$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2 \left(-\frac{55}{96} + \frac{5}{32} = -\frac{5}{12} \right)$
$\cos E.nt + c'm.nt + 2g.nt$	$\varepsilon'\gamma^2 b^2 \left(\frac{5}{32} - \frac{5}{32} = 0 \right)$

$\cos 3E.nt \quad b^2 \left\{ \frac{25}{64} m^2 + \left(\frac{415}{256} - \frac{645}{256} = -\frac{115}{128} \right) m^3 \right\}$

$\cos 3E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' b^2 \left(\frac{125}{64} m^2 \right)$

$\cos 3E.nt + c'm.nt \quad \varepsilon' b^2 \left\{ -\frac{75}{64} + \frac{215}{64} = \frac{35}{16} \right\} m^2$

$\cos 3E.nt - c.nt \quad e b^2 \left\{ -\frac{5}{2} - \frac{315}{64} = -\frac{475}{64} \right\} m^2$

$\cos 3E.nt + c.nt \quad e b^2 \left\{ -\frac{15}{32} + \frac{45}{32} = \frac{15}{16} \right\} m^2$

$\cos 3E.nt - 2c.nt \quad e^2 b^2 \left(-\frac{175}{64} m \right)$

$\cos 3E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2 b^2 \left(-\frac{25}{64} m \right)$

$\cos 3E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' b^2 \left(\frac{75}{16} m \right)$

$$\cos 4E.nt \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{11}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \right) m^4 + \left(\frac{379}{48} - \frac{351}{160} = \frac{2737}{480} \right) m^5 \\ + \left(\frac{45}{32} - \frac{1095}{64} + 15 = -\frac{45}{64} \right) m^3 e^2 + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0 \right) m^3 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 4E.nt - c.nt \quad e \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{645}{128} - \frac{75}{64} = \frac{495}{128} \right) m^3 + \left(\frac{45}{256} - \frac{45}{256} = 0 \right) m^2 \gamma^2 \\ + \left(\frac{9315}{256} - \frac{1215}{256} - \frac{2475}{512} = \frac{13725}{512} \right) m^4 \\ + \left(\frac{2025}{128} - \frac{2025}{512} = \frac{6075}{512} \right) m^2 e^2 \end{array} \right\}$$

$\cos 4E.nt + c.nt \quad e \left\{ \frac{119}{128} - \frac{2991}{512} + \frac{4125}{512} = \frac{805}{256} \right\} m^4$

$\cos 4E.nt + c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ \frac{1}{2} - \frac{11}{8} = -\frac{7}{8} \right\} m^4$

$\cos 4E.nt - c'm.nt \quad \varepsilon' \left\{ -\frac{7}{2} + \frac{77}{8} = \frac{49}{8} \right\} m^4$

$\cos 4E.nt - 2c.nt \quad e^2 \left\{ \frac{225}{64} m^2 + \left(\frac{15}{4} + \frac{4785}{128} - \frac{405}{32} = \frac{3645}{128} \right) m^3 \right\}$

$\cos 4E.nt - 2g.nt \quad \gamma^2 \left\{ \frac{9}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{8} \right\} m^3$

$\cos 4E.nt + c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ \frac{225}{128} - \frac{1935}{256} = - \frac{1485}{256} \right\} m^3$

$\cos 4E.nt - c'm.nt - c.nt \quad e\varepsilon' \left\{ - \frac{875}{128} + \frac{7525}{256} = \frac{5775}{256} \right\} m^3$

$\cos 4E.nt - 3c.nt \quad e^3 \left\{ \frac{675}{256} + \frac{2025}{512} - \frac{675}{128} = \frac{675}{512} \right\} m^2$

$\cos 4E.nt - 2g.nt - c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ - \frac{99}{512} + \frac{279}{512} = \frac{45}{128} \right\} m^2$

$\cos 4E.nt - 2g.nt + c.nt \quad e\gamma^2 \left\{ \frac{9}{512} - \frac{9}{512} = 0 \right\} m^2$

$\cos 4E.nt + c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left(- \frac{225}{32} m^2 \right)$

$\cos 4E.nt - c'm.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon' \left(\frac{525}{32} m^2 \right).$

64. En réduisant cette formule en nombres on trouvera

Parallaxe équatoriale de la Lune en fonction du temps =

$$\frac{a u (1+p)(1+\tfrac{1}{3}K_{(2)})}{\sqrt{1+ss}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4D(1-\tfrac{4}{3}\Psi)}{L'(1+i)\,T^2}} =$$

$\cos 0.nt \quad \left\{ \begin{array}{l} +3420'',0667\,(1) + 3'',1894\,(3) - 0'',0939\,(5) \\ -0'',0088\,(6) - 0'',01244\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\} = +3423'',1534$

$\cos c.nt \quad \left\{ \begin{array}{l} +187'',5428\,(2) - 0'',2759\,(4) - 0'',3944\,(5) \\ -0'',2180\,(6) - 0'',01244\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\} = +\ 186'',6545$

$\cos 2c.nt \quad \{ +10'',2885\,(3) - 0'',0136\,(5) - 0'',0162\,(6) \} = +\ 10'',2587$

$\cos 3c.nt \quad \{ +0'',6348\,(4) - 0'',0008\,(6) \} = +\ 0'',6340$

$\cos 4c.nt \quad \{ +0'',0413\,(5) \} = +\ 0'',0413$

$\cos 5c.nt \quad \{ +0'',0028\,(6) \} = +\ 0'',0028$

$\cos 2g.nt \quad \{ -0'',0267\,(5) + 0'',0108\,(6) \} = -\ 0'',0159$

$\cos 2g.nt - c.nt$	$\{+0'',9509\,(4) + 0'',2428\,(6)\}$	$= +1'',1937$
$\cos 2g.nt + c.nt$	$\{-0'',0008\,(6)\}$	$= -0'',0008$
$\cos 2g.nt + 2c.nt$	$\{+0'',0104\,(5)\}$	$= +0'',0104$
$\cos 2g.nt - 3c.nt$	$\{-0'',0715\,(6)\}$	$= -0'',0715$
$\cos c'm.nt$	$\{-0'',4826\,(4) + 0'',0542\,(6)\}$	$= -0'',4284$
$\cos 2c'm.nt$	$\{-0'',0122\,(5)\}$	$= -0'',0122$
$\cos 3c'm.nt$	$\{-0'',0003\,(6)\}$	$= -0'',0003$
$\cos c.nt + c'm.nt$	$\{-0'',6193\,(4) - 0'',2308\,(5) - 0'',0691\,(6)\}$	$= -0'',9192$
$\cos c.nt - c'm.nt$	$\{+0'',6193\,(4) + 0'',3069\,(5) + 0'',1337\,(6)\}$	$= +1'',0599$
$\cos c.nt + 2c'm.nt$	$\{-0'',0079\,(5) - 0'',0023\,(6)\}$	$= -0'',0102$
$\cos c.nt - 2c'm.nt$	$\{+0'',0079\,(5) + 0'',0054\,(6)\}$	$= +0'',0133$
$\cos c.nt + 3c'm.nt$	$\{-0'',00006\,(6)\}$	$= -0'',00006$
$\cos c.nt - 3c'm.nt$	$\{+0'',00006\,(6)\}$	$= +0'',00006$
$\cos 2c.nt + c'm.nt$	$\{-0'',0679\,(5) - 0'',0119\,(6)\}$	$= -0'',0798$
$\cos 2c.nt - c'm.nt$	$\{+0'',0679\,(5) + 0'',0176\,(6)\}$	$= +0'',0855$
$\cos 2g.nt + c'm.nt$	$\{+0'',0196\,(6)\}$	$= +0'',0196$
$\cos 2g.nt - c'm.nt$	$\{+0'',0196\,(6)\}$	$= +0'',0196$
$\cos 2c.nt - 2c'm.nt$	$\{+0'',00008\,(6)\}$	$= +0'',00008$
$\cos 2c.nt + 2c'm.nt$	$\{-0'',00008\,(6)\}$	$= -0'',00008$
$\cos 3c.nt - c'm.nt$	$\{+0'',0063\,(6)\}$	$= +0'',0063$
$\cos 3c.nt + c'm.nt$	$\{-0'',0063\,(6)\}$	$= -0'',0063$
$\cos 2g.nt - c.nt + c'm.nt$	$\{-0'',0022\,(6)\}$	$= -0'',0022$
$\cos 2g.nt - c.nt - c'm.nt$	$\{+0'',0022\,(6)\}$	$= +0'',0022$

$\cos 2E.nt$	$\left\{\begin{array}{l}+19'',1361\,(3)+6'',8251\,(4)\\+1'',3681\,(5)+0'',2640\,(6)\end{array}\right\}$	$=+27'',5933$
$\cos 2E.nt-c.nt$	$\left\{\begin{array}{l}+26'',3089\,(3)+6'',1321\,(4)\\+1'',4400\,(5)+0'',0404\,(6)\end{array}\right\}$	$=+33'',9214$
$\cos 2E.nt+c.nt$	$\{+2'',1647(4)+0'',7627(5)+0'',1481(6)\}$	$=+\ 3'',0755$
$\cos 2E.nt+c'm.nt$	$\{-0'',1609(4)-0'',3462(5)-0'',0376(6)\}$	$=-\ 0'',5447$
$\cos 2E.nt-c'm.nt$	$\{+1'',1263(4)+0'',5855(5)+0'',4528(6)\}$	$=+\ 2'',1646$
$\cos 2E.nt-2c.nt$	$\{+0'',2159\,(5)-0'',0489\,(6)\}$	$=+\ 0'',1670$
$\cos 2E.nt+2c.nt$	$\{+0'',2015\,(5)+0'',0687\,(6)\}$	$=+\ 0'',2702$
$\cos 2E.nt-2g.nt$	$\{-0'',1164\,(5)+0'',080\,(6)\}$	$=-\ 0'',1084$
$\cos 2E.nt+c'm.nt-c.nt$	$\left\{\begin{array}{l}-0'',4423\,(4)-0'',0268\,(5)\\+0'',0888\,(6)\end{array}\right\}$	$=-\ 0'',3803$
$\cos 2E.nt+c'm.nt+c.nt$	$\{-0'',0182\,(5)+0'',0168\,(6)\}$	$=-\ 0'',0014$
$\cos 2E.nt-c'm.nt-c.nt$	$\left\{\begin{array}{l}+1'',0322\,(4)+0'',3390\,(5)\\+0'',0774\,(6)\end{array}\right\}$	$=+\ 1'',4486$
$\cos 2E.nt-c'm.nt+c.nt$	$\{+0'',1274\,(5)+0'',0603\,(6)\}$	$=+\ 0'',1877$
$\cos 2E.nt-2c'm.nt$	$\{+0'',0460\,(5)+0'',0062\,(6)\}$	$=+\ 0',0522$
$\cos 2E.nt+2c'm.nt$	$\{-0'',0012\,(6)\}$	$=-\ 0'',0012$
$\cos 2E.nt-3c.nt$	$\{-0'',0693\,(5)-0'',0317\,(6)\}$	$=-\ 0'',1010$
$\cos 2E.nt+3c.nt$	$\{-0'',0097\,(6)\}$	$=-\ 0'',0097$
$\cos 2E.nt-2g.nt-c.nt$	$\{-0'',0747\,(5)-0'',0074\,(6)\}$	$=-\ 0'',0821$
$\cos 2E.nt+2g.nt-c.nt$	$\{-0'',0110\,(6)\}$	$=-\ 0'',0110$
$\cos 2E.nt-2g.nt+c.nt$	$\{-0'',0587\,(5)+0'',0084\,(6)\}$	$=-\ 0'',0503$
$\cos 2E.nt+3c'm.nt$	$\{+0'',000003\,(6)\}$	$=+\ 0'',000003$
$\cos 2E.nt-3c'm.nt$	$\{-0'',0016\,(6)\}$	$=+\ 0'',0016$

$\cos 2E.nt + 2c'm.nt - c.nt$	$\{-0'',0056\,(5) - 0'',0072\,(6)\}$	$= -0'',0128$
$\cos 2E.nt - 2c'm.nt - c.nt$	$\{+0'',0316\,(5) + 0'',0139\,(6)\}$	$= +0'',0455$
$\cos 2E.nt - 2c'm.nt + c.nt$	$\{+0'',0052\,(6)\}$	$= +0'',0052$
$\cos 2E.nt + c'm.nt - 2c.nt$	$\{+0'',0018\,(6)\}$	$= +0'',0018$
$\cos 2E.nt - c'm.nt - 2c.nt$	$\{+0'',0127\,(6)\}$	$= +0'',0127$
$\cos 2E.nt + c'm.nt + 2c.nt$	$\{-0'',0034\,(6)\}$	$= -0'',0034$
$\cos 2E.nt - c'm.nt + 2c.nt$	$\{+0'',0119\,(6)\}$	$= +0'',0119$
$\cos 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt$	$\{+0'',0010\,(6)\}$	$= +0'',0010$
$\cos 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt$	$\{+0'',0305\,(5) - 0'',0023\,(6)\}$	$= +0'',0282$
$\cos 2E.nt - 2c'm.nt - 2g.nt$	$\{+0'',0012\,(6)\}$	$= +0'',0012$
$\cos 2E.nt + 2g.nt - 2c.nt$	$\{-0'',0146\,(6)\}$	$= -0'',0146$
$\cos 2E.nt - 2g.nt - 2c.nt$	$\{-0'',0082\,(6)\}$	$= -0'',0082$
$\cos 2E.nt - 2g.nt + 2c.nt$	$\{-0'',0064\,(6)\}$	$= -0'',0064$
$\cos 2E.nt - 4c.nt$	$\{-0'',0063\,(6)\}$	$= -0'',0063$
$\cos 2E.nt - 4g.nt$	$\{-0'',0004\,(6)\}$	$= -0'',0004$
$\cos 2E.nt + c'm.nt - 3c.nt$	$\{+0'',0031\,(6)\}$	$= +0'',0031$
$\cos 2E.nt - c'm.nt - 3c.nt$	$\{-0'',0027\,(6)\}$	$= -0'',0027$
$\cos 2E.nt + 3c'm.nt - c.nt$	$\{-0'',000006\,(6)\}$	$= -0'',000006$
$\cos 2E.nt - 3c'm.nt - c.nt$	$\{+0'',0009\,(6)\}$	$= +0'',0009$
$\cos 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt + c.nt$	$\{+0'',0010\,(6)\}$	$= +0'',0010$
$\cos 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt + c.nt$	$\{-0'',0015\,(6)\}$	$= -0'',0015$
$\cos 2E.nt + c'm.nt - 2g.nt - c.nt$	$\{+0'',0013\,(6)\}$	$= +0'',0013$
$\cos 2E.nt - c'm.nt - 2g.nt - c.nt$	$\{-0'',0022\,(6)\}$	$= -0'',0022$

$\cos E.nt$	$\{-0'',6045(4)-0'',2442(5)-0'',0757(6)\}$	$=-0'',9247$
$\cos E.nt-c.nt$	$\{+0'',0744(6)\}$	$=+0'',0744$
$\cos E.nt+c.nt$	$\{-0'',0663(5)-0'',0293(6)\}$	$=-0'',0956$
$\cos E.nt+c'm.nt$	$\{+0'',1812(4)-0'',0610(5)+0'',0317(6)\}$	$=+0'',1519$
$\cos E.nt-c'm.nt$	$\{+0'',0102(5)-0'',0081(6)\}$	$=+0'',0021$
$\cos E.nt-2c.nt$	$\{+0'',0660(6)\}$	$-+0'',0660$
$\cos E.nt+2c.nt$	$\{-0'',0614(6)\}$	$=-0'',0614$
$\cos E.nt-2g.nt$	$\{+0'',0074(6)\}$	$=+0'',0074$
$\cos E.nt+2c'm.nt$	$\{-0'',0004(6)\}$	$=-0'',0004$
$\cos E.nt-2c'm.nt$	$\{+0'',0006(6)\}$	$=+0'',0006$
$\cos E.nt+c'm.nt+c.nt$	$\{+0'',0199(5)-0'',0067(6)\}$	$=+0'',0132$
$\cos E.nt-c'm.nt+c.nt$	$\{+0'',0011(6)\}$	$=+0'',0011$
$\cos E.nt+c'm.nt-2c.nt$	$\{-0'',0008(6)\}$	$=-0'',0008$
$\cos E.nt+c'm.nt+2c.nt$	$\{+0'',0002(6)\}$	$=+0'',0002$
$\cos E.nt+c'm.nt-2g.nt$	$\{-0'',0005(6)\}$	$=-0'',0005$
$\cos 3E.nt$	$\{+0'',0188(5)-0'',0041(6)\}$	$=+0'',0147$
$\cos 3E.nt-c'm.nt$	$\{+0'',0016(6)\}$	$=+0'',0016$
$\cos 3E.nt+c'm.nt$	$\{+0'',0018(6)\}$	$=-0'',0018$
$\cos 3E.nt-c.nt$	$\{-0'',0196(6)\}$	$=-0'',0196$
$\cos 3E.nt+c.nt$	$\{+0'',0025(6)\}$	$=+0'',0025$
$\cos 3E.nt-2c.nt$	$\{-0'',0053(6)\}$	$=-0'',0053$
$\cos 3E.nt-2g.nt$	$\{-0'',0020(6)\}$	$=-0'',0020$

$\cos 3E.nt+c'm.nt-c.nt$	$\{+0'',0028\,(6)\}$	$=-0'',0028$
$\cos 4E.nt$	$\{+0'',0938\,(5)+0'',0427\,(6)\}$	$=+0'',1365$
$\cos 4E.nt-c.nt$	$\{+0'',3036\,(5)+0'',1949\,(6)\}$	$=+0'',4985$
$\cos 4E.nt+c.nt$	$\{+0'',0185\,(6)\}$	$=+0'',0185$
$\cos 4E.nt+c'm.nt$	$\{-0'',0018\,(6)\}$	$=-0'',0018$
$\cos 4E.nt-c'm.nt$	$\{+0'',0112\,(6)\}$	$=+0'',0112$
$\cos 4E.nt-2c.nt$	$\{+0'',2024\,(5)+0'',1226\,(6)\}$	$=+0'',3250$
$\cos 4E.nt-2g.nt$	$\{+0'',0044\,(6)\}$	$=+0'',0044$
$\cos 4E.nt+c'm.nt-c.nt$	$\{-0'',0076\,(6)\}$	$=+0'',0076$
$\cos 4E.nt-c'm.nt-c.nt$	$\{+0'',0298\,(6)\}$	$=-0'',0298$
$\cos 4E.nt-3c.nt$	$\{+0'',0042\,(6)\}$	$=+0'',0042$
$\cos 4E.nt-2g.nt-c.nt$	$\{+0'',0011\,(6)\}$	$=+0'',0011$
$\cos 4E.nt+c'm.nt-2c.nt$	$\{-0'',0068\,(6)\}$	$=-0'',0068$
$\cos 4E.nt-c'm.nt-2c.nt$	$\{+0'',0159\,(6)\}$	$=+0'',0159.$

§ 8.

Expression de la Latitude de la Lune en fonction explicite du temps.

65. En désignant par L la latitude de la Lune, nous avons donné son expression en fonction de la longitude vraie dans les pages 496-501 de ce Volume. Maintenant, qu'il s'agit d'exprimer cette même latitude par le temps, il n'y a qu'à former les différens termes de la série

$$L - F(v) \times \frac{dL}{dv} + \frac{1}{1.2} \frac{d.}{dv} \left\{ \overline{F(v)}^2 \times \frac{dL}{dv} \right\}$$
$$- \frac{1}{1.2.3} \frac{d^2.}{dv^2} \left\{ \overline{F(v)}^3 \times \frac{dL}{dv} \right\} + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{d^3.}{dv^3} \left\{ \overline{F(v)}^4 \times \frac{dL}{dv} \right\},$$

et à changer v en $nt + \varepsilon - \int \zeta dv$, après la différentiation. C'est une opération tout-à-fait analogue à celle qu'on vient de faire pour la parallaxe. Seulement il est nécessaire d'avertir que, nous conservons dans ce calcul plusieurs termes d'un ordre supérieur au cinquième, semblables à ceux qu'on voit dans l'expression de L en fonction de v. Après cela, la simple disposition des développemens suivans suffit pour expliquer leur formation.

$$-F(v) \times \frac{dL}{dv} =$$

$$\sin gv\,\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{8}\gamma^2 + \frac{33}{128}m^3 + \left(\frac{59}{64} - \frac{231}{512} = \frac{241}{512}\right)m^4 + \left(2 - \frac{135}{256} = \frac{377}{512}\right)m^2e^2 \\ + \left(\frac{27}{16} + \frac{27}{16} = \frac{27}{8}\right)m^2\varepsilon'^2 + \left(\frac{11}{32} - \frac{3}{32} - \frac{9}{256} - \frac{27}{256} = \frac{7}{64}\right)m^2\gamma^2 \\ + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}\right)\gamma^4 - \frac{15}{16}e^4 + \frac{15}{32}e^2\gamma^2 \\ + \left(\frac{9}{256} + \frac{63}{1024} - \frac{33}{256} - \frac{141}{1024} - \frac{33}{256} + \frac{33}{128} + \frac{189}{1024} = \frac{147}{1024}\right)m^3\gamma^2 \\ + \left(\frac{893}{384} - \frac{413}{256} - \frac{5643}{8192} = \frac{577}{24576}\right)m^5 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1809}{1024} - \frac{945}{1024} - \frac{33}{64} = \frac{69}{64}\right)m^3e^2 \\ - \left(\frac{165}{256} + \frac{165}{256} - \frac{9}{128} + \frac{243}{128} - \frac{33}{256} - \frac{539}{256} = \frac{113}{128}\right)m^3\varepsilon'^2 - \frac{405}{256}me^2\gamma^2 + \frac{405}{512}me^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin gv + cv \quad e\gamma \left\{ \begin{aligned} & 1+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\right)m^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\right)\gamma^2+\left(\frac{45}{64}-\frac{9}{32}-\frac{3}{8}=\frac{3}{64}\right)m^3 \\ & -\left(\frac{273}{128}-\frac{9}{16}+\frac{637}{256}+\frac{119}{128}-\frac{21}{32}=\frac{1109}{256}\right)m^4+\frac{5}{48}e^4 \\ & -\left(\frac{9797}{2048}+\frac{27}{128}-\frac{135}{256}+\frac{6461}{3072}-\frac{833}{512}-\frac{513}{512}=\frac{24217}{6144}\right)m^5 \\ & -\left(\frac{297}{64}-\frac{3}{2}+\frac{45}{32}-\frac{45}{128}-\frac{225}{128}=\frac{39}{16}\right)m^2e^2+\left(\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}\right)m^2E'^2 \\ & +\left(\frac{81}{64}+\frac{81}{64}=\frac{81}{32}\right)m^2\varepsilon'^2+\left(\frac{9}{8}+\frac{21}{8}=\frac{15}{4}\right)m^2(\varepsilon'^2-E'^2) \\ & -\left(\frac{81}{128}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{297}{256}-\frac{3}{32}+\frac{1}{4}-\frac{9}{256}+\frac{27}{512}=\frac{1199}{512}\right)m^2\gamma^2 \\ & -\left(\frac{15}{32}-\frac{15}{32}+\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}\right)e^2\gamma^2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\frac{3}{32}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}\right)\gamma^4 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin gv - cv \quad e\gamma \left\{ \begin{aligned} & -1-\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{45}{64}=\frac{51}{64}\right)m^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0\right)\gamma^2 \\ & +\frac{5}{8}e^2+\left(\frac{9}{32}-\frac{45}{64}+\frac{855}{256}-\frac{315}{256}=\frac{27}{16}\right)m^3-\frac{135}{64}me^2+\frac{135}{64}m\gamma^2 \\ & +\left(\frac{273}{128}-\frac{9}{16}+\frac{637}{256}+\frac{52041}{4096}-\frac{5985}{1024}-\frac{7695}{4096}+\frac{11}{8}=\frac{21331}{2048}\right)m^4 \\ & +\left\{ \begin{aligned} & \frac{9797}{2048}+\frac{27}{128}-\frac{135}{256}+\frac{672197}{16384}-\frac{364287}{16384} \\ & -\frac{146205}{16384}-\frac{28365}{16384}+\frac{59}{12}+\frac{77}{192}+\frac{165}{64}=\frac{251923}{12288} \end{aligned} \right\} m^5 \\ & +\left(\frac{297}{64}-\frac{1379}{512}-\frac{45}{128}+\frac{45}{32}-\frac{225}{512}-\frac{3}{2}+\frac{15}{32}=\frac{49}{32}\right)m^2e^2 \\ & -\left(\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}\right)m^2E'^2-\left(\frac{9}{8}+\frac{21}{8}=\frac{15}{4}\right)m^2(\varepsilon'^2-E'^2) \\ & +\left(\frac{81}{64}+\frac{81}{64}-\frac{225}{128}-\frac{225}{128}+\frac{45}{64}+\frac{245}{64}=\frac{227}{64}\right)m^2\varepsilon'^2 \\ & +\left(\frac{81}{128}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{297}{256}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}-\frac{63}{128}-\frac{45}{128}+\frac{153}{512}+\frac{1331}{512}=\frac{921}{256}\right)m^2\gamma^2 \\ & +\left(\frac{55}{64}+\frac{25}{64}-\frac{15}{32}-\frac{5}{32}=\frac{5}{8}\right)e^2\gamma^2-\frac{5}{32}e^4 \\ & -\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}\right)\gamma^4 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 3gv \qquad \gamma^3\left\{-\frac{1}{8}+\left(\frac{11}{32}-\frac{3}{32}=\frac{1}{4}\right)m^2+\frac{15}{32}e^2+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}=\frac{5}{64}\right)\gamma^2\right\}$$

$\sin 5gv \qquad \gamma^5\left(-\frac{1}{64}-\frac{1}{32}=-\frac{3}{64}\right)$

$\sin gv+2cv \quad e\gamma^2\left\{-\frac{3}{8}-\left(\frac{9}{32}+\frac{1}{32}+2=\frac{37}{16}\right)m^2-\frac{1}{16}e^2-\left(\frac{5}{64}+\frac{3}{32}-\frac{1}{32}-\frac{3}{32}=\frac{3}{64}\right)\gamma^2\right\}$

$\sin gv-2cv \quad e^2\gamma\left\{\ \frac{3}{8}+\left(\frac{9}{32}+\frac{1}{32}+\frac{135}{256}=\frac{215}{256}\right)m^2+\frac{1}{16}e^2-\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{32}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}\right)\gamma^2\right\}$

$\sin gv+3cv \quad e^3\gamma\left(\ \frac{1}{6}\right)$

$\sin gv-3cv \quad e^3\gamma\left\{-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{8}=\frac{19}{24}\right)+\frac{135}{64}m\right\}$

$\sin gv+4cv \quad e^4\gamma\left(-\frac{5}{64}\right)$

$\sin gv-4cv \quad e^4\gamma\left(\ \frac{5}{64}+\frac{15}{64}=\frac{5}{16}\right)$

$$\sin 3gv-cv \quad e\gamma^3\left\{\begin{array}{l}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right)+\frac{135}{64}m-\left(\frac{1331}{512}-\frac{3}{8}-\frac{15}{32}-\frac{3}{16}+\frac{45}{512}=\frac{53}{32}\right)m^2\\+\left(\frac{55}{64}+\frac{5}{64}=\frac{15}{16}\right)e^2+\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{32}-\frac{9}{128}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{27}{128}\right)\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$\sin 3gv+cv \quad e\gamma^3\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{3}{32}-\frac{1}{4}+\frac{15}{32}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right)m^2\\-\frac{5}{16}e^2-\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{32}-\frac{3}{128}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{45}{128}\right)\gamma^2\end{array}\right\}$$

$\sin 3gv-2cv \quad e^2\gamma^3\left(\ \frac{1}{16}+\frac{3}{32}-\frac{5}{64}=\frac{5}{64}\right)$

$\sin 3gv+2cv \quad e^2\gamma^3\left(-\frac{3}{32}-\frac{3}{32}=-\frac{3}{16}\right)$

$$\sin gv+c'mv \quad \varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{2}m+\left(\frac{735}{32}-\frac{9}{8}-\frac{33}{256}+\frac{77}{128}=\frac{5713}{256}\right)m^3\\+\left(\frac{3}{8}+\frac{27}{16}-\frac{9}{32}+\frac{9}{64}=\frac{123}{64}\right)m\gamma^2-\frac{27}{16}me^2-\frac{27}{16}m\varepsilon'^2\\+\left(\frac{1261}{8}+\frac{27}{64}-\frac{59}{256}+\frac{231}{1024}+\frac{413}{192}-\frac{1133}{1024}=\frac{244357}{1536}\right)m^4\end{array}\right\}$$

$$\sin gv-c'mv \quad \varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}m-\left(\frac{735}{32}-\frac{9}{8}-\frac{231}{256}+\frac{33}{128}=\frac{5427}{256}\right)m^3+\frac{27}{16}me^2\\-\left(\frac{27}{16}-\frac{9}{32}+\frac{9}{64}+\frac{3}{8}=\frac{123}{64}\right)m\gamma^2+\frac{27}{16}m\varepsilon'^2\\-\left(\frac{1261}{8}+\frac{27}{64}-\frac{1239}{256}+\frac{1617}{1024}+\frac{59}{64}+\frac{363}{1024}=\frac{2497}{16}\right)m^4\end{array}\right\}$$

$$\sin gv + 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\gamma\left(-\frac{9}{8}m - \frac{27}{16}m^2\right)$$

$$\sin gv - 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\gamma\left(\frac{9}{8}m - \frac{27}{16}m^2\right)$$

$$\sin gv + 3c'mv \qquad \varepsilon'^3\gamma\left(-\frac{53}{48}m\right)$$

$$\sin gv - 3c'mv \qquad \varepsilon'^3\gamma\left(\frac{53}{48}m\right)$$

$$\sin 3gv - c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^3\left\{\frac{9}{32} + \frac{3}{8} + \frac{9}{64} = \frac{51}{64}\right\}m$$

$$\sin 3gv + c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^3\left\{-\frac{9}{32} - \frac{3}{8} - \frac{9}{64} = -\frac{51}{64}\right\}m$$

$$\sin gv + cv + c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{8} = 0\right)m - \left(\frac{621}{64} - \frac{3}{64} = \frac{309}{32}\right)m^2 \\ -\left(\frac{18135}{256} + \frac{27}{32} - 3 - \frac{3}{16} + \frac{7}{8} + \frac{1035}{256} - \frac{27}{32} = \frac{9289}{128}\right)m^3\end{array}\right\}$$

$$\sin gv - cv - c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}\right)m + \left(\frac{621}{64} - \frac{81}{64} - \frac{45}{64} + \frac{105}{64} = \frac{75}{8}\right)m^2 \\ + \left\{\begin{array}{l}\frac{18135}{256} + \frac{27}{32} + \frac{5325}{512} - \frac{735}{256} - \frac{855}{256} \\ - \frac{495}{512} - \frac{747}{256} + \frac{27}{32} = \frac{18645}{256}\end{array}\right\}m^3\end{array}\right\}$$

$$\sin gv + cv - c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{8} = 0\right)m + \left(\frac{1329}{64} + \frac{81}{64} = \frac{705}{32}\right)m^2 \\ + \left(\frac{37035}{256} + \frac{27}{32} - 3 + \frac{747}{256} - \frac{27}{32} + \frac{3}{8} = \frac{18555}{128}\right)m^3\end{array}\right\}$$

$$\sin gv - cv + c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l}-\left(\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}\right)m - \left(\frac{1329}{64} + \frac{3}{64} - \frac{105}{64} + \frac{45}{64} = \frac{159}{8}\right)m^2 \\ - \left\{\begin{array}{l}\frac{37035}{256} + \frac{27}{32} + \frac{45}{512} - \frac{315}{256} + \frac{21}{16} \\ - \frac{1035}{256} + \frac{27}{32} - \frac{1995}{256} + \frac{1545}{512} = \frac{35253}{256}\end{array}\right\}m^3\end{array}\right\}$$

$$\sin gv + cv - 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\gamma\left\{\frac{27}{32} - \frac{27}{32} = 0\right\}m$$

$$\sin gv - cv + 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\gamma\left\{-\frac{27}{32} - \frac{27}{32} = -\frac{27}{16}\right\}m$$

$$\sin gv + cv + 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\gamma\left\{-\frac{27}{32} + \frac{27}{32} = 0\right\}m$$

$$\sin gv - cv - 2c'mv \quad e\varepsilon'^2\gamma \left\{ \frac{27}{32} + \frac{27}{32} = \frac{27}{16} \right\} m$$

$$\sin gv + 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{27}{32} + \frac{27}{64} = -\frac{27}{64} \right\} m$$

$$\sin gv - 2cv + c'mv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{27}{32} - \frac{15}{16} + \frac{27}{64} = \frac{21}{64} \right\} m$$

$$\sin gv + 2cv + c'mv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{27}{32} - \frac{27}{64} = \frac{27}{64} \right\} m$$

$$\sin gv - 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{27}{32} + \frac{15}{16} - \frac{27}{64} = -\frac{21}{64} \right\} m.$$

$$\sin 2Ev - gv \quad \gamma \left\{ \begin{aligned} & \frac{11}{16}m^2 + \frac{59}{24}m^3 - \frac{45}{32}me^2 + \left(\frac{9}{32} - \frac{3}{32} = \frac{3}{16}\right) m\gamma^2 \\ & + \left(\frac{893}{144} + \frac{33}{64} = \frac{3869}{576}\right) m^4 - \left(\frac{603}{128} + 2 = \frac{859}{128}\right) m^2 e^2 \\ & - \left(\frac{47}{128} + \frac{11}{64} + \frac{11}{16} = \frac{157}{128}\right) m^2\gamma^2 - \left(\frac{55}{32} + \frac{9}{16} + \frac{21}{16} = \frac{115}{32}\right) m^2 \varepsilon'^2 \\ & + \left(\frac{2855}{216} + \frac{59}{32} - \frac{99}{512} = \frac{205535}{13824}\right) m^5 - \left(\frac{33769}{2048} + \frac{135}{128} + \frac{7}{12} - 6 = \frac{74507}{6144}\right) m^3 e^2 \\ & - \left(\frac{5149}{6144} + \frac{59}{96} + \frac{9}{128} + \frac{1883}{6144} - \frac{27}{128} = \frac{1243}{768}\right) m^3\gamma^2 \\ & - \left(\frac{295}{48} + \frac{99}{128} - \frac{309}{128} = \frac{865}{192}\right) m^3\varepsilon'^2 - \frac{45}{64} m\varepsilon'^2\gamma^2 \\ & - \left(\frac{75}{64} - \frac{45}{128} = \frac{105}{128}\right) me^2\gamma^2 - \left(\frac{33}{128} + \frac{9}{128} + \frac{3}{256} - \frac{3}{128} = \frac{81}{256}\right) m\gamma^4 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 2Ev + gv \quad \gamma \left\{ \begin{aligned} & \frac{11}{16}m^2 + \frac{59}{24}m^3 - \frac{45}{32}me^2 - \left(\frac{3}{32} + \frac{3}{64} = \frac{9}{64}\right) m\gamma^2 \\ & + \left(\frac{893}{144} + \frac{33}{64} = \frac{3869}{576}\right) m^4 - \frac{603}{128} m^2 e^2 - \frac{55}{32} m^2\varepsilon'^2 \\ & - \left(\frac{47}{128} + \frac{11}{64} - \frac{11}{64} - \frac{21}{256} = \frac{73}{256}\right) m^2\gamma^2 \\ & + \left(\frac{2855}{216} + \frac{59}{32} - \frac{99}{512} = \frac{205535}{13824}\right) m^5 - \left(\frac{33769}{2048} + \frac{135}{128} + \frac{15}{4} = \frac{43609}{2048}\right) m^3 e^2 \\ & - \left(\frac{5149}{6144} + \frac{59}{96} + \frac{9}{128} - \frac{85}{192} - \frac{513}{4096} - \frac{33}{256} = \frac{10151}{12288}\right) m^3\gamma^2 \\ & - \frac{295}{48} m^3\varepsilon'^2 + \frac{15}{128} m\varepsilon'^2\gamma^2 + \left(\frac{45}{128} - \frac{45}{128} - \frac{3}{32} + \frac{45}{256} = \frac{21}{256}\right) me^2\gamma^2 \\ & + \left(\frac{3}{128} - \frac{3}{128} + \frac{9}{128} + \frac{3}{128} + \frac{3}{128} = \frac{15}{128}\right) m\gamma^4 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 2Ev+gv-cv \qquad e\gamma\left\{\begin{array}{l}
\frac{15}{8}m+\frac{285}{32}m^2+\left(\frac{17347}{512}+\frac{45}{32}=\frac{18067}{512}\right)m^3\\
-\left(\frac{15}{16}-\frac{15}{64}=\frac{45}{64}\right)me^2-\frac{75}{16}m\varepsilon'^2\\
-\left(\frac{21}{16}+\frac{15}{32}-\frac{15}{64}+\frac{3}{16}=\frac{111}{64}\right)m\gamma^2\\
+\left(\frac{672197}{6144}+\frac{855}{128}-\frac{135}{256}=\frac{709997}{6144}\right)m^4-\frac{165}{16}m^2\varepsilon'^2\\
-\left(\frac{513}{64}+\frac{285}{128}-\frac{325}{256}-\frac{21}{64}-\frac{405}{512}=\frac{4021}{512}\right)m^2\gamma^2\\
-\left(\frac{405}{128}+\frac{5}{8}+\frac{1155}{512}=\frac{3095}{512}\right)m^2e^2
\end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev-gv-cv \qquad e\gamma\left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{8}=\frac{3}{2}\right)m+\left(\frac{285}{32}+\frac{21}{32}=\frac{153}{16}\right)m^2\\
+\left(\frac{17347}{512}+\frac{45}{32}+\frac{513}{512}-\frac{9}{32}=\frac{4609}{128}\right)m^3\\
-\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{4}-\frac{15}{16}=\frac{3}{4}\right)me^2-\left(\frac{75}{16}-\frac{15}{16}=\frac{15}{4}\right)m\varepsilon'^2\\
-\left(\frac{21}{16}+\frac{15}{32}-\frac{9}{64}-\frac{3}{16}-\frac{3}{32}=\frac{87}{64}\right)m\gamma^2\\
+\left\{\begin{array}{l}\frac{672197}{6144}+\frac{855}{128}-\frac{135}{256}-\frac{11}{8}\\ +\frac{1891}{2048}+\frac{63}{128}-\frac{135}{512}=\frac{354313}{3072}\end{array}\right\}m^4\\
-\left(\frac{513}{64}+\frac{285}{128}+\frac{51}{256}+\frac{69}{128}+\frac{21}{128}=\frac{2853}{256}\right)m^2\gamma^2\\
-\left(\frac{405}{128}+\frac{105}{64}-\frac{573}{128}=\frac{21}{64}\right)m^2e^2\\
-\left(\frac{165}{16}-\frac{3}{4}+\frac{27}{64}+\frac{63}{64}=\frac{351}{32}\right)m^2\varepsilon'^2
\end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev+gv+cv \qquad e\gamma\left\{\begin{array}{l}
-m^2-\frac{119}{48}m^3+\frac{15}{16}me^2+\left(\frac{3}{32}+\frac{3}{64}=\frac{9}{64}\right)m\gamma^2\\
-\left(\frac{6461}{1152}+\frac{3}{4}+\frac{11}{8}=\frac{8909}{1152}\right)m^4+\frac{159}{64}m^2e^2\\
+\frac{5}{2}m^2\varepsilon'^2+\left(\frac{67}{128}+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}-\frac{21}{256}=\frac{81}{256}\right)m^2\gamma^2
\end{array}\right\}$$

$$\sin 2Ev - gv + cv \quad e\gamma \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{3}{8}m - \left(1 + \tfrac{21}{32} = \tfrac{53}{32}\right)m^2 - \left(\tfrac{119}{48} - \tfrac{513}{512} - \tfrac{9}{32} = \tfrac{1837}{1536}\right)m^3 \\ &- \tfrac{15}{16}m\varepsilon'^2 + \left(\tfrac{15}{16} + \tfrac{75}{64} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{183}{64}\right)me^2 \\ &- \left(\tfrac{51}{64} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{3}{32} - \tfrac{3}{32} = \tfrac{63}{64}\right)m\gamma^2 \\ &- \left(\tfrac{6461}{1152} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{1891}{2048} + \tfrac{63}{128} - \tfrac{135}{512} = \tfrac{138431}{18432}\right)m^4 \\ &+ \left(\tfrac{159}{64} + \tfrac{1425}{256} - \tfrac{2025}{512} + \tfrac{105}{64} + \tfrac{45}{32} = \tfrac{3657}{512}\right)m^2e^2 \\ &+ \left(\tfrac{67}{128} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{715}{512} + \tfrac{69}{128} + \tfrac{21}{128} = \tfrac{1471}{512}\right)m^2\gamma^2 \\ &+ \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{27}{64} - \tfrac{63}{64} - \tfrac{3}{4} = \tfrac{11}{32}\right)m^2\varepsilon'^2 \end{aligned} \right.$$

$$\sin 2Ev + c'mv + gv \quad \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{aligned} &- \tfrac{11}{32}m^2 + \left(\tfrac{99}{128} - \tfrac{59}{96} = \tfrac{61}{384}\right)m^3 \\ &+ \tfrac{45}{32}me^2 + \left(\tfrac{3}{32} + \tfrac{3}{64} = \tfrac{9}{64}\right)m\gamma^2 \\ &+ \left(\tfrac{177}{64} + \tfrac{33}{1024} - \tfrac{29}{1152} - \tfrac{33}{128} = \tfrac{23177}{9216}\right)m^4 \\ &+ \tfrac{11}{256}m^2\varepsilon'^2 - \left(\tfrac{405}{256} - \tfrac{99}{128} = \tfrac{207}{256}\right)m^2e^2 \\ &+ \left(\tfrac{37}{128} + \tfrac{11}{128} - \tfrac{11}{128} - \tfrac{27}{256} - \tfrac{27}{256} + \tfrac{33}{512} = \tfrac{73}{512}\right)m^2\gamma^2 \end{aligned} \right.$$

$$\sin 2Ev + c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{aligned} &- \left(\tfrac{11}{32} + \tfrac{9}{16} = \tfrac{29}{32}\right)m^2 - \left(\tfrac{59}{96} + \tfrac{99}{128} - \tfrac{63}{64} = \tfrac{155}{384}\right)m^3 \\ &+ \tfrac{45}{32}me^2 - \left(\tfrac{9}{32} - \tfrac{3}{32} = \tfrac{3}{16}\right)m\gamma^2 \\ &+ \left(\tfrac{891}{1024} + \tfrac{1539}{1024} + \tfrac{2205}{256} - \tfrac{29}{1152} - \tfrac{33}{128} - \tfrac{177}{64} = \tfrac{36577}{4608}\right)m^4 \\ &+ \left(\tfrac{99}{128} + \tfrac{405}{256} - \tfrac{9}{8} - \tfrac{81}{128} = \tfrac{153}{256}\right)m^2e^2 \\ &+ \left(\tfrac{37}{128} + \tfrac{11}{128} - \tfrac{59}{64} + \tfrac{81}{256} + \tfrac{27}{256} + \tfrac{9}{32} + \tfrac{81}{128} = \tfrac{101}{128}\right)m^2\gamma^2 \\ &+ \left(\tfrac{11}{256} + \tfrac{45}{32} - \tfrac{27}{64} = \tfrac{263}{256}\right)m^2\varepsilon'^2 \end{aligned} \right.$$

$$\sin 2Ev - c'mv + gv \quad \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{77}{32}m^2 + \left(\tfrac{413}{32} - \tfrac{99}{128} = \tfrac{1553}{128}\right) m^3 \\ & - \tfrac{105}{32} m e^2 - \left(\tfrac{7}{32} + \tfrac{7}{64} = \tfrac{21}{64}\right) m\gamma^2 \\ & + \left(\tfrac{7003}{128} + \tfrac{231}{128} - \tfrac{177}{64} + \tfrac{891}{1024} = \tfrac{55931}{1024}\right) m^4 \\ & - \left(\tfrac{1983}{128} - \tfrac{405}{256} = \tfrac{3561}{256}\right) m^2 e^2 - \tfrac{1353}{256} m^2 \varepsilon'^2 \\ & - \left(\tfrac{173}{128} + \tfrac{77}{128} - \tfrac{77}{128} - \tfrac{27}{256} - \tfrac{27}{256} - \tfrac{103}{512} = \tfrac{481}{512}\right) m^2\gamma^2 \end{aligned} \right.$$

$$\sin 2Ev - c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{aligned} & \left(\tfrac{77}{32} + \tfrac{9}{16} = \tfrac{95}{32}\right) m^2 + \left(\tfrac{413}{32} + \tfrac{99}{128} - \tfrac{63}{64} = \tfrac{1625}{128}\right) m^3 \\ & - \tfrac{105}{32} m e^2 + \left(\tfrac{21}{32} - \tfrac{7}{32} = \tfrac{7}{16}\right) m\gamma^2 \\ & + \left(\tfrac{7003}{128} + \tfrac{231}{128} + \tfrac{177}{64} + \tfrac{33}{1024} - \tfrac{1539}{1024} - \tfrac{2205}{256} = \tfrac{25189}{512}\right) m^4 \\ & - \left(\tfrac{1983}{128} + \tfrac{405}{256} - \tfrac{9}{8} - \tfrac{81}{128} = \tfrac{3921}{256}\right) m^2 e^2 \\ & - \left(\tfrac{173}{128} + \tfrac{77}{128} + \tfrac{11}{8} + \tfrac{27}{256} + \tfrac{81}{256} + \tfrac{9}{32} + \tfrac{81}{128} = \tfrac{597}{128}\right) m^2\gamma^2 \\ & - \left(\tfrac{1353}{256} + \tfrac{45}{32} + \tfrac{153}{64} = \tfrac{2325}{256}\right) m^2 \varepsilon'^2 \end{aligned} \right.$$

$$\sin 2Ev - 2cv + gv \quad e^2\gamma \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{45}{32} m + \left(\tfrac{23}{8} + \tfrac{55}{128} = \tfrac{423}{128}\right) m^2 \\ & + \left(\tfrac{187057}{6144} + \tfrac{135}{128} + \tfrac{295}{192} + \tfrac{15}{4} - \tfrac{1485}{1024} - \tfrac{2025}{4096} = \tfrac{142713}{4096}\right) m^3 \\ & - \left(\tfrac{57}{64} + \tfrac{45}{128} - \tfrac{105}{128} + \tfrac{15}{256} - \tfrac{3}{128} = \tfrac{117}{256}\right) m\gamma^2 \\ & - \left(\tfrac{225}{256} - \tfrac{15}{128} = \tfrac{195}{256}\right) m e^2 - \tfrac{225}{64} m \varepsilon'^2 \end{aligned} \right.$$

$$\sin 2Ev - 2cv - gv \quad e^2\gamma \left\{ \begin{aligned} & \left(\tfrac{9}{64} + \tfrac{45}{32} = \tfrac{99}{64}\right) m + \left(\tfrac{23}{8} - \tfrac{63}{256} = \tfrac{673}{256}\right) m^2 \\ & + \left(\tfrac{187057}{6144} + \tfrac{135}{128} - \tfrac{15}{4} - \tfrac{1539}{1024} + \tfrac{3}{256} - 6 = \tfrac{124471}{6144}\right) m^3 \\ & - \left(\tfrac{57}{64} + \tfrac{45}{128} + \tfrac{3}{64} - \tfrac{45}{256} + \tfrac{9}{128} + \tfrac{3}{256} = \tfrac{153}{128}\right) m\gamma^2 \\ & + \left(\tfrac{15}{128} + \tfrac{9}{32} + \tfrac{3}{128} = \tfrac{27}{64}\right) m e^2 - \left(\tfrac{225}{64} + \tfrac{45}{128} = \tfrac{495}{128}\right) m \varepsilon'^2 \end{aligned} \right.$$

$$\sin 2Ev + 2cv - gv \quad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\frac{9}{64}m + \left(\frac{63}{256} + \frac{65}{64} + \frac{55}{128} + 2 = \frac{945}{256}\right) m^2 \\ + \left(\frac{161}{96} + \frac{295}{192} - \frac{1485}{1024} + \frac{1539}{1024} - \frac{3}{256} + \frac{7}{12} = \frac{1965}{512}\right) m^3 \\ - \left(\frac{75}{128} + \frac{225}{256} + \frac{9}{32} + \frac{3}{128} = \frac{453}{256}\right) m e^2 \\ - \left(\frac{9}{128} + \frac{15}{256} - \frac{9}{128} - \frac{3}{256} = \frac{3}{64}\right) m\gamma^2 + \frac{45}{128} m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev + 2cv + gv \quad e^2\gamma \left\{ \frac{65}{64}m^2 + \frac{161}{96}m^3 - \frac{75}{128} m e^2 - \left(\frac{9}{128} + \frac{9}{256} = \frac{27}{256}\right) m\gamma^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev - 3gv \quad \gamma^3 \left\{ \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{64} = \frac{21}{64}\right) m - \left(\frac{11}{16} - \frac{11}{64} + \frac{21}{256} = \frac{153}{256}\right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + 3gv \quad \gamma^3 \left\{ \frac{11}{64} + \frac{11}{64} = \frac{11}{32} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev - 2c'mv + gv \quad \varepsilon'^2\gamma \left(\frac{187}{32} m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - 2c'mv - gv \quad \varepsilon'^2\gamma \left\{ \frac{187}{32} + \frac{27}{64} + \frac{21}{16} = \frac{485}{64} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + 2c'mv - gv \quad \varepsilon'^2\gamma \left\{ -\frac{27}{64} + \frac{9}{16} = \frac{9}{64} \right\} m^2$$

$$\sin 2Ev + c'mv - 3gv \quad \varepsilon'\gamma^3 \left\{ -\frac{9}{32} - \frac{3}{64} = -\frac{21}{64} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - c'mv - 3gv \quad \varepsilon'\gamma^3 \left\{ \frac{21}{32} + \frac{7}{64} = \frac{49}{64} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - 3gv - cv \quad e\gamma^3 \left\{ \frac{9}{64} + \frac{15}{32} - \frac{3}{64} - \frac{3}{32} = \frac{15}{32} \right\} m$$

$$\sin 2Ev + 3gv - cv \quad e\gamma^3 \left\{ \frac{15}{64} + \frac{15}{32} = \frac{45}{64} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - 3gv + cv \quad e\gamma^3 \left\{ -\frac{51}{64} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} = -\frac{33}{64} \right\} m$$

$$\sin 2Ev + gv - 3cv \quad e^3\gamma \left\{ \frac{75}{64} - \frac{15}{64} = \frac{15}{16} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - gv + 3cv \quad e^3\gamma \left(\frac{1}{16} m \right)$$

$$\sin 2Ev - gv - 3cv \quad e^3\gamma \left\{ -\frac{1}{16} - \frac{15}{16} = -1 \right\} m$$

$$\sin 2Ev + c'mv + gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{15}{8} m + \left(\frac{135}{64} - \frac{15}{64} = \frac{15}{8} \right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv - gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{15}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{2} \right) m \\ -\left(\frac{15}{64} + \frac{135}{64} + \frac{27}{64} - \frac{33}{64} - \frac{33}{64} = \frac{111}{64} \right) m^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv + gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{35}{8} m + \left(\frac{1775}{64} - \frac{135}{64} = \frac{205}{8} \right) m^2 \\ + \left(\frac{32691}{256} - \frac{2565}{256} + \frac{1215}{512} + \frac{105}{32} = \frac{63147}{512} \right) m^3 \\ - \left(\frac{49}{16} - \frac{35}{64} + \frac{35}{32} = \frac{231}{64} \right) m\gamma^2 - \frac{615}{64} m\varepsilon'^2 - \frac{35}{16} me^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv - gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{35}{8} - \frac{7}{8} = \frac{7}{2} \right) m \\ + \left(\frac{1775}{64} + \frac{135}{64} + \frac{27}{64} + \frac{103}{64} = \frac{255}{8} \right) m^2 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{32691}{256} + \frac{2565}{256} + \frac{45}{512} + \frac{1863}{512} \\ - \frac{189}{256} + \frac{953}{256} + \frac{105}{32} + \frac{21}{32} = \frac{18991}{128} \end{array} \right\} m^3 \\ - \left(\frac{49}{16} - \frac{21}{64} - \frac{7}{16} - \frac{7}{32} + \frac{35}{32} = \frac{203}{64} \right) m\gamma^2 \\ - \left(\frac{35}{16} + \frac{7}{4} = \frac{63}{16} \right) me^2 - \left(\frac{615}{64} - \frac{123}{64} = \frac{123}{16} \right) m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv + gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma \left(\frac{1}{2} m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev + c'mv - gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ \left(-\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{1}{2} \right) m + \left(\frac{1}{2} - \frac{27}{64} - \frac{33}{64} = -\frac{7}{16} \right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev - c'mv + gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma \left(-\frac{7}{2} m^2 \right)$$

$$\sin 2Ev - c'mv - gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{7}{8} m + \left(\frac{27}{64} - \frac{103}{64} - \frac{7}{2} = -\frac{75}{16} \right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2Ev + c'mv + gv - 2cv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left(-\frac{45}{32} m \right)$$

$$\sin 2Ev + c'mv - gv - 2cv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{45}{32} - \frac{9}{64} = -\frac{99}{64} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - c'mv + gv - 2cv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left(\frac{105}{32} m \right)$$

$$\sin 2Ev - c'mv - gv - 2cv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{105}{32} + \frac{21}{64} = \frac{231}{64} \right\} m$$

$$\sin 2Ev + c'mv - gv + 2cv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left(\frac{9}{64} m \right)$$

$$\sin 2Ev - c'mv - gv + 2cv \quad e^2\varepsilon'\gamma \left(- \frac{21}{64} m \right).$$

$$\sin 2Ev - 2c'mv + gv - cv \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{255}{32} m \right)$$

$$\sin 2Ev - 2c'mv - gv - cv \quad e\varepsilon'^2\gamma \left\{ \frac{255}{32} - \frac{51}{32} = \frac{51}{8} \right\} m$$

$$\sin 2Ev - 2c'mv - gv + cv \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{51}{32} m \right)$$

$$\sin 2Ev + 2c'mv + gv - cv \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(- \frac{45}{32} m \right)$$

$$\sin 2Ev + 2c'mv - gv - cv \quad e\varepsilon'^2\gamma \left\{ - \frac{45}{32} + \frac{9}{32} = - \frac{9}{8} \right\} m$$

$$\sin 2Ev + 2c'mv - gv + cv \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(- \frac{9}{32} m \right)$$

$$\sin Ev + gv \quad \gamma b^2 \left\{ \begin{array}{l} - \frac{15}{16} m - \frac{93}{16} m^2 - \left(\frac{1773}{64} + \frac{45}{64} = \frac{909}{32} \right) m^3 - \frac{15}{16} m e^2 \\ + \left(\frac{165}{64} + \frac{15}{64} - \frac{15}{128} = \frac{345}{128} \right) m\gamma^2 - \left(\frac{45}{16} + \frac{45}{32} = \frac{135}{32} \right) m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin Ev - gv \quad \gamma b^2 \left\{ \begin{array}{l} - \frac{15}{16} m - \left(\frac{93}{16} - \frac{45}{128} = \frac{699}{128} \right) m^2 \\ - \left(\frac{1773}{64} + \frac{45}{64} - \frac{279}{128} + \frac{315}{512} = \frac{13743}{512} \right) m^3 - \frac{15}{16} m e^2 \\ + \left(\frac{165}{64} + \frac{15}{64} - \frac{165}{128} = \frac{195}{128} \right) m\gamma^2 - \left(\frac{45}{16} - \frac{45}{32} - \frac{15}{32} = \frac{15}{16} \right) m\varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin Ev + gv - cv \quad e\gamma b^2 \left(- \frac{165}{64} m \right)$$

$$\sin Ev - gv - cv \quad e\gamma b^2 \left(- \frac{165}{64} m \right)$$

$$\sin Ev + gv + cv \quad e\gamma b^2 \left(\frac{45}{64} m \right)$$

$$\sin Ev - gv + cv \quad e\gamma b^2 \left(\frac{45}{64} m \right)$$

$$\sin Ev + c'mv + gv \quad \varepsilon'\gamma b^2\left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8}m\right)$$

$$\sin Ev + c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma b^2\left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8}m\right)$$

$$\sin Ev - c'mv + gv \quad \varepsilon'\gamma b^2\left(\frac{15}{16}m\right)$$

$$\sin Ev - c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma b^2\left\{\frac{15}{16} - \frac{15}{32} = \frac{15}{32}\right\} m$$

$$\sin Ev + c'mv + gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma b^2\left(\frac{25}{16}\right)$$

$$\sin Ev + c'mv - gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma b^2\left(\frac{25}{16}\right)$$

$$\sin Ev + c'mv + gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{15}{16}\right)$$

$$\sin Ev + c'mv - gv + cv \quad e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{15}{16}\right)$$

$$\sin 3Ev + gv \quad \gamma b^2\left(\frac{15}{64}m^2\right)$$

$$\sin 3Ev - gv \quad \gamma b^2\left\{\frac{15}{64} - \frac{45}{128} = -\frac{15}{128}\right\} m^2$$

$$\sin 3Ev + c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma b^2\left(\frac{15}{32}m\right)$$

$$\sin 4Ev - gv \quad \gamma\left\{\begin{aligned}
&\frac{33}{128}m^3 + \left(\frac{59}{64} - \frac{231}{512} - \frac{283}{512} = -\frac{21}{256}\right)m^4 \\
&-\frac{135}{256}m^2e^2 - \left(\frac{9}{512} + \frac{9}{256} = \frac{27}{512}\right)m^2\gamma^2 \\
&-\left(\frac{1991}{640} - \frac{893}{384} + \frac{413}{256} + \frac{5643}{8192} = \frac{379397}{122880}\right)m^5 \\
&+\left(\frac{975}{256} + \frac{33}{64} - \frac{1809}{1024} + \frac{945}{1024} + \frac{15}{4} = \frac{1851}{256}\right)m^3e^2 \\
&-\left(\frac{141}{1024} + \frac{33}{256} - \frac{33}{256} + \frac{141}{1024} - \frac{63}{1024} = \frac{219}{1024}\right)m^3\gamma^2 \\
&-\left(\frac{165}{256} + \frac{165}{256} = \frac{165}{128}\right)m^3\varepsilon'^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin 4Ev + gv \quad \gamma\left(-\frac{283}{512}m^4\right)$$

$\sin 4Ev + gv - cv \quad e\gamma\left(-\frac{15}{8}m^3\right)$

$\sin 4Ev - gv - cv \quad e\gamma\left\{\frac{45}{64}m^2 + \left(\frac{855}{256} - \frac{315}{256} - \frac{15}{8} = \frac{15}{64}\right)m^3\right\}$

$\sin 4Ev - gv + cv \quad e\gamma\left(-\frac{3}{8}m^3\right)$

$\sin 4Ev + gv - 2cv \quad e^2\gamma\left(-\frac{675}{512}m^2\right)$

$\sin 4Ev - gv - 2cv \quad e^2\gamma\left\{-\frac{675}{512} + \frac{135}{256} = -\frac{405}{512}\right\}m^2$

$\sin 4Ev - 3gv \quad \gamma^3\left\{-\frac{9}{512} + \frac{27}{256} = \frac{45}{512}\right\}m^2$

$\sin 4Ev + c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma\left\{-\frac{33}{256} - \frac{33}{128} = -\frac{99}{256}\right\}m^3$

$\sin 4Ev - c'mv - gv \quad \varepsilon'\gamma\left\{\frac{231}{256} + \frac{77}{128} = \frac{385}{256}\right\}m^3$

$\sin 4Ev + c'mv - gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma\left\{-\frac{45}{64} - \frac{45}{64} = -\frac{45}{32}\right\}m^2$

$\sin 4Ev - c'mv - gv - cv \quad e\varepsilon'\gamma\left\{\frac{105}{64} + \frac{105}{64} = \frac{105}{32}\right\}m^2.$

$$\frac{1}{2}\overline{F(v)}^2 \times \frac{dL}{dv} =$$

$$\cos gv \quad \gamma\left\{\begin{array}{l} e^2 - \frac{5}{16}e^4 + \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}\right)e^2\gamma^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{45}{64} = \frac{3}{64}\right)m^2e^2 \\ + \frac{649}{192}m^5 - \left(\frac{33}{256} + \frac{33}{1024} = \frac{165}{1024}\right)m^3\gamma^2 + \frac{135}{128}me^4 \\ + \left(\frac{8415}{256} - \frac{9}{32} - \frac{951}{256} + \frac{315}{256} = \frac{7707}{256}\right)m^3e^2 \end{array}\right\}$$

$\cos 3gv \quad \gamma^3\left\{\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}\right)e^2 - \frac{1}{128}\gamma^2\right\}$

$\cos 5gv \quad \gamma^5\left(-\frac{1}{128}\right)$

$$\cos gv + cv \qquad e\gamma\left\{\begin{aligned}&-\tfrac{3}{8}e^2+\tfrac{1}{8}\gamma^2+\left(\tfrac{165}{128}-\tfrac{33}{128}=\tfrac{33}{32}\right)m^3\\&+\left(\tfrac{5143}{512}-\tfrac{59}{64}+\tfrac{231}{512}=\tfrac{2451}{256}\right)m^4+\tfrac{431329}{8192}m^5\\&+\left(\tfrac{405}{512}-\tfrac{5}{16}-\tfrac{9}{32}=\tfrac{101}{512}\right)m^2e^2+\left(\tfrac{27}{8}-\tfrac{27}{16}-\tfrac{27}{16}=0\right)m^2\varepsilon'^2\\&+\left(\tfrac{3}{32}+\tfrac{9}{256}+\tfrac{9}{512}-\tfrac{45}{256}-\tfrac{1}{4}=-\tfrac{143}{512}\right)m^2\gamma^2\\&-\left(\tfrac{5}{64}+\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{3}{32}=\tfrac{39}{64}\right)e^2\gamma^2\\&-\left(\tfrac{3}{32}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{32}-\tfrac{3}{64}=\tfrac{7}{64}\right)\gamma^4-\tfrac{1}{8}e^4\end{aligned}\right\}$$

$$\cos gv - cv \qquad e\gamma\left\{\begin{aligned}&-\tfrac{3}{8}e^2-\tfrac{1}{8}\gamma^2+\left(\tfrac{165}{128}+\tfrac{33}{128}=\tfrac{99}{64}\right)m^3\\&+\left(\tfrac{5143}{512}+\tfrac{59}{64}-\tfrac{231}{512}=\tfrac{673}{64}\right)m^4+\tfrac{431329}{8192}m^5\\&-\left(\tfrac{5}{16}+\tfrac{9}{32}+\tfrac{135}{128}=\tfrac{211}{128}\right)m^2e^2+\left(\tfrac{27}{8}+\tfrac{27}{16}+\tfrac{27}{16}=\tfrac{27}{4}\right)m^2\varepsilon'^2\\&+\left(\tfrac{199}{256}-\tfrac{45}{256}-\tfrac{3}{32}-\tfrac{9}{256}-\tfrac{27}{256}=\tfrac{47}{128}\right)m^2\gamma^2\\&-\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{15}{64}=\tfrac{23}{64}\right)e^4+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{32}+\tfrac{23}{64}=\tfrac{37}{64}\right)e^2\gamma^2\\&+\left(\tfrac{3}{64}+\tfrac{3}{32}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{32}=\tfrac{13}{64}\right)\gamma^4\end{aligned}\right\}$$

$$\cos gv + 2cv \qquad e^2\gamma\left\{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}e^2+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{11}{64}=\tfrac{13}{64}\right)\gamma^2-\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{8}=\tfrac{9}{8}\right)m^2\right\}$$

$$\cos gv - 2cv \qquad e^2\gamma\left\{\begin{aligned}&-\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{8}=\tfrac{19}{24}\right)e^2+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{29}{64}=-\tfrac{5}{64}\right)\gamma^2\\&-\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{8}-\tfrac{45}{64}=\tfrac{27}{64}\right)m^2\end{aligned}\right\}$$

$$\cos gv + 3cv \qquad e^3\gamma\left(\tfrac{3}{8}\right)$$

$$\cos gv - 3cv \qquad e^3\gamma\left(\tfrac{3}{8}\right)$$

$$\cos gv + 4cv \qquad e^4\gamma\left(-\tfrac{91}{384}\right)$$

$$\cos gv - 4cv \qquad e^4\gamma\left(-\tfrac{91}{384}-\tfrac{5}{16}=-\tfrac{211}{384}\right)$$

$$\cos 3gv - cv \qquad e\gamma^3 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{8} + \left(\frac{199}{256} - \frac{3}{32} + \frac{45}{512} = \frac{395}{512}\right) m^2 \\ + \left(\frac{23}{64} - \frac{3}{32} + \frac{5}{64} = \frac{11}{32}\right) e^2 + \left(\frac{3}{32} + \frac{1}{32} - \frac{5}{64} = \frac{3}{64}\right) \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 3gv + cv \qquad e\gamma^3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{32} = \frac{5}{32}\right) m^2 \\ - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{32} = \frac{27}{32}\right) e^2 - \left(\frac{3}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{32} = \frac{3}{32}\right) \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 3gv - 2cv \qquad e^2\gamma^3 \left(-\frac{29}{64} - \frac{1}{8} = -\frac{37}{64}\right)$$

$$\cos 3gv + 2cv \qquad e^2\gamma^3 \left(-\frac{11}{64} - \frac{1}{8} = -\frac{19}{64}\right)$$

$$\cos gv + c'mv \qquad \varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{3}{16} m\gamma^2 + \frac{9}{8} me^2 + \left(\frac{363}{256} + \frac{99}{256} = \frac{231}{128}\right) m^4 \right\}$$

$$\cos gv - c'mv \qquad \varepsilon'\gamma \left\{ \frac{3}{16} m\gamma^2 - \frac{9}{8} me^2 + \left(\frac{363}{256} - \frac{99}{256} = \frac{33}{32}\right) m^4 \right\}$$

$$\cos gv + 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\gamma \left(-\frac{9}{8} m^2\right)$$

$$\cos gv - 2c'mv \qquad \varepsilon'^2\gamma \left(-\frac{9}{8} m^2\right)$$

$$\cos 3gv + c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^3 \left(-\frac{3}{16} m\right)$$

$$\cos 3gv - c'mv \qquad \varepsilon'\gamma^3 \left(\frac{3}{16} m\right)$$

$$\cos gv + cv + c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{3}{2} m - \left(\frac{4987}{256} + \frac{77}{128} - \frac{9}{8} = \frac{4853}{256}\right) m^3 \right\}$$

$$\cos gv - cv - c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{3}{2} m - \left(\frac{4987}{256} + \frac{33}{128} - \frac{9}{8} = \frac{4765}{256}\right) m^3 \right\}$$

$$\cos gv + cv - c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{3}{2} m + \left(\frac{6417}{256} + \frac{33}{128} - \frac{9}{8} = \frac{6195}{256}\right) m^3 \right\}$$

$$\cos gv - cv + c'mv \qquad e\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{3}{2} m + \left(\frac{6417}{256} + \frac{77}{128} - \frac{9}{8} = \frac{6283}{256}\right) m^3 \right\}$$

$$\cos gv + cv + 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{9}{8} m\right)$$

$$\cos gv - cv - 2c'mv \qquad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{9}{8} m\right)$$

$$\cos gv + cv - 2c'mv \quad e\varepsilon'^2\gamma\left(-\frac{9}{8}m\right)$$

$$\cos gv - cv + 2c'mv \quad e\varepsilon'^2\gamma\left(-\frac{9}{8}m\right)$$

$$\cos gv + 2cv + c'mv \quad e^2\varepsilon'\gamma\left\{\frac{9}{16} - \frac{9}{16} = 0\right\}m$$

$$\cos gv - 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon'\gamma\left\{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} = \frac{9}{8}\right\}m$$

$$\cos gv + 2cv - c'mv \quad e^2\varepsilon'\gamma\left\{\frac{9}{16} - \frac{9}{16} = 0\right\}m$$

$$\cos gv - 2cv + c'mv \quad e^2\varepsilon'\gamma\left\{-\frac{9}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{9}{8}\right\}m$$

$$\cos 2Ev + gv \quad \gamma\left\{\begin{aligned}&-\frac{15}{8}me^2 - \frac{317}{32}m^2e^2 - \left(\frac{58009}{1536} + \frac{45}{32} = \frac{60169}{1536}\right)m^3e^2\\&+\frac{67}{16}m^3\varepsilon'^2 + \frac{75}{16}me^2\varepsilon'^2 + \frac{615}{256}me^4 + \left(\frac{9}{256} - \frac{3}{256} = \frac{3}{128}\right)m\gamma^4\\&+\frac{59}{192}m^3\gamma^2 + \left(\frac{15}{8} + \frac{15}{32} - \frac{165}{256} = \frac{435}{256}\right)me^2\gamma^2\end{aligned}\right\}$$

$$\cos 2Ev - gv \quad \gamma\left\{\begin{aligned}&-\left(\frac{15}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{2}\right)me^2 - \left(\frac{317}{32} + \frac{21}{32} = \frac{169}{16}\right)m^2e^2 - \frac{11}{128}m^2\gamma^2\\&+\frac{363}{2048}m^5 - \left(\frac{58009}{1536} + \frac{45}{32} + \frac{513}{512} - \frac{963}{512} = \frac{58819}{1536}\right)m^3e^2\\&+\left(\frac{67}{16} + \frac{27}{32} = \frac{161}{32}\right)m^3\varepsilon'^2 + \left(\frac{75}{16} - \frac{15}{16} = \frac{15}{4}\right)me^2\varepsilon'^2\\&+\left(\frac{615}{256} + \frac{3}{4} + \frac{27}{512} = \frac{1641}{512}\right)me^4 + \left(\frac{15}{32} + \frac{15}{8} - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = \frac{63}{32}\right)me^2\gamma^2\\&-\frac{59}{192}m^3\gamma^2 + \left(\frac{9}{256} + \frac{3}{512} = \frac{21}{512}\right)m\gamma^4\end{aligned}\right\}$$

$$\cos 2Ev - 3gv \qquad \gamma^3\left(-\frac{11}{128}m^2\right)$$

$$\cos 2Ev + gv - cv \quad e\gamma\left\{\begin{aligned}&\frac{11}{16}m^2 + \frac{59}{24}m^3 - \frac{45}{16}me^2 + \left(\frac{15}{64} - \frac{3}{32} - \frac{3}{64} = \frac{3}{32}\right)m\gamma^2\\&+\left(\frac{3869}{576} + \frac{33}{64} = \frac{2083}{288}\right)m^4 - \left(\frac{923}{128} + \frac{55}{128} = \frac{489}{64}\right)m^2e^2\\&+\frac{245}{32}m^2\varepsilon'^2 + \left(\frac{417}{256} + \frac{21}{256} - \frac{69}{128} - \frac{11}{64} = 1\right)m^2\gamma^2\end{aligned}\right\}$$

$$\cos 2Ev - gv - cv \qquad e\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{16} m^2 + \frac{59}{24} m^3 - \left(\frac{45}{16} + \frac{9}{64} = \frac{189}{64} \right) m e^2 \\ - \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{64} = \frac{3}{64} \right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{3869}{576} + \frac{33}{64} + \frac{495}{1024} = \frac{71111}{9216} \right) m^4 + \frac{245}{32} m^2 \varepsilon'^2 \\ - \left(\frac{923}{123} - \frac{63}{256} = \frac{1783}{256} \right) m^2 e^2 - \left(\frac{69}{128} + \frac{11}{64} + \frac{439}{256} = \frac{621}{256} \right) m^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + gv + cv \qquad e\gamma \left\{ \begin{array}{l} - \frac{11}{16} m^2 - \frac{59}{24} m^3 + \frac{135}{64} m e^2 + \left(\frac{3}{32} + \frac{3}{64} = \frac{9}{64} \right) m \gamma^2 \\ - \left(\frac{3869}{576} + \frac{33}{64} = \frac{2083}{288} \right) m^4 + \frac{2321}{256} m^2 e^2 + \frac{55}{32} m^2 \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{69}{128} + \frac{11}{64} - \frac{49}{128} - \frac{21}{256} = \frac{63}{256} \right) m^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - gv + cv \qquad e\gamma \left\{ \begin{array}{l} - \frac{11}{16} m^2 - \frac{59}{24} m^3 + \left(\frac{3}{32} - \frac{9}{32} = - \frac{3}{16} \right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{135}{64} - \frac{9}{64} = \frac{63}{32} \right) m e^2 - \left(\frac{3869}{576} + \frac{33}{64} - \frac{495}{1024} = \frac{62201}{9216} \right) m^4 \\ + \frac{55}{32} m^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{69}{128} + \frac{11}{64} + \frac{15}{32} = \frac{151}{128} \right) m^2 \gamma^2 \\ + \left(\frac{2321}{256} + \frac{55}{128} + \frac{63}{256} + 2 = \frac{1503}{128} \right) m^2 e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + gv - 2cv \qquad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{8} m + \frac{1107}{128} m^2 + \left(\frac{17595}{512} + \frac{45}{32} = \frac{18315}{512} \right) m^3 \\ - \frac{75}{16} m \varepsilon'^2 - \left(\frac{105}{256} + \frac{75}{64} - \frac{15}{64} = \frac{345}{256} \right) m e^2 \\ - \left(\frac{447}{256} + \frac{15}{32} + \frac{87}{512} - \frac{345}{256} = \frac{531}{512} \right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - gv - 2cv \qquad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{15}{8} - \frac{3}{16} = \frac{27}{16} \right) m + \frac{1107}{128} m^2 \\ + \left(\frac{513}{1024} - \frac{9}{32} + \frac{17595}{512} + \frac{45}{32} = \frac{36855}{1024} \right) m^3 \\ - \left(\frac{75}{16} - \frac{15}{32} = \frac{135}{32} \right) m \varepsilon'^2 + \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{15}{16} - \frac{105}{16} = \frac{55}{256} \right) m e^2 \\ - \left(\frac{447}{256} + \frac{15}{32} - \frac{3}{32} - \frac{3}{32} - \frac{3}{32} = \frac{495}{256} \right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - gv + 2cv \quad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{16}m + \frac{161}{128}m^2 + \left(\frac{513}{1024} - \frac{9}{32} + \frac{653}{192} = \frac{11123}{3072}\right)m^3 \\ +\frac{15}{32}m\,\varepsilon'^2 - \left(\frac{455}{256} + \frac{3}{8} - \frac{1}{16} + \frac{75}{64} = \frac{835}{256}\right)m\,e^2 \\ +\left(\frac{3}{32} + \frac{231}{256} - \frac{33}{256} + \frac{3}{32} = \frac{123}{128}\right)m\,\gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + gv + 2cv \quad e^2\gamma \left\{ \frac{161}{128}m^2 + \frac{653}{192}m^3 - \frac{455}{256}me^2 - \left(\frac{33}{256} + \frac{33}{512} = \frac{99}{512}\right)m\gamma^2 \right\}$$

$$\cos 2Ev + gv - 3cv \quad e^3\gamma \left(\frac{45}{64}m \right)$$

$$\cos 2Ev - gv - 3cv \quad e^3\gamma \left\{ \frac{45}{64} + \frac{9}{64} = \frac{27}{32} \right\} m$$

$$\cos 2Ev - gv + 3cv \quad e^3\gamma \left(\frac{9}{64}m \right)$$

$$\cos 2Ev - 3gv + cv \quad e\gamma^3 \left\{ -\frac{9}{32} - \frac{3}{64} = -\frac{21}{64} \right\} m$$

$$\cos 2Ev - 3gv - cv \quad e\gamma^3 \left\{ \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{3}{32} \right\} m$$

$$\cos 2Ev + 3gv - cv \quad e\gamma^3 \left(\frac{15}{64}m \right)$$

$$\cos 2Ev + gv + c'mv \quad \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{33}{32}m^3 + \frac{15}{8}m\,e^2 + \frac{59}{16}m^4 \\ -\left(\frac{9}{64} + \frac{9}{128} + \frac{11}{256} = \frac{65}{256}\right)m^2\gamma^2 - \left(\frac{135}{64} - \frac{47}{64} = \frac{11}{8}\right)m^2e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - gv + c'mv \quad \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{33}{32}m^3 + \left(\frac{15}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{2}\right)m\,e^2 + \frac{59}{16}m^4 \\ +\left(\frac{119}{256} - \frac{9}{64} = \frac{83}{256}\right)m^2\gamma^2 + \left(\frac{47}{64} + \frac{135}{64} = \frac{91}{32}\right)m^2e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev + gv - c'mv \quad \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\frac{33}{32}m^3 - \frac{35}{8}m\,e^2 - \frac{59}{16}m^4 \\ +\left(\frac{9}{64} + \frac{77}{256} + \frac{9}{128} = \frac{131}{256}\right)m^2\gamma^2 - \left(\frac{1999}{64} - \frac{135}{64} = \frac{233}{8}\right)m^2e^2 \end{array} \right\}$$

$$\cos 2Ev - gv - c'mv \quad \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\frac{33}{32}m^3 - \left(\frac{35}{8} - \frac{7}{8} = \frac{7}{2}\right)m\,e^2 - \frac{59}{16}m^4 \\ -\left(\frac{185}{256} - \frac{9}{64} = \frac{149}{256}\right)m^2\gamma^2 - \left(\frac{1999}{64} + \frac{135}{64} = \frac{1067}{32}\right)m^2e^2 \end{array} \right\}$$

$\cos 2Ev + gv + cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma\left(\frac{11}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev - gv + cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma\left\{\frac{11}{32}+\frac{9}{16}=\frac{29}{32}\right\}m^2$
$\cos 2Ev + gv + cv - c'mv$	$e\varepsilon'\gamma\left(-\frac{77}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev - gv + cv - c'mv$	$e\varepsilon'\gamma\left\{-\frac{77}{32}-\frac{9}{16}=-\frac{95}{32}\right\}m^2$
$\cos 2Ev + gv - cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma\left(\frac{79}{32}m^2\right)$
$\cos 2Ev - gv - cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma\left\{\frac{79}{32}-\frac{9}{16}=\frac{61}{32}\right\}m^2$
$\cos 2Ev + gv - cv - c'mv$	$e\varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l}-\frac{13}{32}m^2-\left(\frac{157}{128}+\frac{99}{128}=2\right)m^3\\ -\frac{105}{16}me^2+\left(\frac{35}{64}-\frac{7}{32}=\frac{21}{64}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$
$\cos 2Ev - gv - cv - c'mv$	$e\varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{13}{32}+\frac{9}{16}=\frac{5}{32}\right)m^2-\left(\frac{157}{128}+\frac{63}{64}-\frac{99}{128}=\frac{23}{16}\right)m^3\\ -\left(\frac{105}{16}+\frac{21}{64}=\frac{441}{64}\right)me^2-\left(\frac{7}{32}-\frac{7}{64}=\frac{7}{64}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$
$\cos 2Ev + gv - 2cv + c'mv$	$e^2\varepsilon'\gamma\left(-\frac{15}{8}m\right)$
$\cos 2Ev - gv - 2cv + c'mv$	$e^2\varepsilon'\gamma\left\{-\frac{15}{8}+\frac{3}{16}=-\frac{27}{16}\right\}m$
$\cos 2Ev + gv - 2cv - c'mv$	$e^2\varepsilon'\gamma\left(\frac{35}{8}m\right)$
$\cos 2Ev - gv - 2cv - c'mv$	$e^2\varepsilon'\gamma\left\{\frac{35}{8}-\frac{7}{16}=\frac{63}{16}\right\}m$
$\cos 2Ev - gv + 2cv + c'mv$	$e^2\varepsilon'\gamma\left(\frac{3}{16}m\right)$
$\cos 2Ev - gv + 2cv - c'mv$	$e^2\varepsilon'\gamma\left(-\frac{7}{16}m\right)$
$\cos Ev + gv$	$\gamma b^2\left(-\frac{165}{256}m^3-\frac{15}{8}m\varepsilon'^2+\frac{105}{32}me^2-\frac{15}{128}m\gamma^2\right)$
$\cos Ev - gv$	$\gamma b^2\left(-\frac{165}{256}m^3-\frac{15}{8}m\varepsilon'^2+\frac{105}{32}me^2+\frac{15}{128}m\gamma^2\right)$

$\cos Ev + gv - cv$	$e\gamma b^2\left(-\frac{15}{16}m\right)$
$\cos Ev - gv - cv$	$e\gamma b^2\left(-\frac{15}{16}m\right)$
$\cos Ev + gv + cv$	$e\gamma b^2\left(\frac{15}{16}m\right)$
$\cos Ev - gv + cv$	$e\gamma b^2\left(\frac{15}{16}m\right)$
$\cos Ev + gv + cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{4}\right)$
$\cos Ev - gv + cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma b^2\left(-\frac{5}{4}\right)$
$\cos Ev + gv - cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma b^2\left(\frac{5}{4}\right)$
$\cos Ev - gv - cv + c'mv$	$e\varepsilon'\gamma b^2\left(\frac{5}{4}\right)$
$\cos 4Ev + gv$	$\gamma\left(-\frac{121}{512}m^4\right)$
$\cos 4Ev - gv$	$\gamma\left\{\begin{array}{l}-\frac{121}{512}m^4-\frac{45}{64}m^2e^2-\frac{649}{384}m^5\\ -\left(\frac{99}{512}-\frac{33}{512}=\frac{33}{256}\right)m^3\gamma^2\\ +\left(\frac{2415}{512}+\frac{315}{256}-\frac{951}{256}=\frac{1143}{512}\right)m^3e^2\end{array}\right\}$
$\cos 4Ev + gv - cv$	$e\gamma\left(-\frac{165}{128}m^3\right)$
$\cos 4Ev - gv - cv$	$e\gamma\left\{-\frac{165}{128}+\frac{33}{128}=-\frac{33}{32}\right\}m^3$
$\cos 4Ev - gv + cv$	$e\gamma\left(-\frac{33}{128}m^3\right)$
$\cos 4Ev + gv - 2cv$	$e^2\gamma\left(-\frac{225}{128}m^2\right)$
$\cos 4Ev - gv - 2cv$	$e^2\gamma\left\{-\frac{225}{128}+\frac{45}{64}=-\frac{135}{128}\right\}m^2.$

$$-\frac{1}{2.3}F\overline{(v)}^3 \times \frac{dL'}{dv} =$$

$\sin gv$	$\gamma\left(-\frac{1}{8}e^2\gamma^2+\frac{33}{128}m^3e^2\right)$
$\sin 3gv$	$\gamma^3\left(-\frac{1}{8}\ e^2\ \right)$
$\sin gv+cv$	$e\gamma\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}e^2+\frac{121}{256}m^4+\frac{649}{192}m^5+\left(\frac{297}{64}+\frac{3}{8}-\frac{45}{128}=\frac{597}{128}\right)m^2e^2\\+\frac{9}{4}m^2\varepsilon'^2-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}-\frac{3}{32}=\frac{3}{32}\right)e^2\gamma^2+\frac{11}{192}e^4+\frac{1}{64}\gamma^4\end{array}\right\}$
$\sin gv-cv$	$e\gamma\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}e^2-\frac{121}{256}m^4-\frac{649}{192}m^5-\left(\frac{297}{64}+\frac{3}{8}-\frac{45}{64}=\frac{69}{16}\right)m^2e^2\\-\frac{9}{4}m^2\varepsilon'^2+\left(\frac{5}{16}-\frac{11}{192}=\frac{49}{192}\right)e^4-\left(\frac{33}{64}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{64}\right)e^2\gamma^2-\frac{1}{64}\gamma^4\end{array}\right\}$
$\sin gv+2cv$	$e^2\gamma\left(-\frac{3}{8}e^2+\frac{1}{16}\gamma^2\right)$
$\sin gv-2cv$	$e^2\gamma\left(\ \frac{3}{8}e^2+\frac{1}{16}\gamma^2\right)$
$\sin gv+3cv$	$e^3\gamma\left(-\frac{1}{6}\right)$
$\sin gv-3cv$	$e^3\gamma\left(\ \frac{1}{6}\right)$
$\sin gv+4cv$	$e^4\gamma\left(\ \frac{3}{16}\right)$
$\sin gv-4cv$	$e^4\gamma\left(-\frac{3}{16}\right)$
$\sin 3gv-cv$	$e\gamma^3\left(-\frac{33}{64}e^2+\frac{1}{128}\gamma^2\right)$
$\sin 3gv+cv$	$e\gamma^3\left(\ \frac{13}{32}e^2-\frac{1}{128}\gamma^2\right)$
$\sin 3gv-2cv$	$e^2\gamma^3\left(\ \frac{1}{16}\right)$
$\sin 3gv+2cv$	$e^2\gamma^3\left(\ \frac{1}{16}\right)$

$\sin gv + c'mv \qquad \varepsilon'\gamma\left(-\frac{3}{2}me^2\right)$

$\sin gv - c'mv \qquad \varepsilon'\gamma\left(\ \frac{3}{2}me^2\right)$

$\sin gv + 2cv - c'mv \qquad e^2\varepsilon'\gamma\left(-\frac{3}{4}\ m\ \right)$

$\sin gv - 2cv + c'mv \qquad e^2\varepsilon'\gamma\left(\ \frac{3}{4}\ m\ \right)$

$\sin gv + 2cv + c'mv \qquad e^2\varepsilon'\gamma\left(\ \frac{3}{4}\ m\ \right)$

$\sin gv - 2cv - c'mv \qquad e^2\varepsilon'\gamma\left(-\frac{3}{4}\ m\ \right)$

$\sin 2Ev + gv \qquad \gamma\left\{\ \frac{11}{16}m^2e^2 + \frac{59}{24}m^3e^2 + \left(\frac{5}{32} - \frac{3}{32} - \frac{3}{64} = \frac{1}{64}\right)me^2\gamma^2 - \frac{45}{16}me^4\right\}$

$\sin 2Ev - gv \qquad \gamma\left\{\ \frac{11}{16}m^2e^2 + \frac{59}{24}m^3e^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{32} = \frac{1}{32}\right)me^2\gamma^2 - \frac{45}{64}me^4\right\}$

$\sin 2Ev + gv - cv \qquad e\gamma\left(\ \frac{15}{8}me^2 + \frac{1171}{128}m^2e^2 - \frac{11}{128}m^2\gamma^2\right)$

$$\sin 2Ev - gv - cv \qquad e\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{15}{8} - \frac{3}{16} = \frac{27}{16}\right)me^2 \\ + \left(\frac{1171}{128} + \frac{21}{64} = \frac{1213}{128}\right)m^2e^2 + \frac{11}{128}m^2\gamma^2\end{array}\right\}$$

$\sin 2Ev + gv + cv \qquad e\gamma\left(-\frac{15}{16}me^2 - \frac{731}{128}m^2e^2 + \frac{11}{128}m^2\gamma^2\right)$

$$\sin 2Ev - gv + cv \qquad e\gamma\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{15}{16} + \frac{3}{16} = -\frac{27}{16}\right)me^2 \\ - \left(\frac{731}{128} + \frac{21}{64} = \frac{773}{128}\right)m^2e^2 - \frac{11}{128}m^2\gamma^2\end{array}\right\}$$

$\sin 2Ev + c'mv + gv \qquad \varepsilon'\gamma\left(\ \frac{79}{32}m^2e^2\right)$

$\sin 2Ev + c'mv - gv \qquad \varepsilon'\gamma\left(\ \frac{79}{32}m^2e^2\right)$

$\sin 2Ev - c'mv + gv \qquad \varepsilon'\gamma\left(-\frac{13}{32}m^2e^2\right)$

$\sin 2Ev - c'mv - gv \qquad \varepsilon'\gamma\left(-\frac{13}{32}m^2e^2\right)$

$\sin 2Ev + gv - 2cv \quad e^2\gamma\left(-\frac{11}{32}m^2 - \frac{5}{32}m\gamma^2\right)$

$\sin 2Ev - gv - 2cv \quad e^2\gamma\left(-\frac{11}{32}m^2 + \frac{3}{32}m\gamma^2 - \frac{9}{64}me^2\right)$

$\sin 2Ev + gv + 2cv \quad e^2\gamma\left(-\frac{11}{32}m^2\right)$

$\sin 2Ev - gv + 2cv \quad e^2\gamma\left(-\frac{11}{32}m^2 - \frac{9}{64}m\gamma^2 - \frac{9}{64}me^2\right)$

$\sin 2Ev + gv - 3cv \quad e^3\gamma\left(-\frac{15}{16}m\right)$

$\sin 2Ev - gv - 3cv \quad e^3\gamma\left\{-\frac{15}{16} - \frac{1}{16} = -1\right\}m$

$\sin 2Ev - gv + 3cv \quad e^3\gamma\left(-\frac{m}{16}\right)$

$\sin 2Ev - c'mv - gv - cv \quad ee'\gamma\left\{\frac{35}{8} - \frac{7}{16} = \frac{63}{16}\right\}me^2$

$\sin 2Ev - c'mv + gv - cv \quad ee'\gamma\left(\frac{35}{8}me^2\right)$

$\sin Ev + gv \quad \gamma b^2\left(-\frac{15}{16}me^2\right)$

$\sin Ev - gv \quad \gamma b^2\left(-\frac{15}{16}me^2\right)$

$\sin 4Ev - gv \quad \gamma\left\{\frac{33}{128} - \frac{165}{128} = -\frac{33}{32}\right\}m^3e^2.$

$$\frac{1}{2.3.4}F\overline{(v)}^4 \times \frac{dL}{dv} =$$

$\cos gv + 2cv \quad e^2\gamma\left(-\frac{1}{6}e^2\right) + \cos gv - 2cv \quad e^2\gamma\left(-\frac{1}{6}e^2\right)$

$\cos 3gv - cv \quad e\gamma^3\left(-\frac{1}{16}e^2\right) + \cos 3gv + cv \quad e\gamma^3\left(\frac{1}{16}e^2\right)$

$\cos gv + 4cv \quad e^4\gamma\left(\frac{1}{24}\right) + \cos gv - 4cv \quad e^4\gamma\left(\frac{1}{24}\right)$

$\cos 2Ev + gv$	$\gamma\left(-\frac{15}{16}\, m e^4\right)$
$\cos 2Ev - gv$	$\gamma\left(-\frac{15}{16}\, m e^4\right)$
$\cos 2Ev + gv - cv$	$e\gamma\left(\frac{11}{32} m^2 e^2\right)$
$\cos 2Ev - gv - cv$	$e\gamma\left(\frac{11}{32} m^2 e^2\right)$
$\cos 2Ev + gv + cv$	$e\gamma\left(-\frac{11}{32} m^2 e^2\right)$
$\cos 2Ev - gv + cv$	$e\gamma\left(-\frac{11}{32} m^2 e^2\right)$
$\cos 2Ev + gv - 2cv$	$e^2\gamma\left(\frac{15}{16}\, m e^2\right)$
$\cos 2Ev + gv + 2cv$	$e^2\gamma\left(\frac{5}{16}\, m e^2\right)$
$\cos 2Ev - gv + 2cv$	$e^2\gamma\left\{\frac{5}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\right\} m e^2$
$\cos 2Ev - gv - 2cv$	$e^2\gamma\left\{\frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}\right\} m e^2$.

$$-\frac{1}{2.3.4.5} F\overline{(v)}^5 \times \frac{dL}{dv} =$$

$$\sin gv + cv \quad e\gamma\left(\frac{1}{12} e^4\right) + \sin gv - cv \quad e\gamma\left(-\frac{1}{12} e^4\right).$$

66. D'après ces résultats, et la valeur de L posée dans les pages 496-501, il est aisè de former l'expression suivante de la latitude de la Lune.

L = Latitude de la Lune en fonction du temps =

$$
\sin g.nt \quad \gamma \left\{
\begin{aligned}
& 1-\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{3}{8}\right)\gamma^2-e^2+\tfrac{33}{128}m^3+\tfrac{241}{512}m^4+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{4}\right)\gamma^4 \\
& +\left(\tfrac{5}{16}-\tfrac{15}{64}=\tfrac{5}{64}\right)e^4+\left(\tfrac{15}{32}-\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{7}{32}\right)e^2\gamma^2 \\
& +\left(\tfrac{7}{64}-\tfrac{9}{128}=\tfrac{5}{128}\right)m^2\gamma^2+\tfrac{27}{8}m^2\varepsilon'^2-\left(\tfrac{3}{64}+\tfrac{3}{4}-\tfrac{377}{512}=\tfrac{31}{512}\right)m^2e^2 \\
& +\left(\tfrac{147}{1024}-\tfrac{9}{256}+\tfrac{165}{1024}=\tfrac{69}{256}\right)m^3\gamma^2-\left(\tfrac{649}{192}-\tfrac{577}{24576}=\tfrac{82495}{24576}\right)m^5 \\
& -\left(\tfrac{7707}{256}+\tfrac{69}{64}-\tfrac{9}{32}+\tfrac{33}{128}=\tfrac{7977}{256}\right)m^3e^2 \\
& +\left(\tfrac{405}{512}+\tfrac{135}{128}=\tfrac{945}{512}\right)me^4-\tfrac{405}{256}me^2\gamma^2-\tfrac{113}{128}m^3\varepsilon'^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\sin 3g.nt \quad \gamma^3 \left\{
\begin{aligned}
& -\left(\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{12}=\tfrac{1}{24}\right)+\left(\tfrac{3}{32}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{11}{32}\right)m^2 \\
& -\left(\tfrac{21}{8}-\tfrac{9}{8}-\tfrac{15}{32}=\tfrac{33}{32}\right)e^2+\left(\tfrac{5}{64}-\tfrac{1}{16}+\tfrac{3}{128}=\tfrac{5}{128}\right)\gamma^2
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\sin 5g.nt \quad \gamma^5\left(\tfrac{1}{80}-\tfrac{3}{64}+\tfrac{5}{128}=\tfrac{3}{640}\right)
$$

$$
\sin g.nt+c.nt \quad e\gamma \left\{
\begin{aligned}
& 1+\left(\tfrac{3}{2}-1=\tfrac{1}{2}\right)m^2-\left(\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{8}\right)\gamma^2 \\
& -\left(2-\tfrac{3}{4}=\tfrac{5}{4}\right)e^2-\left(\tfrac{33}{16}-\tfrac{3}{8}-\tfrac{3}{64}=\tfrac{105}{64}\right)m^3 \\
& +\left(\tfrac{127}{32}-\tfrac{1109}{256}-\tfrac{2451}{128}-\tfrac{121}{64}=-\tfrac{5479}{256}\right)m^4 \\
& -\left(\tfrac{39}{16}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{101}{256}+\tfrac{597}{32}=\tfrac{5693}{256}\right)m^2e^2+\tfrac{9}{4}m^2E'^2 \\
& -\left(9+\tfrac{3}{2}-\tfrac{81}{32}=\tfrac{255}{32}\right)m^2\varepsilon'^2-\left(\tfrac{1199}{512}-\tfrac{5}{8}-\tfrac{143}{256}=\tfrac{593}{512}\right)m^2\gamma^2 \\
& +\left(\tfrac{39}{32}+\tfrac{3}{8}-\tfrac{5}{8}=\tfrac{31}{32}\right)e^2\gamma^2+\left(\tfrac{1}{16}+\tfrac{7}{32}-\tfrac{1}{16}=\tfrac{7}{32}\right)\gamma^4 \\
& +\left(\tfrac{5}{48}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{11}{48}+\tfrac{4}{3}=\tfrac{35}{24}\right)e^4 \\
& -\left(\tfrac{24217}{6144}-\tfrac{19045}{1536}+\tfrac{431329}{4096}+\tfrac{649}{48}=\tfrac{1356205}{12288}\right)m^5 \\
& +\tfrac{15}{4}m^2\left(\varepsilon'^2-E'^2\right)
\end{aligned}
\right.
$$

$$\sin g.nt - c.nt \qquad e\gamma \left\{ \begin{array}{l} -1 + \left(3 - \frac{51}{64} = \frac{141}{64}\right) m^2 + \frac{5}{8} e^2 + \left(\frac{9}{2} + \frac{27}{16} = \frac{99}{16}\right) m^3 \\ - \frac{135}{64} m e^2 + \frac{135}{64} m \gamma^2 + \left(\frac{21331}{2048} + \frac{789}{64} = \frac{46579}{2048}\right) m^4 \\ + \left(\frac{49}{32} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{79}{32}\right) m^2 e^2 - \frac{9}{4} m^2 E'^2 + \left(\frac{227}{64} + \frac{9}{2} = \frac{515}{64}\right) m^2 \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{921}{256} - \frac{5}{4} + \frac{3}{16} = \frac{649}{256}\right) m^2 \gamma^2 + \frac{5}{8} e^2 \gamma^2 - \frac{5}{32} e^4 - \frac{1}{16} \gamma^4 \\ + \left(\frac{251923}{12288} + \frac{5795}{128} - \frac{297}{128} = \frac{779731}{12288}\right) m^5 - \frac{15}{4} m^2 (\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\}$$

$$\sin g.nt - 2c.nt \qquad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{3}{4}\right) + \frac{135}{64} m + \left(\frac{659}{512} + \frac{215}{256} - \frac{27}{64} + \frac{9}{8} = \frac{1449}{512}\right) m^2 \\ + \left(\frac{5}{32} + \frac{1}{16} + \frac{19}{24} - \frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{77}{96}\right) e^2 - \left(\frac{25}{64} + \frac{1}{16} + \frac{5}{64} + \frac{1}{16} = \frac{19}{32}\right) \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin g.nt + 2c.nt \qquad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8}\right) + \left(\frac{15}{32} - \frac{37}{16} + \frac{27}{8} - \frac{3}{8} = \frac{37}{32}\right) m^2 \\ - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{27}{8} = \frac{27}{16}\right) e^2 - \left(\frac{3}{64} + \frac{39}{64} + \frac{9}{16} - \frac{5}{32} = \frac{17}{16}\right) \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin g.nt - 3c.nt \qquad e^3\gamma \left\{ -\left(\frac{19}{24} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{24}\right) + \frac{135}{64} m \right\}$$

$$\sin g.nt + 3c.nt \qquad e^3\gamma \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \right)$$

$$\sin 3g.nt - c.nt \qquad e\gamma^3 \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\right) + \frac{135}{64} m - \left(\frac{53}{32} + 1 - \frac{395}{256} + \frac{3}{8} = \frac{381}{256}\right) m^2 \\ + \left(\frac{15}{16} - \frac{11}{16} + \frac{33}{16} - \frac{1}{2} = \frac{29}{16}\right) e^2 + \left(\frac{27}{128} - \frac{3}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{128}\right) \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 3g.nt + c.nt \qquad e\gamma^3 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{3}{16} = \frac{19}{16}\right) m^2 \\ + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} - \frac{45}{128} = \frac{19}{128}\right) \gamma^2 + \left(\frac{27}{8} - \frac{5}{16} - \frac{13}{2} + 4 = \frac{9}{16}\right) e^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 3g.nt - 2c.nt \qquad e^2\gamma^3 \left(-\frac{25}{64} + \frac{5}{64} + \frac{37}{64} - \frac{1}{16} = \frac{13}{64} \right)$$

$$\sin 3g.nt + 2c.nt \qquad e^2\gamma^3 \left(-\frac{3}{16} + \frac{95}{64} - \frac{25}{16} = -\frac{17}{64} \right)$$

$$\sin g.nt + 4c.nt \qquad e^4\gamma \left(-\frac{5}{64} + \frac{455}{384} - \frac{75}{16} + \frac{125}{24} = \frac{625}{384} \right)$$

$$\sin g.nt - 4c.nt \qquad e^4\gamma \left(\frac{5}{16} - \frac{211}{128} + \frac{27}{16} - \frac{9}{8} = -\frac{99}{128} \right)$$

$$\sin g.nt + c'm.nt \quad \varepsilon'\gamma \left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{8}=\frac{3}{8}\right)m-\frac{69}{64}m^2+\left(\frac{5713}{256}-\frac{975}{256}=\frac{2369}{128}\right)m^3 \\ +\left(\frac{3}{2}-\frac{27}{16}+\frac{9}{4}-\frac{9}{8}=\frac{15}{16}\right)me^2+\left(\frac{123}{64}-\frac{27}{32}+\frac{3}{16}=\frac{81}{64}\right)m\gamma^2 \\ -\left(\frac{27}{16}-\frac{81}{64}=\frac{27}{64}\right)m\varepsilon'^2+\left(\frac{244357}{1536}-\frac{65461}{4096}-\frac{231}{128}=\frac{1736297}{12288}\right)m^4 \end{array}\right\}$$

$$\sin g.nt - c'm.nt \quad \varepsilon'\gamma \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}-\frac{9}{8}=\frac{3}{8}\right)m+\frac{9}{64}m^2-\left(\frac{5427}{256}-\frac{999}{256}=\frac{1107}{64}\right)m^3 \\ -\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{27}{16}-\frac{9}{8}=\frac{15}{16}\right)me^2-\left(\frac{3}{16}+\frac{123}{64}-\frac{27}{32}=\frac{81}{64}\right)m\gamma^2 \\ +\left(\frac{27}{16}-\frac{81}{64}=\frac{27}{64}\right)m\varepsilon'^2+\left(\frac{106081}{4096}-\frac{2497}{16}-\frac{33}{32}=-\frac{537375}{4096}\right)m^4 \end{array}\right\}$$

$$\sin g.nt + 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2\gamma \left\{-\left(\frac{9}{8}-\frac{27}{32}=\frac{9}{32}\right)m-\left(\frac{165}{256}+\frac{27}{16}-\frac{9}{8}=\frac{309}{256}\right)m^2\right\}$$

$$\sin g.nt - 2c'm.nt \quad \varepsilon'^2\gamma \left\{\left(\frac{9}{8}-\frac{27}{32}=\frac{9}{32}\right)m+\left(\frac{99}{256}-\frac{27}{16}+\frac{9}{8}=-\frac{45}{256}\right)m^2\right\}$$

$$\sin g.nt + 3c'm.nt \quad \varepsilon'^3\gamma \left\{\frac{53}{64}-\frac{53}{48}=-\frac{53}{192}\right\} m$$

$$\sin g.nt - 3c'm.nt \quad \varepsilon'^3\gamma \left\{-\frac{53}{64}+\frac{53}{48}=\frac{53}{192}\right\} m$$

$$\sin 3g.nt + c'm.nt \quad \varepsilon'\gamma^3 \left\{\frac{9}{32}-\frac{51}{64}+\frac{9}{16}=\frac{3}{64}\right\} m$$

$$\sin 3g.nt - c'm.nt \quad \varepsilon'\gamma^3 \left\{-\frac{9}{32}+\frac{51}{64}-\frac{9}{16}=-\frac{3}{64}\right\} m$$

$$\sin g.nt + c.nt + c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma \left\{\begin{array}{l} -3.m-\left(\frac{3}{2}+\frac{309}{32}+\frac{3}{2}=\frac{405}{32}\right)m^2 \\ -\left(\frac{9289}{128}-\frac{4853}{128}=\frac{\overset{(*)}{1109}}{32}\right)m^3 \end{array}\right\}$$

$$\sin g.nt - c.nt - c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma \left\{\begin{array}{l} \frac{9}{4}m+\left(\frac{9}{2}+\frac{75}{8}+\frac{3}{2}=\frac{123}{8}\right)m^2 \\ +\left(\frac{18645}{256}-\frac{9}{4}=\frac{\overset{(*)}{18069}}{256}\right)m^3 \end{array}\right\}$$

$$\sin g.nt + c.nt - c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma \left\{\begin{array}{l} 3.m+\left(-\frac{3}{2}+\frac{705}{32}-\frac{3}{2}=\frac{609}{32}\right)m^2 \\ +\left(\frac{18555}{128}-\frac{\overset{(*)}{6195}}{128}=\frac{1545}{16}\right)m^3 \end{array}\right\}$$

(*) Les coefficiens numériques qu'on voit surmontés d'un astérisque dans cette formule doivent être regardés comme incomplets, sous le rapport analytique; parceque ils ont été formés sans avoir égard à la partie correspondante qui entre dans l'expression de L en fonction de v.

$$\sin g.nt - c.nt + c'm.nt \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} -\frac{9}{4}m - \left(\frac{159}{8} - \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{111}{8}\right) m^2 \\ + \left(-\frac{35253}{256} + \frac{9}{4} = -\frac{34677}{256}\right)^{(*)} m^3 \end{array} \right\}$$

$$\sin g.nt - 2c.nt - c'm.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{135}{64} - \frac{21}{64} + \frac{9}{8} + \frac{3}{4} = \frac{117}{32} \right\} m$$

$$\sin g.nt - 2c.nt + c'm.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{135}{64} + \frac{21}{64} - \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{117}{32} \right\} m$$

$$\sin g.nt + 2c.nt - c'm.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{27}{64} + \frac{27}{4} = \frac{405}{64} \right\} m$$

$$\sin g.nt + 2c.nt + c'm.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{27}{64} - \frac{27}{4} = -\frac{405}{64} \right\} m$$

$$\sin g.nt - c.nt + 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(-\frac{27}{16} m \right)$$

$$\sin g.nt - c.nt - 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{27}{16} m \right)$$

$$\sin g.nt + c.nt + 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(-\frac{9}{4} m \right)$$

$$\sin g.nt + c.nt - 2c'm.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{9}{4} m \right)$$

$$\sin f.nt \quad \frac{D^2 (K_{(2)} - \Psi)}{a^2 m^2} \left\{ -\frac{2}{3} - \frac{1}{4} m - \frac{43}{18} m^2 + \varepsilon'^2 - \frac{1}{3} \gamma^2 \right\} \sin 2\omega$$

$$\sin 2E.nt + g.nt \quad \gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{16} m^2 + \frac{59}{24} m^3 - \left(\frac{9}{64} - \frac{3}{32} = \frac{3}{64}\right) m\gamma^2 + \left(\frac{45}{8} - \frac{45}{32} = \frac{135}{32}\right) m e^2 \\ - \left(\frac{9}{128} + \frac{73}{256} = \frac{91}{256}\right) m^2 \gamma^2 + \left(\frac{3869}{576} - \frac{75}{128} = \frac{7063}{1152}\right) m^4 \\ + \left(\frac{951}{32} - \frac{603}{128} - \frac{15}{4} - \frac{99}{16} = \frac{1929}{128}\right) m^2 e^2 - \frac{55}{32} m^2 \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{205535}{13824} - \frac{2035}{1024} = \frac{356125}{27648}\right) m^5 - \left(\frac{295}{48} + \frac{201}{16} = \frac{449}{24}\right) m^3 \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{225}{128} - \frac{43609}{2048} + \frac{60169}{512} - \frac{317}{16} + \frac{45}{32} - \frac{177}{8} + \frac{33}{4} = \frac{134555}{2048}\right) m^3 e^2 \\ - \left(\frac{10151}{12288} + \frac{249}{2048} + \frac{59}{64} = \frac{22973}{12288}\right) m^3 \gamma^2 + \frac{15}{128} m \varepsilon'^2 \gamma^2 \\ - \left(\frac{1305}{256} + \frac{9}{64} - \frac{21}{256} = \frac{165}{32}\right) m e^2 \gamma^2 - \frac{225}{16} m e^2 \varepsilon'^2 \\ - \left(\frac{1845}{256} - \frac{405}{16} + \frac{405}{16} = \frac{1845}{256}\right) m e^4 + \left(\frac{15}{128} - \frac{9}{128} = \frac{3}{64}\right) m \gamma^4 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - g.nt \quad \gamma \left\{ \begin{array}{l}
\frac{3}{8} m + \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{32} = \frac{25}{32} \right) m^2 + \left(\frac{59}{24} - \frac{273}{512} = \frac{2957}{1536} \right) m^3 \\
- \frac{15}{16} m \varepsilon'^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{45}{32} + \frac{3}{2} = \frac{27}{32} \right) m e^2 + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0 \right) m \gamma^2 \\
+ \left(\frac{3869}{576} - \frac{4147}{2048} = \frac{86485}{18432} \right) m^4 - \left(\frac{157}{128} - \frac{21}{128} - \frac{11}{128} = \frac{125}{128} \right) m^2 \gamma^2 \\
- \left(\frac{21}{8} + \frac{115}{32} = \frac{199}{32} \right) m^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{201}{64} - \frac{859}{128} + \frac{169}{16} - 3 - \frac{11}{16} = \frac{423}{128} \right) m^2 e^2 \\
+ \left(\frac{205535}{13824} - \frac{225439}{49152} - \frac{363}{2048} = \frac{4469761}{442368} \right) m^5 \\
+ \left(\frac{1593}{256} - \frac{74507}{6144} + \frac{58819}{1536} - \frac{169}{8} - \frac{9}{8} - \frac{59}{24} + \frac{11}{4} = \frac{21363}{2048} \right) m^3 e^2 \\
+ \left(\frac{555}{2048} - \frac{1243}{768} + \frac{59}{192} - \frac{11}{64} = - \frac{7447}{6144} \right) m^3 \gamma^2 \\
- \left(\frac{865}{192} + \frac{6753}{1024} + \frac{161}{32} = \frac{49555}{3072} \right) m^3 \varepsilon'^2 \\
- \left(\frac{45}{64} - \frac{15}{32} = \frac{15}{64} \right) m \varepsilon'^2 \gamma^2 - \left(\frac{15}{8} + \frac{15}{4} = \frac{45}{8} \right) m e^2 \varepsilon'^2 \\
- \left(\frac{105}{128} + \frac{3}{4} + \frac{63}{32} + \frac{1}{32} = \frac{457}{128} \right) m e^2 \gamma^2 + \frac{39}{128} m \varepsilon'^4 \\
- \left(\frac{81}{256} + \frac{21}{512} - \frac{9}{64} = \frac{111}{512} \right) m \gamma^4 + \frac{45}{64} m b^4 \\
+ \left(\frac{27}{64} - \frac{1641}{512} + \frac{45}{64} - \frac{15}{16} = - \frac{1545}{512} \right) m e^4 + \frac{9}{8} m^3 \left(\varepsilon'^2 - E'^2 \right)
\end{array} \right.$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt \quad \varepsilon' \gamma \left\{ \begin{array}{l}
- \frac{3}{8} m - \left(\frac{57}{64} + \frac{29}{32} = \frac{115}{64} \right) m^2 \\
- \left(\frac{327}{256} + \frac{155}{384} + \frac{33}{32} = \frac{2083}{768} \right) m^3 \\
- \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{45}{32} = \frac{27}{32} \right) m e^2 \\
+ \frac{3}{64} m \varepsilon'^2 + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0 \right) m \gamma^2 \\
+ \left(\frac{36577}{4608} - \frac{59}{16} + \frac{33}{32} = \frac{\overset{(*)}{24337}}{4608} \right) m^4 \\
+ \frac{263}{256} m^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{101}{128} - \frac{83}{256} = \frac{\overset{(*)}{119}}{256} \right) m^2 \gamma^2 \\
+ \left(\frac{153}{256} - \frac{91}{32} + \frac{3}{2} - \frac{79}{32} = - \frac{\overset{(*)}{823}}{256} \right) m^2 e^2
\end{array} \right.$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt \;\; \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{8} m + \left(\frac{65}{64} + \frac{95}{32} = \frac{255}{64}\right) m^2 \\ + \left(\frac{1625}{128} - \frac{5}{256} + \frac{33}{32} = \frac{3509}{256}\right) m^3 \\ + \left(\frac{7}{2} - \frac{105}{32} + \frac{7}{4} = \frac{63}{32}\right) m e^2 \\ - \frac{123}{64} m \varepsilon'^2 + \left(\frac{7}{16} - \frac{7}{16} = 0\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{25189}{512} + \frac{59}{16} - \frac{99}{32} = \frac{\overset{(*)}{25493}}{512}\right) m^4 \\ + \left(\frac{1067}{32} - \frac{3921}{256} - \frac{21}{2} + \frac{13}{32} = \frac{\overset{(*)}{2031}}{256}\right) m^2 e^2 \\ - \frac{2325}{256} m^2 \varepsilon'^2 - \left(\frac{597}{128} - \frac{149}{256} = \frac{\overset{(*)}{1045}}{256}\right) m^2 \gamma^2 \end{array} \right.$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + g.nt \;\; \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} - \frac{11}{32} m^2 - \left(\frac{99}{32} - \frac{61}{384} = \frac{1127}{384}\right) m^3 \\ + \left(\frac{9}{64} - \frac{3}{32} = \frac{3}{64}\right) m \gamma^2 - \left(\frac{45}{8} - \frac{45}{32} = \frac{135}{32}\right) m e^2 \\ + \left(\frac{23177}{9216} - \frac{177}{16} + \frac{33}{32} = - \frac{\overset{(*)}{69271}}{9216}\right) m^4 \\ + \frac{11}{256} m^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{73}{512} + \frac{195}{256} = \frac{\overset{(*)}{463}}{512}\right) m^2 \gamma^2 \\ + \left(\frac{33}{8} + \frac{15}{8} - \frac{711}{32} - \frac{207}{256} = - \frac{\overset{(*)}{4359}}{256}\right) m^2 e^2 \end{array} \right.$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + g.nt \;\; \varepsilon'\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{77}{32} m^2 + \left(\frac{1553}{128} + \frac{99}{32} = \frac{1949}{128}\right) m^3 \\ - \left(\frac{21}{64} - \frac{7}{32} = \frac{7}{64}\right) m \gamma^2 + \left(\frac{105}{8} - \frac{105}{32} = \frac{315}{32}\right) m e^2 \\ + \left(\frac{55931}{1024} + \frac{177}{16} - \frac{99}{32} = \frac{\overset{(*)}{64091}}{1024}\right) m^4 \\ - \frac{1353}{256} m^2 \varepsilon'^2 - \left(\frac{481}{512} + \frac{393}{256} = \frac{\overset{(*)}{1267}}{512}\right) m^2 \gamma^2 \\ + \left(\frac{699}{8} - \frac{3561}{256} - \frac{105}{8} + \frac{117}{32} = \frac{\overset{(*)}{16383}}{256}\right) m^2 e^2 \end{array} \right.$$

$$\sin 2E.nt - g.nt - c.nt \quad e\gamma \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2} m + \left(\frac{153}{16} - 3 = \frac{105}{16}\right) m^2 \\ + \left(\frac{4609}{128} - \frac{15}{2} + \frac{11}{8} = \frac{3825}{128}\right) m^3 \\ - \frac{3}{4} m e^2 - \frac{15}{4} m \varepsilon'^2 - \frac{87}{64} m \gamma^2 \\ + \left(\frac{354313}{3072} + \frac{59}{12} - \frac{1269}{64} = \frac{102835}{1024}\right) m^4 \\ - \left(\frac{351}{32} - \frac{15}{2} = \frac{111}{32}\right) m^2 \varepsilon'^2 - \left(\frac{189}{32} + \frac{21}{64} + \frac{9}{4} = \frac{543}{64}\right) m^2 e^2 \\ - \left(\frac{3}{32} + \frac{2853}{256} - \frac{9}{4} = \frac{2301}{256}\right) m^2 \gamma^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2E.nt + g.nt + c.nt \quad e\gamma \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{11}{4} - 1 = \frac{7}{4}\right) m^2 + \left(\frac{59}{6} - \frac{119}{48} - \frac{11}{8} = \frac{287}{48}\right) m^3 \\ + \left(\frac{15}{16} - \frac{135}{16} + 15 = \frac{15}{2}\right) m e^2 - \left(\frac{9}{16} - \frac{9}{64} = \frac{27}{64}\right) m \gamma^2 \\ + \left(1 - \frac{8909}{1152} + \frac{2083}{72} - \frac{59}{12} = \frac{19907}{1152}\right) m^4 \\ + \left(\frac{159}{64} - \frac{2321}{64} + \frac{135}{32} + \frac{731}{8} - 15 - 22 = \frac{397}{16}\right) m^2 e^2 \\ - \left(\frac{55}{8} - \frac{5}{2} = \frac{35}{8}\right) m^3 \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{81}{256} - \frac{63}{64} + \frac{9}{32} - \frac{11}{8} = -\frac{451}{256}\right) m^2 \gamma^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2E.nt - g.nt + c.nt \quad e\gamma \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{8} m + \left(1 - \frac{53}{32} + \frac{11}{8} = \frac{23}{32}\right) m^2 \\ + \left(\frac{31}{24} - \frac{1837}{1536} + \frac{59}{12} - \frac{11}{8} = \frac{5587}{1536}\right) m^3 - \frac{15}{16} m \varepsilon'^2 \\ + \left(\frac{183}{64} - \frac{63}{16} + \frac{27}{4} = \frac{363}{64}\right) m e^2 - \left(\frac{63}{64} - \frac{3}{8} = \frac{39}{64}\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{62201}{4608} - \frac{67}{288} - \frac{138431}{18432} - \frac{59}{12} - \frac{33}{32} = -\frac{3547}{18432}\right) m^4 \\ + \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4} + \frac{3657}{512} - \frac{1503}{64} + \frac{63}{16} \\ + \frac{773}{32} - \frac{27}{2} - \frac{11}{4} = -\frac{1919}{512} \end{array}\right\} m^2 e^2 \\ + \left(\frac{1471}{512} - \frac{3}{4} - \frac{151}{64} - \frac{3}{8} + \frac{11}{32} = -\frac{137}{512}\right) m^2 \gamma^2 \\ + \left(\frac{11}{32} - \frac{5}{2} - \frac{55}{16} = -\frac{179}{32}\right) m^2 \varepsilon'^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2E.nt + g.nt - c.nt \quad e\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{8}m + \left(\frac{285}{32} - \frac{11}{8} = \frac{241}{32}\right) m^2 \\ + \left(\frac{18067}{512} - \frac{15}{8} - \frac{59}{12} + \frac{11}{8} = \frac{45881}{1536}\right) m^3 - \frac{75}{16} m \varepsilon'^2 \\ - \left(\frac{45}{64} - \frac{45}{8} + \frac{15}{2} = \frac{165}{64}\right) m e^2 - \left(\frac{111}{64} + \frac{3}{16} = \frac{123}{64}\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{709997}{6144} - \frac{445}{64} - \frac{2083}{144} + \frac{59}{12} - \frac{33}{32} = \frac{1806823}{18432}\right) m^4 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{8} - \frac{3095}{512} + \frac{489}{32} - \frac{45}{8} \\ - \frac{1171}{32} + 15 + \frac{11}{4} = - \frac{7479}{512} \end{array} \right\} m^2 e^2 \\ - \left(\frac{165}{16} + \frac{245}{16} = \frac{205}{8}\right) m^2 \varepsilon'^2 \\ - \left(1 + \frac{4021}{512} + 2 - \frac{3}{16} - \frac{11}{32} = \frac{5285}{512}\right) m^2 \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 2c.nt + g.nt \quad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{15}{8} - \frac{15}{64} - \frac{45}{32} = \frac{15}{64}\right) m \\ + \left(\frac{423}{128} - \frac{915}{512} - \frac{1107}{128} + \frac{15}{4} + \frac{11}{32} = - \frac{1555}{512}\right) m^2 \\ + \left(\frac{142713}{4096} - \frac{2541}{256} - \frac{18315}{512} + \frac{1107}{64} - \frac{135}{32} - \frac{11}{8} = \frac{3473}{4096}\right) m^3 \\ + \left(\frac{531}{512} + \frac{5}{32} - \frac{117}{256} - \frac{225}{512} = \frac{19}{64}\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{105}{256} - \frac{195}{256} + \frac{345}{256} + \frac{15}{16} = \frac{495}{256}\right) m e^2 \\ + \left(- \frac{225}{64} - \frac{75}{128} + \frac{75}{16} = \frac{75}{128}\right) m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2c.nt - g.nt \quad e^2\gamma \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{9}{16} - \frac{9}{64} = \frac{27}{64}\right) m \\ + \left(\frac{945}{256} - \frac{15}{32} - \frac{483}{128} - \frac{3}{8} + \frac{99}{32} = \frac{555}{256}\right) m^2 \\ + \left(\frac{93}{256} + \frac{1965}{512} - \frac{11123}{1024} + \frac{161}{64} - \frac{27}{64} - \frac{33}{8} = - \frac{8901}{1024}\right) m^3 \\ + \left(\frac{15}{128} - \frac{3}{64} - \frac{369}{128} + \frac{81}{64} = - \frac{99}{64}\right) m \gamma^2 \\ + \left(\frac{2505}{256} - \frac{453}{256} + \frac{81}{64} + \frac{27}{4} = \frac{513}{32}\right) m e^2 \\ - \left(\frac{45}{32} - \frac{45}{128} = \frac{135}{128}\right) m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 2c.nt - g.nt \quad e^2\gamma \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{99}{64} + \frac{27}{16} - \frac{15}{16} = \frac{147}{64}\right) m \\ &+ \left(\frac{673}{256} - \frac{333}{128} + \frac{1107}{128} + \frac{27}{8} + \frac{11}{32} = \frac{3173}{256}\right) m^2 \\ &+ \left(\frac{124471}{6144} + \frac{36855}{1024} + \frac{1107}{64} - \frac{81}{64} + \frac{11}{8} = \frac{\overset{(*)}{435649}}{6144}\right) m^3 \\ &- \left(\frac{153}{128} + \frac{495}{256} + \frac{3}{32} = \frac{\overset{(*)}{825}}{256}\right) m\gamma^2 \\ &+ \left(\frac{27}{64} + \frac{55}{256} - \frac{9}{64} - \frac{7}{8} = -\frac{\overset{(*)}{97}}{256}\right) m e^2 \\ &- \left(\frac{495}{128} + \frac{135}{32} = \frac{\overset{(*)}{1035}}{128}\right) m \varepsilon'^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2c.nt + g.nt \quad e^2\gamma \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{65}{64} - \frac{805}{128} + \frac{275}{32} = \frac{425}{128}\right) m^2 \\ &+ \left(\frac{161}{96} - \frac{3265}{192} + \frac{161}{64} - \frac{55}{8} = -\frac{\overset{(*)}{315}}{16}\right) m^3 \\ &+ \left(\frac{2275}{256} - \frac{75}{128} + \frac{625}{16} = \frac{\overset{(*)}{12125}}{256}\right) m e^2 \\ &+ \left(\frac{695}{512} - \frac{27}{256} = \frac{\overset{(*)}{641}}{512}\right) m\gamma^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 3g.nt \quad \gamma^3 \left\{ \left(\frac{21}{64} - \frac{3}{32} = \frac{15}{64}\right) m - \left(\frac{153}{256} + \frac{11}{128} - \frac{21}{64} = \frac{91}{256}\right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 3g.nt \quad \gamma^3 \left(\frac{11}{32} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - g.nt \quad \varepsilon'^2\gamma \left\{ \frac{51}{32} m + \left(\frac{789}{256} + \frac{485}{64} = \frac{2729}{256}\right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - g.nt \quad \varepsilon'^2\gamma \left\{ -\frac{9}{32} m - \left(\frac{93}{256} - \frac{9}{64} = \frac{57}{256}\right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt + g.nt \quad \varepsilon'^2\gamma \left(\frac{187}{32} m^2 \right)$$

$$\sin 2E.nt - 3g.nt - c.nt \quad e\gamma^3 \left\{ \frac{15}{32} + \frac{3}{16} = \frac{21}{32} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt + 3g.nt - c.nt \quad e\gamma^3 \left\{ \frac{45}{64} - \frac{15}{16} = -\frac{15}{64} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - 3g.nt + c.nt \quad e\gamma^3 \left(-\frac{33}{64} m \right)$$

$$\sin 2E.nt - 3c.nt + g.nt \quad e^3\gamma \left(\frac{15}{16} m \right)$$

$$\sin 2E.nt + 3c.nt - g.nt \qquad e^3\gamma\left\{\ \frac{1}{16} - \frac{9}{16} + 1 = \frac{1}{2}\right\} m$$

$$\sin 2E.nt - 3c.nt - g.nt \qquad e^3\gamma\left\{-1 + \frac{27}{16} + 4 = \frac{75}{16}\right\} m$$

$$\sin 2E.nt + 3c'm.nt - g.nt \qquad \varepsilon'^3\gamma\left(-\frac{1}{64}m\right)$$

$$\sin 2E.nt - 3c'm.nt - g.nt \qquad \varepsilon'^3\gamma\left(\frac{169}{64}m\right)$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - 3g.nt \qquad \varepsilon'\gamma^3\left\{\ \frac{3}{32} - \frac{21}{64} = -\frac{15}{64}\right\} m$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - 3g.nt \qquad \varepsilon'\gamma^3\left\{-\frac{7}{32} + \frac{49}{64} = \frac{35}{64}\right\} m$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{-\frac{15}{8}m - \left(\frac{79}{16} - \frac{15}{8} = \frac{49}{16}\right) m^2\right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{-\frac{3}{2}m - \left(\frac{3}{2} - \frac{111}{64} = \frac{15}{64}\right) m^2\right\}$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l} \frac{35}{8}m + \left(\frac{205}{8} + \frac{13}{16} = \frac{423}{16}\right) m^2 \\ + \left(\frac{63147}{512} + 4 - \frac{39}{32} = \frac{\overset{(*)}{63571}}{512}\right) m^3 \\ - \frac{\overset{(*)}{615}}{64} m\varepsilon'^2 - \left(\frac{231}{64} + \frac{21}{32} = \frac{\overset{(*)}{273}}{64}\right) m\gamma^2 \\ + \left(\frac{105}{8} - \frac{35}{16} - \frac{35}{2} = -\frac{\overset{(*)}{105}}{16}\right) me^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{\begin{array}{l} \frac{7}{2}m + \left(\frac{255}{8} - \frac{21}{2} = \frac{171}{8}\right) m^2 \\ + \left(\frac{18991}{128} + \frac{15}{32} = \frac{\overset{(*)}{19031}}{128}\right) m^3 \\ - \frac{\overset{(*)}{123}}{16} m\varepsilon'^2 - \frac{\overset{(*)}{203}}{64} m\gamma^2 - \frac{\overset{(*)}{63}}{16} me^2 \end{array}\right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{\ \frac{1}{2}m - \left(\frac{7}{16} + \frac{29}{16} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}\right) m^2\right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma\left\{\ \frac{1}{2} - \frac{11}{8} = -\frac{7}{8}\right\} m^2$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + g.nt + c.nt \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{7}{2} + \frac{77}{8} = \frac{49}{8} \right\} m^2$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt + c.nt \quad e\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{7}{8}\, m + \left(-\frac{75}{16} + \frac{95}{16} + \frac{7}{2} = \frac{19}{4} \right) m^2 \right\}$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + g.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{15}{64} - \frac{45}{32} + \frac{15}{8} = \frac{15}{64} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{15}{16} - \frac{99}{64} - \frac{27}{16} = -\frac{147}{64} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + g.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{35}{64} + \frac{105}{32} - \frac{35}{8} = -\frac{35}{64} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt - 2c.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{35}{16} + \frac{231}{64} + \frac{63}{16} = \frac{343}{64} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt + 2c.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ -\frac{9}{16} + \frac{9}{64} = -\frac{27}{64} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt + 2c.nt \quad e^2\varepsilon'\gamma \left\{ \frac{21}{16} - \frac{21}{64} = \frac{63}{64} \right\} m$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt + g.nt - c.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{255}{32}\, m \right)$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - g.nt - c.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{51}{8}\, m \right)$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt + g.nt - c.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(-\frac{45}{32}\, m \right)$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - g.nt - c.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(-\frac{9}{8}\, m \right)$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - g.nt + c.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(\frac{51}{32}\, m \right)$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - g.nt + c.nt \quad e\varepsilon'^2\gamma \left(-\frac{9}{32}\, m \right)$$

$$\sin E.nt + g.nt \quad \gamma b^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{16} m - \left(\frac{93}{16} - \frac{5}{8} = \frac{83}{16} \right) m^2 - \left(\frac{909}{32} - \frac{165}{128} = \overset{(*)}{\frac{3471}{128}} \right) m^3 \\ + \left(\frac{15}{4} - \frac{135}{32} = -\overset{(*)}{\frac{15}{32}} \right) m\, \varepsilon'^2 - \left(\frac{105}{16} + \frac{15}{16} - \frac{15}{4} = \overset{(*)}{\frac{15}{4}} \right) m\, e^2 \\ + \left(\frac{345}{128} + \frac{15}{64} = \overset{(*)}{\frac{375}{128}} \right) m \gamma^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin E.nt - g.nt \qquad \gamma b^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{15}{16} m - \left(\frac{699}{128} - \frac{9}{4} = \frac{411}{128} \right) m^2 - \frac{\overset{(*)}{13743}}{512} m^3 \\ -\frac{\overset{(*)}{15}}{16} m e^2 + \frac{\overset{(*)}{195}}{128} m \gamma^2 - \frac{\overset{(*)}{15}}{16} m \varepsilon'^2 \end{array} \right\}$$

$$\sin E.nt + g.nt - c.nt \qquad e\gamma b^2 \left\{ -\frac{165}{64} + \frac{15}{16} + \frac{75}{32} = \frac{45}{64} \right\} m$$

$$\sin E.nt - g.nt - c.nt \qquad e\gamma b^2 \left\{ -\frac{165}{64} - \frac{15}{16} + \frac{45}{16} = -\frac{45}{64} \right\} m$$

$$\sin E.nt + g.nt + c.nt \qquad e\gamma b^2 \left\{ \frac{45}{64} - \frac{45}{16} = -\frac{135}{64} \right\} m$$

$$\sin E.nt - g.nt + c.nt \qquad e\gamma b^2 \left\{ \frac{45}{64} - \frac{15}{16} - \frac{45}{16} = -\frac{195}{64} \right\} m$$

$$\sin E.nt + c'm.nt + g.nt \qquad \varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8} m \right)$$

$$\sin E.nt + c'm.nt - g.nt \qquad \varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8} m \right)$$

$$\sin E.nt - c'm.nt + g.nt \qquad \varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{15}{16} m \right)$$

$$\sin E.nt - c'm.nt - g.nt \qquad \varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{15}{32} m \right)$$

$$\sin E.nt + c'm.nt + g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma b^2 \left\{ \frac{25}{16} - \frac{5}{4} - \frac{5}{8} = -\frac{5}{16} \right\}$$

$$\sin E.nt + c'm.nt - g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma b^2 \left\{ \frac{25}{16} + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = \frac{25}{16} \right\}$$

$$\sin E.nt + c'm.nt + g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma b^2 \left\{ -\frac{15}{16} + \frac{15}{4} = \frac{45}{16} \right\}$$

$$\sin E.nt + c'm.nt - g.nt + c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma b^2 \left\{ -\frac{15}{16} + \frac{5}{4} + \frac{5}{6} = \frac{55}{48} \right\}$$

$$\sin 3E.nt - g.nt \qquad \gamma b^2 \left\{ -\frac{5}{8} - \frac{15}{128} = -\frac{95}{128} \right\} m^2$$

$$\sin 3E.nt + g.nt \qquad \gamma b^2 \left(\frac{15}{64} m^2 \right)$$

$$\sin 3E.nt - g.nt - c.nt \qquad e\gamma b^2 \left(-\frac{25}{32} m \right)$$

$$\sin 3E.nt + c'm.nt - g.nt \qquad \varepsilon'\gamma b^2 \left(\frac{15}{32} m \right)$$

$$\sin 4E.nt - g.nt \qquad \gamma \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{363}{512} - \frac{21}{256} + \frac{75}{128} = \frac{621}{512}\right) m^4 \\ & - \left(\frac{27}{512} - \frac{9}{256} = \frac{9}{512}\right) m^2 \gamma^2 \\ & + \left(\frac{135}{64} - \frac{135}{256} = \frac{405}{256}\right) m^2 e^2 \\ & + \left(-\frac{379397}{122880} - \frac{121}{128} + \frac{649}{128} = \frac{127483}{122880}^{(*)}\right) m^5 \\ & - \frac{165}{128} m^3 \varepsilon'^2 + \left(\frac{99}{256} - \frac{219}{1024} = \frac{177}{1024}^{(*)}\right) m^3 \gamma^2 \\ & + \left(\frac{1851}{256} - \frac{3429}{512} - \frac{45}{16} + \frac{297}{32} = \frac{3585}{512}^{(*)}\right) m^3 e^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 4E.nt + g.nt \qquad \gamma \left\{ -\frac{283}{512} + \frac{605}{512} = \frac{161}{256} \right\} m^4$$

$$\sin 4E.nt - 3g.nt \qquad \gamma^3 \left(\frac{45}{512} m^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt + g.nt - c.nt \qquad e\gamma \left\{ -\frac{15}{8} + \frac{165}{32} = \frac{105}{32} \right\} m^3$$

$$\sin 4E.nt - g.nt - c.nt \qquad e\gamma \left\{ \frac{45}{64} m^2 + \left(\frac{15}{8} + \frac{15}{64} + \frac{33}{16} = \frac{267}{64} \right) m^3 \right\}$$

$$\sin 4E.nt - g.nt + c.nt \qquad e\gamma \left\{ -\frac{3}{8} + \frac{33}{32} = \frac{21}{32} \right\} m^3$$

$$\sin 4E.nt - g.nt - 2c.nt \qquad e^2\gamma \left\{ \frac{225}{256} - \frac{405}{512} + \frac{135}{128} = \frac{585}{512} \right\} m^2$$

$$\sin 4E.nt + g.nt - 2c.nt \qquad e^2\gamma \left\{ \frac{675}{128} - \frac{675}{512} = \frac{2025}{512} \right\} m^2$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - g.nt \qquad \varepsilon'\gamma \left(-\frac{99}{256} m^3 \right)$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - g.nt \qquad \varepsilon'\gamma \left(\frac{385}{256} m^3 \right)$$

$$\sin 4E.nt + c'm.nt - g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma \left(-\frac{45}{32} m^2 \right)$$

$$\sin 4E.nt - c'm.nt - g.nt - c.nt \qquad e\varepsilon'\gamma \left(\frac{105}{32} m^2 \right).$$

67. Cela posé, si l'on réduit les coefficiens de cette expression en nombres, on trouvera;

L = Latitude de la Lune en fonction du temps =

sin g.nt	{+18576″,000(1) − 112″,382(3) +2″,004(4) + 0″,804(5) − 0″,888(6)}	= + 18465″,538
sin 3g.nt	{−6″,278(3) − 0″,146(5)}	= − 6″,424
sin 5g.nt	{+0″,006(5)}	= + 0″,006
sin g.nt + c.nt	{+1019″,058(2) − 6″,145(4) −0″,700(5) − 1″,056(6) −0″,263(7) + 21″,378 $(\varepsilon'^2 - E'^2)$}	= + 1010″,894
sin g.nt − c.nt	{−1019″,058(2) + 14″,474(4) +3″,023(5) + 0″,901(6) +0″,151(7) − 21″,378 $(\varepsilon'^2 - E'^2)$}	= − 1000″,509
sin g.nt − 2c.nt	{−41″,911(3) + 8″,817(4) + 0″,751(5)}	= − 32″,343
sin g.nt + 2c.nt	{+62″,865(3) − 0″,403(5)}	= + 62″,462
sin g.nt − 3c.nt	{−2″,171(4) + 0″,484(5)}	= − 1″,687
sin g.nt + 3c.nt	{+4″,086(4)} (*)	= + 4″,086
sin 3g.nt − c.nt	{−4″,132(4) + 1″,304(5) − 0″,020(6)}	= − 2″,848
sin 3g.nt + c.nt	{−1″,033(4) + 0″,158(6)}	= − 0″,875
sin 3g.nt − 2c.nt	{+0″,092(5)}	= + 0″,092
sin 3g.nt + 2c.nt	{−0″,121(5)}	= − 0″,121
sin g.nt + 4c.nt	{+0″,274(5)}	= + 0″,274
sin g.nt − 4c.nt	{−0″,130(5)}	= − 0″,130

(*) Le second terme de ce coefficient est du sixième ordre.

$\sin g.nt + c'm.nt$	{−8″,761 (3) − 1″,884 (4) + 2″,716 (5) + 1″,381 (6) + 1″,1 (ind.)}	= −5″,448
$\sin g.nt - c'm.nt$	{+8″,761 (3) + 0″,246 (4) − 2″,557 (5) − 1″,283 (6) − 1″,0 (ind.)}	= +4″,167
$\sin g.nt + 2c'm.nt$	{−0″,111 (4) − 0″,035 (5)}	= −0″,146
$\sin g.nt - 2c'm.nt$	{+0″,111 (4) − 0″,005 (5)}	= +0″,106
$\sin g.nt + 3c'm.nt$	{−0″,002 (5)}	= −0″,002
$\sin g.nt - 3c'm.nt$	{+0″,002 (5)}	= +0″,002
$\sin 3g.nt + c'm.nt$	{+0″,009 (5)}	= +0″,009
$\sin 3g.nt - c'm.nt$	{−0″,009 (5)}	= −0″,009
$\sin g.nt + c.nt + c'm.nt$	{−3″,844 (4) − 1″,213 (5) − 0″,248 (6)}	= −5″,305
$\sin g.nt - c.nt - c'm.nt$	{+2″,884 (4) + 1″,474 (5) + 0″,506 (6)}	= +4″,864
$\sin g.nt + c.nt - c'm.nt$	{+3″,844 (4) + 1″,824 (5) + 0″,692 (6)}	= +6″,360
$\sin g.nt - c.nt + c'm.nt$	{−2″,884 (4) − 1″,330 (5) − 0″,969 (6)}	= −5″,183
$\sin g.nt - 2c.nt - c'm.nt$	{+0″,257 (5)}	= +0″,257
$\sin g.nt - 2c.nt + c'm.nt$	{−0″,257 (5)}	= −0″,257
$\sin g.nt + 2c.nt - c'm.nt$	{+0″,445 (5)}	= +0″,445
$\sin g.nt + 2c.nt + c'm.nt$	{−0″,445 (5)}	= −0″,445
$\sin g.nt - c.nt + 2c'm.nt$	{−0″,036 (5)}	= −0″,036
$\sin g.nt - c.nt - 2c'm.nt$	{+0″,036 (5)}	= +0″,036
$\sin g.nt + c.nt + 2c'm.nt$	{−0″,049 (5)}	= −0″,049
$\sin g.nt + c.nt - 2c'm.nt$	{+0″,049 (5)}	= +0″,049
$\sin f.nt$	{−7″,886}	= −7″,886

$$\sin 2E.nt + g.nt \quad \left\{\begin{array}{l} +71'',457\,(3) + 20'',347\,(4) \\ +7'',951\,(5) + 1'',653\,(6) \\ +0'',3\,(\text{ind.}) \end{array}\right\} = +101'',708$$

$$\sin 2E.nt - g.nt \quad \left\{\begin{array}{l} +521'',066\,(2) + 81'',200\,(3) \\ +18'',125\,(4) + 0'',689\,(5) \\ +0'',396\,(6) + 8'',746\,(\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array}\right\} = +621'',476$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt \quad \left\{\begin{array}{l} -8'',761\,(3) - 3'',140\,(4) \\ -0'',413\,(5) + 0'',042\,(6) \end{array}\right\} = -\ 12'',272$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt \quad \left\{\begin{array}{l} +20'',443\,(3) + 6'',963\,(4) \\ +1'',915\,(5) + 0'',214\,(6) \end{array}\right\} = +\ 29'',535$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + g.nt \quad \left\{\begin{array}{l} -0'',607\,(4) - 0'',682\,(5) \\ +0'',095\,(6) \end{array}\right\} = -\ 1'',194$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + g.nt \quad \left\{\begin{array}{l} +4'',204\,(4) + 2'',657\,(5) \\ +0'',732\,(6) \end{array}\right\} = +\ 7'',593$$

$$\sin 2E.nt - g.nt - c.nt \quad \left\{\begin{array}{l} +114'',317\,(3) + 37'',411\,(4) \\ +11'',650\,(5) + 2'',637\,(6) \\ +0'',6\,(\text{ind.}) \end{array}\right\} = +166'',615$$

$$\sin 2E.nt + g.nt + c.nt \quad \left\{\begin{array}{l} +9'',976\,(4) + 4'',017\,(5) \\ +0'',681\,(6) + 0'',1\,(\text{ind.}) \end{array}\right\} = +\ 14'',774$$

$$\sin 2E.nt - g.nt + c.nt \quad \left\{\begin{array}{l} +28'',579\,(3) + 4'',097\,(4) \\ +2'',454\,(5) - 0'',091\,(6) \end{array}\right\} = +\ 35'',039$$

$$\sin 2E.nt + g.nt - c.nt \quad \left\{\begin{array}{l} +142'',897\,(3) + 42'',934\,(4) \\ +10'',858\,(5) - 0'',465\,(6) \end{array}\right\} = +196'',224$$

$$\sin 2E.nt - 2c.nt + g.nt \quad \left\{\begin{array}{l} -0'',980\,(4) - 0'',950\,(5) \\ +0'',047\,(6) \end{array}\right\} = -\ 1'',883$$

$\sin 2E.nt + 2c.nt - g.nt$	$\left\{ \begin{array}{l} +1'',764\,(4) + 0'',681\,(5) \\ -0'',068\,(6) \end{array} \right\}$	$= +\ 2'',377$
$\sin 2E.nt - 2c.nt - g.nt$	$\left\{ \begin{array}{l} +9'',602\,(4) + 4'',879\,(5) \\ +1'',406\,(6) + 0'',33\,(\text{ind.}) \end{array} \right\}$	$= +\ 16'',217$
$\sin 2E.nt + 2c.nt + g.nt$	$\{+1'',038\,(5) - 0'',171\,(6)\}$	$= +\ 0'',867$
$\sin 2E.nt - 3g.nt$	$\{+2'',648\,(4) - 0'',300\,(5)\}$	$= +\ 2'',384$
$\sin 2E.nt + 3g.nt$	$\{+0'',241\,(5)\}$	$= +\ 0'',241$
$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - g.nt$	$\{+0'',313\,(4) + 0'',314\,(5)\}$	$= +\ 0'',627$
$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - g.nt$	$\{-0'',055\,(4) - 0'',007\,(5)\}$	$= -\ 0'',062$
$\sin 2E.nt - 2c'm.nt + g.nt$	$\{+0'',172\,(5)\}$	$= +\ 0'',172$
$\sin 2E.nt - 3g.nt - c.nt$	$\{+0'',406\,(5)\}$	$= +\ 0'',406$
$\sin 2E.nt + 3g.nt - c.nt$	$\{-0'',145\,(5)\}$	$= -\ 0'',145$
$\sin 2E.nt - 3g.nt + c.nt$	$\{-0'',318\,(5)\}$	$= -\ 0'',318$
$\sin 2E.nt - 3c.nt + g.nt$	$\{+0'',215\,(5)\}$	$= +\ 0'',215$
$\sin 2E.nt + 3c.nt - g.nt$	$\{+0'',115\,(5)\}$	$= +\ 0'',115$
$\sin 2E.nt - 3c.nt - g.nt$	$\{+1'',075\,(5)\}$	$= +\ 1'',075$
$\sin. 2E.nt + 3c'm.nt - g.nt$	$\{-0'',0001\,(5)\}$	$= -\ 0'',0001$
$\sin 2E.nt - 3c'm.nt - g.nt$	$\{+0'',017\,(5)\}$	$= +\ 0'',017$
$\sin 2E.nt + c'm.nt - 3g.nt$	$\{-0'',044\,(5)\}$	$= -\ 0'',044$
$\sin 2E.nt - c'm.nt - 3g.nt$	$\{+0'',106\,(5)\}$	$= +\ 0'',106$
$\sin 2E.nt + c'm.nt + g.nt - c.nt$	$\{-2'',402\,(4) - 0'',290\,(5)\}$	$= -\ 2'',692$
$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt - c.nt$	$\{-1'',922\,(4) - 0'',023\,(5)\}$	$= -\ 1'',945$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + g.nt - c.nt \quad \left\{\begin{matrix} +5'',606\,(4) + 2'',534\,(5) \\ +0'',786\,(6) + 0'',3\,(\text{ind.}) \end{matrix}\right\} = +9'',226$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt - c.nt \quad \left\{\begin{matrix} +4'',485\,(4) + 2'',049\,(5) \\ +1'',017\,(6) + 0'',7\,(\text{ind.}) \end{matrix}\right\} = +8'',241$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt + c.nt \quad \{+0'',641\,(4) + 0'',264\,(5)\} = +0'',905$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + g.nt + c.nt \quad \{-0'',084\,(5)\} = -0'',084$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + g.nt + c.nt \quad \{+0'',588\,(5)\} = +0'',588$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt + c.nt \quad \{+1'',121\,(4) + 0'',455\,(5)\} = +1'',576$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt + g.nt - 2c.nt \quad \{+0'',017\,(5)\} = +0'',017$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt - 2c.nt \quad \{-0'',162\,(5)\} = -0'',162$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt + g.nt - 2c.nt \quad \{-0'',039\,(5)\} = -0'',039$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt - 2c.nt \quad \{+0'',373\,(5)\} = +0'',373$$

$$\sin 2E.nt + c'm.nt - g.nt + 2c.nt \quad \{-0'',030\,(5)\} = -0'',030$$

$$\sin 2E.nt - c'm.nt - g.nt + 2c.nt \quad \{+0'',069\,(5)\} = +0'',069$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt + g.nt - c.nt \quad \{+0'',086\,(5)\} = +0'',086$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - g.nt - c.nt \quad \{+0'',137\,(5)\} = +0'',137$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt + g.nt - c.nt \quad \{-0'',030\,(5)\} = -0'',030$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - g.nt - c.nt \quad \{-0'',024\,(5)\} = -0'',024$$

$$\sin 2E.nt - 2c'm.nt - g.nt + c.nt \quad \{+0'',034\,(5)\} = +0'',034$$

$$\sin 2E.nt + 2c'm.nt - g.nt + c.nt \quad \{-0'',006\,(5)\} = -0'',006$$

$$\sin E.nt + g.nt \quad \{-3'',283\,(4) - 1'',245\,(5) - 0'',488\,(6)\} = -5'',016$$

$$\sin E.nt - g.nt \quad \{-3'',283\,(4) - 0'',841\,(5) - 0'',494\,(6)\} = -4'',618$$

$\sin E.nt+g.nt-c.nt$	$\{+0'',135\,(5)\}$	$=+0'',135$
$\sin E.nt-g.nt-c.nt$	$\{-0'',135\,(5)\}$	$=-0'',135$
$\sin E.nt+g.nt+c.nt$	$\{-0'',405\,(5)\}$	$=-0'',405$
$\sin E.nt-g.nt+c.nt$	$\{-0'',585\,(5)\}$	$=-0'',585$
$\sin E.nt+c'm.nt+g.nt$	$\{+0'',984\,(4)-0'',033\,(5)\}$	$=+0'',951$
$\sin E.nt+c'm.nt-g.nt$	$\{+0'',984\,(4)-0'',033\,(5)\}$	$=+0'',951$
$\sin E.nt-c'm.nt+g.nt$	$\{+0'',006\,(5)\}$	$=+0'',006$
$\sin E.nt-c'm.nt-g.nt$	$\{+0'',003\,(5)\}$	$=+0'',003$
$\sin E.nt+c'm.nt+g.nt-c.nt$	$\{-0'',013\,(5)\}$	$=-0'',013$
$\sin E.nt+c'm.nt-g.nt-c.nt$	$\{+0'',067\,(5)\}$	$=+0',067$
$\sin E.nt+c'm.nt+g.nt+c.nt$	$\{+0'',122\,(5)\}$	$=+0'',122$
$\sin E.nt+c'm.nt-g.nt+c.nt$	$\{+0'',050\,(5)\}$	$=+0'',050$
$\sin 3E.nt-g.nt$	$\{-0'',199\,(5)\}$	$=-0'',199$
$\sin 3E.nt+g.nt$	$\{+0'',060\,(5)\}$	$=+0'',060$
$\sin 3E.nt-g.nt-c.nt$	$\{-0'',150\,(5)\}$	$=-0'',150$
$\sin 3E.nt+c'm.nt-g.nt$	$\{+0'',028\,(5)\}$	$=+0',028$
$\sin 4E.nt-g.nt$	$\{+1'',185\,(5)+0'',217\,(6)\}$	$=+1'',402$
$\sin 4E.nt+g.nt$	$\{+0'',366\,(5)\}$	$=+0'',366$
$\sin 4E.nt-3g.nt$	$\{+0'',074\,(5)\}$	$=+0',074$
$\sin 4E.nt+g.nt-c.nt$	$\{+1'',399\,(5)\}$	$=+1',399$
$\sin 4E.nt-g.nt-c.nt$	$\{+4'',008\,(4)+1'',740(5)+0'',8(\text{ind.})\}$	$=+6'',548$
$\sin 4E.nt-g.nt+c.nt$	$\{+0'',280\,(5)\}$	$=+0'',280$

$\sin 4E.nt - g.nt - 2c.nt \quad \{+0'',357\,(5)\} \qquad = +0'',357$

$\sin 4E.nt + g.nt - 2c.nt \quad \{+1'',237\,(5)\} \qquad = +1'',237$

$\sin 4E.nt + c'm.nt - g.nt \quad \{-0'',051\,(5)\} \qquad = -0'',051$

$\sin 4E.nt - c'm.nt - g.nt \quad \{+0'',197\,(5)\} \qquad = +0'',197$

$\sin 4E.nt + c'm.nt - g.nt - c.nt \quad \{-0'',135\,(5)\} \qquad = -0'',135$

$\sin 4E.nt - c'm.nt - g.nt - c.nt \quad \{+0'',315\,(5)\} \qquad = +0'',315.$

§ 9.

Composition des argumens des Inégalités Lunaires, et disposition des trois coordonnées propre au calcul direct d'un lieu de la Lune pour un instant donné.

68. Pour composer les argumens de la formule

$$nt + \varepsilon = v + \int \zeta dv - 22675'',814 . \sin cv + \text{etc.}$$

qui occupe les pages 607-613, il faudra d'abord changer;

cv en $cv - \varpi_{1} + (1 - c)\varepsilon - \int \varpi dv$;

gv en $gv - \theta_{1} + (1 - g)\varepsilon - \int \theta dv$;

$c'mv$ en $c'mv - \varkappa' + \varepsilon'_{1} - c'm\varepsilon$;

fv en $fv + (1 - f)\varepsilon$;

Ev en $Ev + m\varepsilon - \varepsilon'_{1}$;

et prendre ensuite dans les pages 605, 606, 634 les valeurs numériques propres à la formation de ces quantités.

Mais, s'il était question de composer les argumens de la formule

$$v = \dot{nt} + \varepsilon - \int \zeta dv + 22641'',626 \sin c.nt + \text{etc.}$$

posés dans les pages 618-627, il faudrait y changer:

$$c.nt \quad \text{en} \quad c\left(nt-\int\zeta ndt\right)+\varepsilon-\varpi_1-\int\varpi.ndt\,;$$

$$g.nt \quad \text{en} \quad g\left(nt-\int\zeta ndt\right)+\varepsilon-\theta_1-\int\theta.ndt\,;$$

$$c'm.nt \quad \text{en} \quad c'm\left(nt-\int\zeta ndt\right)+\varepsilon'_1-\chi'\,;$$

$$f.nt \quad \text{en} \quad fnt+\varepsilon\,;$$

$$E.nt \quad \text{en} \quad E\left(nt-\int\zeta ndt\right)+\varepsilon-\varepsilon'_1\,;$$

et remarquer, que d'après les résultats donnés dans les pages 605, 606, on a, en désignant par T un nombre de siècles écoulés depuis l'époque;

$$-c\int\zeta ndt-\int\varpi ndt=T^2(c.\,10'',57998+40'',31287)$$
$$+T^3(c.\,0'',017588+0'',067187)\,;$$

$$-g\int\zeta ndt-\int\theta ndt=T^2(g.\,10'',57998-6'',82986)$$
$$+T^3(g.\,0'',017588-0'',011381)\,;$$

$$-c'm\int\zeta ndt \quad =T^2.m.\,10'',57998+T^3.m.\,0'',017588\,;$$

$$-E\int\zeta ndt \quad =T^2.E.\,10'',57998+T^3.E.\,0'',017588.$$

De sorte qu'en substituant ici pour c, g, m, E leurs valeurs numériques, on obtient;

$$-c\int\zeta ndt-\int\varpi ndt=+T^2.\,50'',80345+T^3.\,0'',084616\,;$$

$$-g\int\zeta ndt-\int\theta ndt=+T^2.\,3'',79266+T^3.\,0'',006278\,;$$

$$-c'm\int\zeta ndt \quad =+T^2.\,0'',791398+T^3.\,0'',001316\,;$$

$$-E\int\zeta ndt \quad =+T^2.\,9'',788582+T^3.\,0'',016272\,;$$

pour la partie séculaire de *c.nt*, *g.nt*, *c'm.nt*, *E.nt*.

69. On peut regarder chaque argument des inégalités Lunaires, exprimées en fonction du temps, comme composé de trois parties distinctes, savoir: 1.° la partie constante, ou l'époque de l'argument; 2.° la partie proportionnelle au temps, ou le moyen mouvement de l'argument; 3.° la partie séculaire, c'est-à-dire la partie de la forme $AT^2 + BT^3$.

Lorsqu'on ne veut pas construire des tables, le calcul des trois coordonnées Lunaires pour une valeur donnée de t, censée exprimée en jours moyens comptés depuis l'époque définie dans la page 634, pourra être exécuté par le procédé suivant. D'abord on divisera t par la période de chaque argument, et on retiendra seulement les restes de ces différentes divisions: ensuite on multipliera chacun de ces restes par la valeur correspondante du moyen mouvement de l'argument pour obtenir la seconde partie qui lui appartient. Le calcul de la troisième partie doit être fait à l'aide des quatre formules posées plus haut, en y faisant $T = \frac{t}{36525}$.

Les valeurs positives de t sont assez faciles à former; mais pour avoir en jours et fractions du jour la valeur *négative* de t, qui répond à l'instant d'un phénomène antérieur à l'époque que nous avons prise pour l'origine du temps, il faudra se rappeller ces deux bases de la réformation Grégorienne: 1.° qu'immédiatement après le 4 octobre de l'année 1582 on a retranché *dix* jours de ce mois, en nommant 15, au lieu de 5, le lendemain: 2.° qu'on a statué de rendre communes (depuis ce changement) toutes les années séculaires composées d'un nombre de siècles non exactement divisible par 4. De là on conclud sans difficulté les régles suivantes.

1.° S'il est question d'un phénomène antérieur au commencement de l'ère chrétienne, dont A soit l'année, et K le nombre des jours et fractions du jour écoulés *depuis son commencement*, on fera

$$-t = (1800 + A)\,365^{j}.\tfrac{1}{4} - (K + 12);$$

mais on aura soin de *supprimer* le reste de la division de A par 4.

2.° S'il est question d'un phénomène compris entre le commencement de l'ère chrétienne et le 4 octobre de l'année 1582, on fera

$$-t=(1801-A)365^{j}.\tfrac{1}{4}-(K+12);$$

3.° S'il est question d'un phénomène compris entre le 4 d'octobre de l'année 1582 et l'année 1700, on fera

$$-t=(1801-A)365^{j}.\tfrac{1}{4}-(K+2).$$

4.° S'il est question d'un phénomène compris entre les années 1700 et 1800, on fera

$$-t=(1801-A)365^{j}.\tfrac{1}{4}-(K+1).$$

Dans ces trois derniers cas on supprimera toujours le reste de la division de $1801-A$ par 4.

Ainsi pour avoir les valeurs de t correspondantes aux deux éclipses considérées par *Lalande* dans la page 156 du second volume de son Astronomie, je prends d'abord $A=721$; $K=77^{j}.18^{h}.11'$;
ce qui me donne

$$-t=(1800+721)365^{j}.\tfrac{1}{4}-(77^{j}.18^{h}.11'+12^{j});$$

ou bien

$$-t=2521\times365^{j}.\tfrac{1}{4}-89^{j}.18^{h}.11'.$$

Ensuite je prends $A=1771$; $K=295^{j}.16^{h}28'$; et la formule du quatrième cas donne

$$-t=(1801-1771)365^{j}.\tfrac{1}{4}-296^{j}.16^{h}.28'.$$

La différence de ces deux valeurs de t sera par conséquent

$$2491\times365^{j}.\tfrac{1}{4}+206^{j}.22^{h}.17'=910043^{j}.22^{h}.17',$$

en supprimant le reste $\frac{3}{4}$ provenant de 2491 divisé par 4.

70. Jusqu'ici, nos formules donnent la longitude de la Lune depuis un point équinoxial *fixe* : de sorte que, il devient nécessaire d'y ajouter les termes qui déterminent le mouvement du point équinoxial sur l'écliptique *vraie*, si l'on veut composer une formule propre au calcul de la longitude vraie de la Lune, telle qu'elle serait donnée par l'observation. Pour remplir cette condition, il faut avoir égard à la précession, à la Nutation Luni-solaire, et même à l'aberration de la lumière, qui nous fait paraître la Lune moins avancée en longitude d'environ 0″,8. Or on sait, que le mouvement de précession doit être calculé d'après la formule

$$\frac{(50'',22350)t}{365,25} + T^2 . 1'',22180 + T^3 . 0'',000189;$$

et que la Nutation Luni-solaire peut être exprimée par

$$2N cot. 2\omega . sin(g.nt - f.nt) - \frac{3}{4} N\gamma sin(2g.nt - 2f.nt)$$

$$- 1'',336 . sin(2n't + 2\varepsilon'_1) - 0'',201 \, sin(2nt + 2\varepsilon);$$

N étant le coefficient défini dans la page 34 du 3.ème Volume. (Sur quoi voyez ci-après la page 731). Donc, en prenant $N = 8'',925$, nous aurons

$$+ 16'',6875 . sin(g.nt - f.nt) - 0'',6084 . sin(2g.nt - 2f.nt)$$

$$- 1'',3360 . sin(2n't + 2\varepsilon'_1) - 0'',2010 . sin(2nt + 2\varepsilon),$$

pour l'expression complète de la nutation en longitude du point équinoxial.

D'après cela il est manifeste, que le principal terme de la nutation peut être réuni avec le terme $-6'',577 . sin(g.nt - f.nt)$, posé dans la page 618, en remplaçant ce dernier par

$$(16'',6875 - 6'',577 = 10'',1105) sin(g.nt - f.nt.)$$

Remarquons maintenant, que, conformément au résultat trouvé dans la page 606, nous avons

$$-\int \xi ndt = T^2 . 10'',57998 + T^3 . 0'',017588.$$

Donc, en ajoutant à ces deux termes la partie semblable $T^2 . 1'',22180 + T^3 . 0'',000189$, due au mouvement de précession du point équinoxial, il viendra $T^2 . 11'',80178 + T^3 . 0'',017777$ pour la somme de ces deux parties séculaires.

71. Avant d'aller plus loin, je profite de cette occasion pour développer quelques remarques, qui me sont suggérées par l'emploi que je fais ici de la précession des équinoxes. On a coutume de regarder les mouvemens de l'équateur terrestre et du point équinoxial comme tout-à-fait indépendans des variations séculaires de l'excentricité et du périgée de l'orbite du Soleil. Cependant, il serait plus exact de dire, que ces variations ne peuvent produire rien de sensible dans les mouvemens de la Terre autour de son centre de gravité: car, mathématiquement parlant, l'expression analytique de l'obliquité de l'écliptique renferme un terme multiplié par

$$\int dt . \varepsilon'^2 \sin(\text{du double du périgée solaire});$$

et la précession un terme correspondant multiplié par

$$\int dt . \varepsilon'^2 \cos(\text{du double du périgée solaire}).$$

Pour mettre en évidence l'origine de ces termes, remarquons, que, suivant les dénominations établies dans les pages 310-317 du second Volume de la Mécanique Céleste, les fonctions

$$\frac{3L}{r_1^5} X Y \sin\theta, \qquad \frac{3L}{2r_1^5}(Y^2 - Z^2)\sin 2\theta$$

renferment, respectivement, le terme

$$\frac{3}{2} . \frac{L}{r_1^3}\sin\theta . \sin 2v, \qquad -\frac{3}{4} . \frac{L}{r_1^3}\sin 2\theta . \cos 2v.$$

Or en supposant que l'astre L soit la Lune, si l'on prend

$$\frac{1}{r_1} = \frac{u_1 + \delta u}{a} = \frac{1}{a}\left\{1 + K \varepsilon' b^2 . \cos Ev + c'mv\right\};$$

$$ndt = dv\left\{1 + K' \varepsilon' b^2 . \cos Ev + c'mv\right\}.$$

il viendra

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{r_1^3}\sin\theta\sin 2v.dt=$$

$$\frac{3L}{2na^3}\sin\theta\sin 2v.dv\left\{1+K\varepsilon' b^2.\cos Ev+c'mv\right\}^3\left\{1+K'\varepsilon' b^2.\cos Ev+c'mv\right\},$$

ce qui introduit dans cette fonction le terme séculaire

$$\frac{3}{2}\frac{L}{r_1^3}\sin\theta.\sin 2v dt=dv.\frac{9}{8}\frac{L}{na^3}\sin\theta.b^4\varepsilon'^2(K^2+KK')\sin(2v-2Ev-2c'mv).$$

Par la même raison on a

$$-\frac{3}{4}\frac{L}{r_1^3}\sin 2\theta.\cos 2v dt=-dv.\frac{9}{16}\frac{L}{na^2}\sin 2\theta.b^4\varepsilon'^2(K^2+KK')\cos(2v-2Ev-2c'mv).$$

Maintenant, si l'on remplace dv par ndt, et si l'on observe, que l'argument $2v-2Ev-2c'mv$ revient au double du périgée solaire, c'est-à-dire à $2\varkappa'$, nous aurons

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{r_1^3}\sin\theta.\sin 2v.dt=\frac{9}{8}\cdot\frac{L}{a^3}\sin\theta.b^4(K^2+KK').\varepsilon'^2\sin 2\varkappa'.dt;$$

$$-\frac{3}{4}\cdot\frac{L}{r_1^3}\sin 2\theta.\cos 2v.dt=-\frac{9}{16}\cdot\frac{L}{a^3}\sin 2\theta.b^4(K^2+KK').\varepsilon'^2\cos 2\varkappa'.dt.$$

Donc, conformément aux formules posées dans la p. 312 du second Volume de la Mécanique Céleste, on doit avoir dans l'expression de θ le terme

$$(1)\ ..\ \theta=\left(\frac{A+B-2C}{2nC}\right)\frac{9}{8}\cdot\frac{L}{a^3}\sin\theta.b^4(K^2+KK')\int dt.\varepsilon'^2\sin 2\varkappa';$$

et dans l'expression de Ψ le terme

$$(2)\ ..\ \Psi=\left(\frac{A+B-2C}{2nC}\right)\frac{9}{8}\cdot\frac{L}{a^3}\cos\theta.b^2(K^2+KK')\int dt.\varepsilon'^2\cos 2\varkappa'.$$

Mais, le principal terme de la nutation est tel qu'on a

$$\theta=-\left(\frac{A+B-2C}{2nC}\right)\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{a^3}\cos\theta.\gamma\int dt.\sin\Lambda;$$

Λ désignant la longitude du noeud ascendant de la Lune; c'est-à-dire (suivant nos dénominations) l'angle $\theta_1+(1-g)\bar{n}t$: où j'écris $\bar{n}$ au lieu de n pour distinguer cette valeur de n de celle qui multiplie

C, employée par *Laplace* pour désigner le mouvement diurne de la terre. Ainsi cela revient à dire, que

$$\theta = \left(\frac{A+B-2C}{2nC}\right)\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{\overline{n}a^3}\frac{\gamma.\cos\theta}{(1-g)}.\cos\Lambda.$$

Donc en nommant N ce coefficient de $\cos\Lambda$, les formules (1) et (2) posées plus haut se changeront en celles-ci;

$$(1)\ \ldots\ \theta = \frac{3}{4}N.\frac{\overline{n}(1-g)}{\gamma}.\,tang.\theta.\,b^4(K^2+KK')\int dt.\,\varepsilon'^2 \sin 2x';$$

$$(2)\ \ldots\ \Psi = \frac{3}{4}N.\frac{\overline{n}(1-g)}{\gamma}.\,b^4(K^2+KK')\int dt.\,\varepsilon'^2 \cos 2x'.$$

Et comme $\frac{\overline{n}}{n'} = \frac{1}{m}$; si l'on prend ici l'année julienne pour unité de temps on pourra laisser dt au lieu de $n'dt$; ce qui donne

$$(1)\ \ldots\ \theta = \frac{3}{4}N.\frac{(1-g)}{m\gamma}.\,tang.\theta.\,b^4(K^2+KK')\int dt.\,\varepsilon'^2 \sin 2x';$$

$$(2)\ \ldots\ \Psi = \frac{3}{4}N.\frac{(1-g)}{m\gamma}\,b^4(K^2+KK')\int dt.\,\varepsilon'^2 \cos 2x'.$$

Nous avons $K = \frac{5}{4} - \frac{45}{8}m$ etc., $K' = -\frac{5}{2} + \frac{45}{4}m$ etc. (Voyez page 851 du troisième Volume, et page 494 de celui-ci); et les autres facteurs sont assez petits pour rendre ces termes tout-à-fait insensibles, si l'on observe que $\frac{3}{4}b^4\,\frac{(g-1)}{m\gamma}. = 0{,}0000028$. Mais, en théorie, il est permis de considérer de telles quantités pour faire cesser les doutes par des argumens incontestables. C'est ainsi, par exemple, qu'on fait cesser les doutes qu'on pourrait élever sur les variations du jour moyen, en démontrant que ces variations accumulées pendant des millions d'années ne peuvent produire qu'un petit nombre de minutes (Voyez page 325 du second Volume de la Mécanique Céleste).

72. Cette analyse donne aisément le terme affecté du double de la longitude du noeud de la Lune qui entre dans l'expression de la nutation et de la précession. En effet; d'après les formules posées dans les p. 313 et 317 du second Volume de la Mécanique Céleste, on a

$$\frac{3L}{r_1^5} XY \sin\theta . dt = dt . \frac{3}{2}\frac{L}{r_1^3} \sin\theta \left\{ \sin 2v + \frac{\gamma^2}{2} \sin 2\Lambda \right\},$$

$$\frac{3L}{2r_1^5}(Y^2 - Z^2) \sin 2\theta . dt = -dt . \frac{3}{4}\frac{L}{r_1^3} \sin 2\theta \left\{ \cos 2v + \frac{\gamma^2}{2} \cos 2\Lambda \right\}.$$

Actuellement, si l'on prend $r_1 = a$, et

$$\bar{n}dt = dv \left\{ 1 + \frac{\gamma^2}{2} \cos(2v - 2\Lambda) \right\},$$

il viendra, en conservant seulement les termes affectés de l'argument 2Λ;

$$\frac{3L}{r_1^5} XY \sin\theta . dt = \frac{dv}{\bar{n}} . \frac{3L}{2a^3} \gamma^2 \sin\theta \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \sin 2\Lambda;$$

$$\frac{3L}{2r_1^5}(Y^2 - Z^2) \sin 2\theta . dt = -\frac{dv}{\bar{n}} . \frac{3L}{4a^3} \gamma^2 \sin 2\theta \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \cos 2\Lambda.$$

Maintenant, il suffit de comparer ces deux termes avec ceux multipliés par $\sin\Lambda$ et $\cos\Lambda$ pour en tirer la conséquence, que les deux inégalités dépendantes de $\cos\Lambda$ et $\cos 2\Lambda$ qui entrent dans l'expression de θ sont dans le rapport de l'unité à $-\frac{3}{8}\gamma . tang.\theta$; et que les deux inégalités correspondantes de la précession sont dans le rapport de l'unité à $-\frac{3}{8}\gamma\, tang. 2\theta$. Cela posé il devient facile de voir, que, *Laplace*, dans la page 269 du 5.ème Volume de la Mécanique Céleste, obtient le coefficient $-\frac{1}{4}$ au lieu de $-\frac{3}{8}$, parceque il n'a pas eu égard dans la formation des produits $XY.dt$, $(Y^2 - Z^2)dt$, au terme de l'expression de dt affecté de l'argument $2v - 2\Lambda$.

Il y a dans l'expression de θ et Ψ un terme du même ordre que le précédent qui dépend du double de la longitude du périgée Lunaire. Pour en voir l'origine, réduisons à

$$\frac{3L}{r_1^5} XY \sin\theta . dt = \frac{3}{2}\frac{L}{r_1^3} \sin\theta . \sin 2v . dt,$$

$$\frac{3L}{2r_1^5}(Y^2 - Z^2) \sin 2\theta . dt = -\frac{3}{4}\frac{L}{r_1^3} \sin 2\theta . \cos 2v . dt,$$

les équations posées plus haut; et remarquons que l'astre L étant la Lune, on peut y faire

$$\frac{1}{r_1^3}=\frac{1}{a^3}(1+e\cos cv)^3=\frac{1}{a^3}\left(1+3e\cos cv+\frac{3}{2}e^2\cos 2cv\right);$$

$$\bar{n}dt=dv\left\{1-2e\cos cv+\frac{3}{2}e^2\cos 2cv\right\};$$

ce qui donne

$$\frac{3L}{r_1^5}XY.\sin\theta.dt=\frac{9}{4}\cdot\frac{L}{a^3}\frac{e^2.\sin\theta}{\bar{n}}dv.\sin(2v-2cv);$$

$$\frac{3L}{2r_1^5}(Y^2-Z^2)\sin 2\theta.dt=-\frac{9}{8}\cdot\frac{L}{a^3}\frac{e^2\sin 2\theta}{\bar{n}}dv.\cos(2v-2cv);$$

et par conséquent

$$\theta=-\left(\frac{A+B-2C}{2nC}\right)\cdot\frac{9}{4}\frac{e^2L\sin\theta}{\bar{n}a^3}\cdot\frac{\cos(2v-2cv)}{2(1-c)};$$

$$\Psi=\left(\frac{A+B-2C}{2nC}\right)\cdot\frac{9}{8}\frac{e^2L\sin 2\theta}{\bar{n}a^2\sin\theta}\cdot\frac{\sin(2v-2cv)}{2(1-c)};$$

ou bien

$$\theta=N.\frac{3}{4}\frac{e^2}{\gamma}\left(\frac{1-g}{1-c}\right)\operatorname{tang}.\theta.\cos(2v-2cv);$$

$$\Psi=-N.\frac{3}{4}\frac{e^2}{\gamma}\left(\frac{1-g}{1-c}\right).\sin(2v-2cv).$$

Ces coefficiens peuvent être regardés comme insensibles; car nous avons $\frac{1-g}{1-c}=-\frac{4021595}{8450056}$; $N=8'',925$; d'où l'on tire

$$Log.\left(\frac{g-1}{1-c}\right)=9,6775422;\quad Log.\frac{3}{4}\frac{e^2}{\gamma}=8,3988493;$$

$$\theta=-0'',040.\cos(2v-2cv);\qquad \Psi=0'',101.\sin(2v-2cv).$$

Pour compléter l'analyse de ces petits termes, je ferai remarquer, que les équations

$$\frac{3L}{r_1^5}XY.\sin\theta.dt=dt.\frac{3}{4}\frac{L\gamma^2}{r_1^3}\sin\theta.\sin 2\Lambda,$$

$$\frac{3L}{2r_1^3}(Y^2-Z^2)\sin 2\theta.dt=-dt.\frac{3}{8}\frac{L\gamma^2}{r_1^3}\sin 2\theta.\cos 2\Lambda,$$

donnent,

$\frac{3L}{r_1^5} X Y . \sin\theta . dt = \frac{dv}{\bar{n}} . \frac{9}{8} . \frac{LH}{a^3} e\varepsilon'\gamma^2 b^2 . \sin\theta . \sin(2\Lambda + Ev + c'mv - cv)$,

$\frac{3L}{2r_1^5}(Y^2 - Z^2) \sin 2\theta . dt = -\frac{dv}{\bar{n}} . \frac{9}{16} . \frac{LH}{a^3} e\varepsilon'\gamma^2 . b^2 . \sin 2\theta . \cos(2\Lambda + Ev + c'mv - cv)$,

en y faisant $\bar{n}dt = dv$, et $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a}\left\{1 + He\varepsilon' b^2 . \cos(Ev + c'mv - cv)\right\}$.

(Voyez pag. 852 du troisième Volume). De sorte que on a ;

$$\theta = -\frac{3}{4} N . \left(\frac{1-g}{3-2g-c}\right) He\varepsilon'\gamma b^2 . \operatorname{tang}.\theta . \cos(2\Lambda + Ev + c'mv - cv),$$

$$\Psi = \frac{3}{4} N . \left(\frac{1-g}{3-2g-c}\right) He\varepsilon'\gamma b^2 . \sin(2\Lambda + Ev + c'mv - cv).$$

Mais il est aisé de se convaincre, que ces termes sont insensibles malgré la petitesse du diviseur $3 - 2g - c$.

73. Je reviens maintenant à mon sujet, et afin de faciliter toute l'opération que j'ai indiquée, je vais reproduire ici les formules des trois coordonnées Lunaires, en plaçant à côté de chaque coefficient, la période de l'argument, l'époque, et le moyen mouvement pour l'unité de temps que je suppose être le jour moyen. Sur cela il est essentiel d'observer : 1.° que la désignation de l'argument a été faite, pour plus de simplicité, sans écrire *nt* à côté des parties qui le composent: 2.° qu'on a rendu toujours positive la partie constante et la partie proportionnelle au temps, en changeant convenablement le signe primitif du coefficient et en ajoutant 360° à l'argument; 3.° que les inégalités sont ici disposées d'après l'ordre de grandeur de leurs coefficiens; 4.° que l'on a supprimé les inégalités dont le coefficient est au-dessous d'un cinquième de seconde.

Cela posé, si l'on désigne par V la longitude vraie de la Lune, comptée sans interruption depuis le commencement du 19.ème siècle, on aura sa valeur par rapport à l'équinoxe mobile du printemps, en prenant

$$V = 111°.36'.42'',8 + \frac{(50'',22350)t}{365,25} + \frac{(13^{\text{cir}}.132°.39'.53'',54)t}{365,25}$$
$$+ T^2 . 11'',80178 + T^3 . 0'',017777$$

+ la suite des termes périodiques, dont voici le tableau.

Termes périodiques de la longitude vraie de la Lune.

Argument	Coefficient	Période de l'argument en jours moyens	Mouvement moyen pour un jour	Époque de l'argument
c	+22641",626	27^j,55450	13°. 3'.54",05	205°.29'.58",4
$2c$	+ 769,477	13,77725	26. 7.48,10	50.59.56,8
$3c$	+ 36,720	9,18383	39.11.42,15	256.29.55,2
$4c$	+ 2,003	6,889	52.15.36.	101.59.53,6
$5c$	+ 0,117	5,511	65.19.30.	307.29.52,0
$2E-c$	+ 4585,648	31,81201	11.18.59,35	177.24.23,2
$4E-2c$	+ 34,518	15,90600	22.37.58,70	354.48.46,4
$2E$	+ 2370,320	14,76529	24.22.53,36	22.54.21,6
E	− 122,110	29,53060	12.11.26,68	191.27.10,8
$3E$	+ 0,887	9,843	36.34.20.	214.21.32,4
$4E$	+ 14,514	7,38265	48.45.46,72	45.48.43,2
$c'm$	− 668,644	365,25637	0.59. 8,19	0.39. 7,0
$2c'm$	− 7,872	182,628	1.58.16.	1.18.14,0
$3c'm$	− 0,162	91,314	2.57.25.	1.57.21,0
$4c'm$	− 0,003	45,657	3.56.33.	2.36.28,0
$2n'+2\varepsilon'$,	− 1,336	182,628	1.58.16.	200.19. 4.
$2g$	− 411,041	13,60611	26.27.31,30	195.23.37,2
$4g$	+ 0,424	6,803	52.55. 3.	30.47.14,4
$2E-2c$	− 212,363	205,88670	1.44.54,68	28. 5.35,2
$E-c$	+ 18,045	411,77335	0.52.27,34	14. 2.47,6
$2E-c'm-c$	+ 209,742	34,84701	10.59.51,13	176.45.16,2
$2E+c$	+ 192,146	9,61371	37.26.47,45	228.24.20,0
$2E-c'm$	− 165,850	15,38731	23.23.45,20	22.15.14,6

Argument	Coefficient	Période de l'argument en jours moyens	Mouvement moyen pour un jour	Époque de l'argument
$c-c'm$	+ 148",059	29j,80278	12°. 4'.45",86	204°.50'.51",4
$2c-2c'm$	+ 0,065	14,901	24. 9. 32.	49.41.42,8
$c+c'm$	− 111,099	25,62164	14. 3. 2,24	206. 9. 5,4
$2c+2c'm$	− 0,065	12,811	28. 6. 4.	52.18.10,8
$2E-2g$	− 54,915	173,31044	2. 4.37,91	172.29.15,6
$2g+c$	− 45,201	9,10846	39.31.25,32	40.53.35,6
$2g-c$	− 37,191	26,87835	13.23.37,26	349.53.38,8
$4E-c$	+ 38,003	10,08460	35.41.52,68	200.18.44,8
$2E+c'm-c$	− 28,811	29,26331	12.18. 7,50	178. 3.30,2
$2E+c'm$	− 23,611	14,19160	25.22. 1,58	23.33.28,6
$E+c'm$	+ 17,216	27,32160	13.10.34,87	192. 6.17,8
$2E+2c'm$	− 0,065	13,661	26.21.10.	24.12.35,6
$2E+2c$	+ 14,119	7,12707	50.30.41,40	73.54.18,4
$E+c$	− 8,237	14,254	25.15.21.	36.57. 9,2
$2E-c'm+c$	+ 14,044	9,87345	36.27.39,20	227.45.13,0
$2E-3c$	− 12,807	24,30210	14.48.48,78	233.35.33,6
$g-f$	+ 10,111	6814,305	0. 3.10.	346. 6. 5,8
$2g-2f$	− 10,608	3407,153	0. 6.20.	332.12.11,6
$2E+2g-c$	− 9,384	9,530	37.46.30.	12.48. 0,4
$2c-c'm$	+ 9,044	14,317	25. 8.39.	50.20.49,8
$2E-2c'm$	+ 7,813	16,064	22.24.36.	21.36. 7,6
$E-c'm$	− 0,383	32,128	11.12.18.	190.48. 3,8
$2E-c'm-2c$	− 7,762	131,668	3.44. 4.	28.44.42,2
$2E-2c'm-c$	+ 7,527	38,522	9.20.43.	176. 6. 9,2
$2c+c'm$	+ 7,345	3,276	27. 6.56.	51.39. 3,8

Argument	Coefficient	Période de l'argument en jours moyens	Mouvement moyen pour un jour	Époque de l'argument
$2E-2g+c$	$-$ 6",151	32^j,764	10°59'16"	33° 0'42",8
$2g+2c$	$+$ 4,089	6,846	52.35.19.	246.23.34,0
$4E-c'm-c$	$+$ 3,837	10,371	34.42.44.	199.39.37,8
$2E+2g$	$-$ 3,376	7,081	50.50.24.	218.17.58,8
$2E+3c$	$+$ 3,309	5,662	63.34.35.	279.24.16,8
$3E-c$	$-$ 2,950	15,314	23.30.26.	8.51.34,0
$2E+c'm+c$	$-$ 2,884	9,367	38.25.55.	229. 3.27,0
$2E-c'm-2g$	$+$ 2,329	117,549	3. 3.46.	186.51.37,4
$c-2c'm$	$+$ 2,131	32,451	11. 5.37.	204.11.44,4
$2E+2c'm-c$	$-$ 2,014	27,093	13.17.15.	178.42.37,2
$2E+c'm-2c$	$+$ 1,395	471,867	0.45.47.	27.26.28,2
$2E+c'm-2g$	$+$ 1,475	329,795	1. 5.29.	171.50. 8,6
$4E-c'm$	$+$ 1,210	7,535	47.46.39.	45. 9.36,2
$4E-c'm-2c$	$+$ 1,197	16,630	21.38.51.	354. 9.39,4
$c+2c'm$	$-$ 1,172	23,942	15. 2.10.	206.48.12,4
$2g-2c$	$+$ 1,079	1095,350	0.19.43.	144.23.40,4
$E+c'm+c$	$+$ 0,994	13,709	26.14.29.	37.36.16,2
$2E+2c'm+2c$	$-$ 0,190	6,855	52.28.58.	75.12.32,4
$2E+2g-2c$	$-$ 0,941	14,569	24.42.36.	167.18. 2,0
$4E+c'm-c$	$-$ 0,922	9,814	36.41. 1.	200.57.51,8
$2E-4c$	$+$ 0,873	12,913	27.52.42.	79. 5.32,0
$E-2c$	$-$ 0,796	25,826	13.56.21.	219.32.46,0
$4E+c$	$+$ 0,855	5,823	61.49.41.	251.18.41,6
$E-2g$	$+$ 0,739	25,289	14.16. 4.	3.56.26,4
$2E-4g$	$+$ 0,095	12,645	28.32.18.	7.52.52,8

Argument	Coefficient	Période de l'argument en jours moyens	Mouvement moyen pour un jour	Époque de l'argument
$3E-2c$	− 0",640	34j,475	10°.26'.42"	163°.21'.35",6
$2E+2g+c$	− 0,626	5,633	63.54.18.	63.47.57,2
$2E-c'm+2c$	+ 0,607	7,286	49.31.32.	113.15.11,4
$2g+c'm$	+ 0,585	13,117	27.26.39.	196. 2.44,2
$2E-2g+2c$	− 0,529	14,967	24. 3. 9.	278.30.41,2
$4E+c'm-2c$	− 0,513	15,244	23.37. 7.	355.27.53,4
$4E-3c$	+ 0,502	37,625	9.34. 5.	149.18.48,0
$E+c'm-c$	− 0,466	3233,294	0. 6.41.	13.33.40,6
$4E-2g-c$	+ 0,397	38,955	9.14.22.	4.55. 7,6
$3c-c'm$	+ 0,365	9,421	38.12.34.	255.50.48,2
$3c+c'm$	− 0,365	8,958	40.10.50.	257. 9. 2,2
$E+2c$	− 0,357	9,395	38.19.15.	242.27. 7,6
$g+f$	+ 0,343	13,634	17.57.50.	209.17.31,4
$2g+3c$	− 0,339	5,483	65.39.13.	92.53.32,4
$2E-2c'm+c$	+ 0,323	10,148	35.28.31.	227. 6. 6,0
$2E-c'm-3c$	− 0,328	26,033	15.47.57.	234.14.40,6
$2E-c'm-2g+c$	− 0,278	35,992	11. 0. 8.	32.21.35,9
$2E-c'm+2g-c$	− 0,253	9,786	36.47.22.	12. 8.53,4
$3E-2g$	− 0,246	36,068	10. 6.49.	118.57.55,2
$4E+c'm$	− 0,201	7,237	49.44.55.	46.27.50,2
$2n+2\varepsilon$	+ 0,201	13,661	26.21.19.	223.13.26.

74. La formule suivante, qui sert au calcul de la latitude de la Lune au-dessus de l'écliptique vraie, a été tirée de celle donnée vers la fin du § précédent: on a supprimé les inégalités dont les coefficiens sont inférieurs à un cinquième de la seconde.

Termes périodiques de la latitude vraie de la Lune.

Argument	Coefficient	Période de l'argument en jours moyens	Mouvement moyen pour un jour	Époque de l'argument
g	+ 18465″,538	27^{j},21222	13°.13′.45″,66	97°.41′.48″,6
$3g$	− 6,424	9,071	39.41.17.	297. 5.25,8
$5g$	+ 0,006	5,442	66. 8.48.	128.29. 3,0
$g+c$	+ 1010,894	13,69115	26.17.39,72	303.11.47,0
$g-c$	− 1000,509	2190,914	0. 9.51,60	252.11.50,2
$2E-g$	+ 621,476	32,28075	11. 9. 7,72	285.12.33,0
$2E+g-c$	+ 196,224	14,66644	24.32.44,99	275. 6.11,8
$2E-g-c$	− 166,915	188,19935	1.44.46,34	280.17.25,4
$2E+g$	+ 101,708	9,57171	37.36.39,07	120.36.10,2
$g+2c$	+ 62,462	9,14648	39.21.33,78	148.41.45,4
$2E-g+c$	+ 35,039	14,86547	24.13. 1,55	130.42.31,4
$g-2c$	+ 32,342	27,90563	12.54. 2,44	313.18. 8,2
$2E-c'm-g$	+ 29,535	35,41028	10. 9.59,57	284.33.26,0
$2E-2c-g$	− 16,217	24,03514	14.58.40,63	234.12.36,2
$2E+c+g$	+ 14,774	7,10397	50.50.33,10	326. 6. 8,6
$2E+c'm-g$	− 12,272	29,65952	12. 8.15,83	285.51.40,0
$2E-c'm+g-c$	+ 9,226	15,280	23.33.36.	273.27. 4,8
$2E-c'm-g-c$	− 8,241	124,203	0.55.38.	280.56.32,4
f	− 7,886	27,322	13.10.35.	111.36.42,8
$2E-c'm+g$	+ 7,593	9,829	36.37.31.	119.57. 3,2
$4E-g-c$	− 6,548	16,023	22.28. 7.	257.23. 3,8
$g+c-c'm$	+ 6,360	14,225	25.18.31.	302.32.40,0
$g+c'm$	− 5,438	25,322	15.12.54.	98.20.55,6

Argument	Coefficient		Période de l'argument en jours moyens	Mouvement moyen pour un jour	Époque de l'argument
$g+c+c'm$	−	5",305	13j,196	27°.16'.48".	303°.50'.54",0
$g-c+c'm$	−	5,183	313,062	1. 9. 0.	252.50.57,2
$E+g$	−	5,016	14,162	25.25.12.	289. 8.59,4
$g-c-c'm$	−	4,864	438,342	0.49.16.	208.27.16,8
$E-g$	+	4,618	346,625	1. 2.18.	93.45.22,2
$g-c'm$	+	4,167	29,403	12.14.37.	97. 2.41,6
$g+3c$	+	4,086	6,867	52.25.28.	354.11.43,8
$3g-c$	−	2,848	13,522	26.37.23.	91.35.27,4
$2E+c'm+g-c$	−	2,692	14,106	25.31.53.	275.45.18,8
$2E-3g$	−	2,384	25,521	15.18.23.	274.11. 4,2
$2E+2c-g$	+	2,377	9,656	37.16.56.	336.12.29,8
$2E+c'm-g-c$	+	1,945	388,242	0.55.38.	279.38.18,4
$2E-2c+g$	−	1,883	31,357	11.28.49.	69.36.13,4
$g-3c$	+	1,687	13,865	25.57.57.	158.48. 6,6
$4E-g$	+	1,402	10,132	35.32. 1.	308. 6.54,6
$2E-c'm-g+c$	+	1,576	15,497	23.13.54.	130. 3.24,4
$4E+g-c$	+	1,399	7,358	48.55.38.	298. 0.33,4
$4E+g-2c$	+	1,237	10,003	35.51.47.	92.30.35,0
$2E+c'm+g$	−	1,194	9,327	38.35.47.	121.15.17,2
$2E-3c-g$	−	1,075	12,837	28. 2.34.	331.17.22,2
$E+c'm+g$	+	0,951	13,634	26.24.21.	289.48. 6,4
$E+c'm-g$	+	0,951	6793,729	0. 3.11.	94.24.29,2
$2E+c'm-g+c$	+	0,904	14,285	25.12.10.	131.21.38,4
$3g+c$	+	0,875	6,824	52.45.11.	148.35.24,2
$2E+2c+g$	+	0,867	5,648	63.44.27.	171.36. 7,0

Argument	Coefficient		Période de l'argument en jours moyens	Mouvement moyen pour un jour	Époque de l'argument
$2E-2c'm-g$	+	0",627	39^j,213	9°.10'.51".	283°.54'.19",0
$2E-c'm+g+c$	+	0,588	7,245	49.41.25.	325.27. 1,6
$E-g+c$	—	0,585	29,935	12. 1.35.	299.15.20,6
$g+2c-c'm$	+	0,445	9,381	38.22.25.	148. 2.38,4
$g+2c+c'm$	—	0,445	8,923	40.20.42.	149.20.52,4
$2E-3g-c$	—	0,406	12,689	28.22.17.	119.41. 2,6
$E+g+c$	—	0,405	9,354	38.29. 6.	134.38.57,8
$2E-c'm-g-2c$	—	0,373	22,552	15.57.48.	126.26.30,8
$4E+g$	+	0,366	5,807	61.59.33.	143.30.31,8
$4E-g-2c$	+	0,357	38,283	9.24.15.	257. 6.57,8
$2E-3g+c$	+	0,318	160,612	2.14.29.	69.41. 5,8
$4E-c'm-g-c$	+	0,315	16,758	21.28.58.	101.57.49,2
$4E-g+c$	+	0,280	7,408	48.35.55.	153.36.53,0
$g+4c$	+	0,274	5,497	65.29.22.	199.41.41,8
$g-2c-c'm$	—	0,257	25,924	13.53.11.	313.57.15,2
$g-2c+c'm$	+	0,257	30,214	11.54.54.	312.39. 1,2
$2E+3g$	+	0,241	5,619	64. 4.10.	319.59.47,4
$2E-3c+g$	—	0,215	227,245	1.35. 4.	135.53.45,0
$3E-g$	—	0,199	15,422	23.20.34,3	116.40.43,8

75. Pour avoir la parallaxe horizontale relative à un point de la terre dont λ est la latitude géographique, il faudra multiplier la somme des termes suivans par (Voyez p. 635).

$$1-\frac{3}{916}\sin.\lambda^2$$

La période et les époques des argumens doivent être pris dans le tableau des termes de la longitude.

Termes périodiques de la parallaxe équatoriale de la Lune

Argument	Coefficient	Argument	Coefficient
0	+ 3423",1534	$2E+c'm-c$	− 0",3803
c	+ 186,6545	$2E+2c$	+ 0,2702
$2c$	+ 10,2587	$E+c$	− 0,0956
$3c$	+ 0,6340	$2E-c'm+c$	+ 0,1877
$4c$	+ 0,0413	$2E-2c$	+ 0,1670
$5c$	+ 0,0028	$E-c$	+ 0,0744
$2E-c$	+ 33,9214	$E+c'm$	+ 0,1519
$4E-2c$	+ 0,3250	$2E+2c'm$	− 0,0012
$2E$	+ 27,5933	$2E-2g$	− 0,1084
E	− 0,9247	$2E-3c$	− 0,1010
$3E$	+ 0,0147	$2c-c'm$	+ 0,0855
$4E$	+ 0,1365	$2E-2g-c$	− 0,0821
$2E+c$	+ 3,0755	$2c+c'm$	− 0,0798
$2E-c'm$	+ 2,1646	$2g-3c$	− 0,0715
$2E-c'm-c$	+ 1,4486	$E-2c$	+ 0,0660
$2g-c$	+ 1,1937	$E+2c$	− 0,0614
$c-c'm$	+ 1,0599	$2E-2c'm$	+ 0,0522
$c+c'm$	− 0,9192	$E-c'm$	+ 0,0021
$2E+c'm$	− 0,5447	$2E-2g+c$	− 0,0503
$4E-c$	+ 0,4985	$2E-2c'm-c$	+ 0,0455
$c'm$	− 0,4284		
$2c'm$	− 0,0122		
$3c'm$	− 0,0003		

§ 10.

Formules pour le mouvement horaire de la Lune.

76. Je suppose qu'on ait calculé par les formules précédentes un lieu de la Lune pour un instant donné t, et qu'on veuille savoir ce qu'on doit ajouter ou retrancher des coordonnées ainsi obtenues, pour avoir celles correspondantes à un autre instant $t+z$ peu différent du prémier. A cet effet j'ai d'abord supposé z égal à $2^h.\ 24'$, c'est-à-dire à la dixième partie d'un jour, et j'ai développé chaque terme de la forme

$$A_{cos}^{sin}\left[k\left(t+\frac{x}{10}\right)+\beta\right]$$

suivant les puissances de x. De là sont dérivées les trois formules suivantes pour calculer la partie additionnelle à chacune des trois coordonnées primitives, à l'aide des mêmes argumens qu'on est censé avoir déjà formés pour le temps t. Elles sont suffisantes pour les cas où le second instant ne sera pas éloigné du premier au de-là de trois heures. En général on y fera $x=\frac{\alpha}{2,4}$; α étant un nombre d'heures, de minutes et de secondes exprimé en prenant l'heure pour unité.

Mouvement horaire de la longitude vraie de la Lune.

$+(516'',291.x-0'',045.x^3)\cos c.nt \quad -(5'',886.x^2-0'',0003.x^4)\sin c.nt$

$+(100'',868.x-0'',015.x^3)\cos 2E.nt \quad -2'',146.x^2.\sin 2E.nt$

$-(90'',559.x-0'',006.x^3)\cos 2E.nt-c.nt \quad +0'',894.x^2.\sin 2E.nt-c.nt$

$+(35'',094.x-0'',012.x^3)\cos 2c.nt \quad -0'',800.x^2.\sin 2c.nt$

$+(18'',981.x-0'',067.x^3)\cos 2g.nt \quad -0'',438.x^2.\sin 2g.nt$

$-6'',618.x.\cos 2E.nt-c'm.nt$	$+0'',138.x^2.\sin 2E.nt-c'm.nt$
$+4'',026.x.\cos 2E.nt-c'm.nt-c.nt$	$-0'',039.x^2.\sin 2E.nt-c'm.nt-c.nt$
$+3'',121.x.\cos c.nt-c'm.nt$	$-0'',033.x^2.\sin 2c.nt-c'm.nt$
$-(3'',118.x-0,003.x^3)\cos 2g.nt+c.nt$	$+0'',108.x^2.\sin 2g.nt+c.nt$
$-2'',725.x.\cos c.nt+c'm.nt$	$+0'',004.x^2.\sin c.nt+c'm.nt$
$+2'',385.x.\cos E.nt$	$-0'',025.x^2\sin E.nt$
$+2'',367.x.\cos 4E.nt-c.nt$	$-0'',074.x^2.\sin 4E.nt-c.nt$
$-(1'',995.x-0'',002.x^3)\cos 3c.nt$	$+0'',086.x^2.\sin 3c.nt$
$-1'',363.x\cos 4E.nt-2c.nt$	$+0'',027.x^2.\sin 4E.nt-2c.nt$
$+(1'',256.x-0,009.x^3)\cos 2Ent+c.nt$	$-0'',410.x^2.\sin 2E.nt+c.nt$
$+1'',245.x.\cos 2E.nt+2c.nt$	$-0'',022.x^2.\sin 2E.nt+2c.nt$
$+(1'',235.x-0'',002.x^3)\cos 4E.nt$	$-0'',053.x^2.\sin 4E.nt$
$-1'',177.x.\cos c'm.nt$	
$-1'',045.x.\cos 2E.nt+c'm.nt$	$+0'',023.x^2.\sin 2E.nt+c'm.nt$
$-0'',869.x.\cos 2g.nt-c.nt$	$+0'',010.x^2.\sin 2g.nt-c.nt$
$-0'',710.x.\cos 2E.nt-c'm.nt+c.nt$	$-0'',018.x^2.\sin 2E.nt-c'm.nt+c.nt$
$-0'',678.x.\cos 2E.nt+c'm.nt-c.nt$	$+0'',007.x^2.\sin 2E.nt+c'm.nt-c.nt$
$-0'',655.x.\cos 2E.nt-2c.nt$	
$-0'',616.x.\cos 2E.nt+2g.nt-c.nt$	$+0'',020.x^2.\cos 2E.nt+2g.nt-c.nt$
$+0'',397.x.\cos 2c.nt-c'm.nt$	$-0'',009.x^2.\sin 2c.nt-c'm.nt$
$+0'',396.x.\cos E.nt+c'm.nt$	$-0'',005.x^2.\sin E.nt+c'm.nt$
$+0'',368.x.\cos 2g.nt+2c.nt$	$-0'',017.x^2.\sin 2g.nt+2c.nt$
$+0'',367.x.\cos E.nt+3c.nt$	$-0'',020.x^2.\sin E.nt+3c.nt$
$-0'',367.x.\cos E.nt+c.nt$	$+0'',008.x^2.\sin 2E.nt+c.nt$

$+ 0'',348.x.\cos 2c.nt + c'm.nt$

$- 0'',331.x.\cos 2E.nt - 3c.nt$

$+ 0'',305.x.\cos 2E.nt - 2c'm.nt$

$- 0'',300.x.\cos 2E.nt + 2g.nt$

$+ 0'',253.x.\cos 4E.nt - c'm.nt - c.nt$

$- 0'',199.x.\cos 2E.nt - 2g.nt$

$- 0'',194.x.\cos 2E.nt + c'm.nt + c.nt$

$+ 0'',183.x.\cos 4c.nt$

$+ 0'',123.x.\cos 2E.nt - 2c'm.nt - c.nt$

$- 0'',121.x.\cos 3E.nt - c.nt$

$- 0'',118.x.\cos 2E.nt - 2g.nt + c.nt$

$+ 0'',109.x.\cos 4E.nt - c'm.nt$

$+ 0'',092.x.\cos 4E.nt + c.nt$

$+ 0'',070.x.\cos 2E.nt + 2g.nt + c.nt$

$- 0'',051.x.\cos 2E.nt - c'm.nt + 2c.nt$

$- 0'',059.x.\cos 4E.nt + c'm.nt - c.nt$

$- 0'',008.x^2.\sin 2c.nt + c'm.nt$

$+ 0'',004.x^2.\sin 2E.nt - 3c.nt$

$- 0'',006.x^2.\sin 2E.nt - 2c'm.nt$

$+ 0'',011.x^2 \sin 2E.nt + 2g.nt.$

Mouvement horaire de la latitude vraie de la Lune.

$+(426'',363.x - 0'',038.x^3) \cos g.nt \qquad -(4'',922.x^2 - 0'',0002.x^4) \sin g.nt$

$+(46'',383.x - 0'',021.x^3) \cos g.nt + c.nt \qquad - 1'',064.x^2.\sin g.nt + c.nt$

$+(11'',966.x - 0'',001.x^3) \cos 2E.nt - g.nt \qquad - 0'',117.x^2.\sin 2E.nt - g.nt$

$+(8'',406.x - 0'',002.x^3) \cos 2E.nt + g.nt - c.nt \qquad - 0'',180.x^2.\sin 2E.nt + g.nt - c.nt$

$+(6'',677.x - 0'',005.x^3) \cos 2E.nt + g.nt \qquad - 0'',219.x^2.\sin 2E.nt + g.nt$

$+(4'',291.x - 0'',003.x^3) \cos g.nt + 2c.nt \qquad - 0'',147.x^2.\sin g.nt + 2c.nt$

$+1'',481.x.\cos 2E.nt-g.nt+c.nt$	$-0'',031.x^2.\sin 2E.nt-g.nt+c.nt$
$+1'',314.x.\cos 2E.nt+c.nt+g.nt$	$-0'',006.x^2.\sin 2E.nt+c.nt+g.nt$
$-0'',758.x.\cos 2E.nt-g.nt-c.nt$	
$+0'',728.x.\cos g.nt-2c.nt$	$-0'',008.x^2.\sin g.nt-2c.nt$
$+0'',524.x.\cos 2E.nt-c'm.nt-g.nt$	$-0'',005.x^2.\sin 2E.nt-c'm.nt-g.nt$
$+0'',485.x.\cos 2E.nt-c'm.nt+g.nt$	$-0'',015.x^2.\sin 2E.nt-c'm.nt+g.nt$
$-0'',445.x.\cos 3g.nt$	$+0'',015.x^2.\sin 3g.nt$
$+0'',379.x.\cos 2E.nt-c'm.nt+g.nt-c.nt$	$-0'',010.x^2.\sin 2E.nt-c'm.nt+g.nt-c.nt$
$+0'',374.x.\cos g.nt+3c.nt$	$-0'',017.x^2.\sin g.nt+3c.nt$
$-0'',337.x.\cos 2E.nt-2c.nt-g.nt$	$+0'',004.x^2.\sin 2E.nt-2c.nt-g.nt$
$-0'',287.x.\cos g.nt-c.nt$	
$+0'',281.x.\cos g.nt+c.nt-c'm.nt$	$-0'',006.x^2.\sin g.nt+c.nt-c'm.nt$
$-0'',262.x.\cos g.nt+c.nt+c'm.nt$	$+0'',006.x^2.\sin g.nt+c.nt+c'm.nt$
$-0'',260.x.\cos 2E.nt+c'm.nt-g.nt$	$+0'',003.x^2.\sin 2E.nt+c'm.nt-g.nt$
$-0'',257.x.\cos 4E.nt-g.nt-c.nt$	$+0'',005.x^2.\sin 4E.nt-g.nt-c.nt$
$-0'',223.x.\cos E.nt+g.nt$	$+0'',005.x^2.\sin E.nt+g.nt$
$-0'',181.x.\cos f.nt$	$+0'',002.x^2.\sin f.nt$
$-0'',144.x.\cos g.nt+c'm.nt$	$+0'',002.x^2.\sin g.nt+c'm.nt$
$-0'',223.x.\cos 3g.nt-c.nt$	
$+0'',155.x.\cos 2E.nt+2c.nt-g.nt$	
$-0'',120.x.\cos 4E.nt+c'm.nt+g.nt+c.nt$	
$+0'',119.x.\cos 4E.nt+g.nt-c.nt$	
$+0'',096.x.\cos 2E.nt+2c.nt+g.nt$	
$+0'',089.x.\cos g.nt-c'm.nt$	

$+0'',087.x.\cos 4E.nt-g.nt$

$+0'',080.x.\cos 3g.nt+c.nt$

$+0'',077.x.\cos 4E.nt+g.nt-2c.nt$

$-0'',069.x.\cos 2E.nt+c'm.nt+g.nt$

$+0'',051.x.\cos 2E.nt-c'm.nt+g.nt+c.nt.$

Mouvement horaire de la parallaxe équatoriale de la Lune.

$-(4'',256.x-0'',0004.x^3)\sin c.nt$

$-1'',174.x.\sin 2E.nt$

$-0'',670.x.\sin 2E.nt-c.nt$

$-0'',468.x.\sin 2c.nt$

$-0'',201.x.\sin 2E.nt+c.nt$

$-0'',088.x.\sin 2E.nt-c'm.nt$

$-0'',043.x.\sin 3c.nt$

$-0'',031.x.\sin 4E.nt-c.nt$

$-0'',028.x.\sin 2g.nt-c.nt$

$-0'',028.x.\sin 2E.nt-c'm.nt-c.nt$

$+0'',024.x.\sin 2E.nt+c'm.nt$

$-0'',024.x.\sin 2E.nt+2c.nt$

$-0'',023.x.\sin c.nt+c'm.nt$

$-0'',022.x.\sin c.nt-c'm.nt$

$+0'',020.x.\sin E.nt$

$-0'',013.x.\sin 4E.nt-2c.nt$

$-0'',012.x.\sin 4E.nt$

$-0'',010.x.\sin 2E.nt-c'm.nt+c.nt$

$-0'',008.x.\sin 2E.nt+c'm.nt-c.nt$

$+0'',049.x^2.\cos c.nt$

$+0'',025.x^2.\cos 2E.nt$

$+0'',007.x^2.\cos 2E.nt-c.nt$

$+0'',011.x^2.\cos 2c.nt$

$+0'',007.x^2.\cos 2E.nt+c.nt$

§ II.

Formules de la Longitude, de la Latitude, et de la Parallaxe de la Lune, propres au calcul des éclipses Lunaires et Solaires.

77. Pour faciliter le calcul des éclipses de Lune ou de Soleil, il convient d'avoir les trois coordonnées de la Lune pour les instans de la conjonction et de l'opposition moyenne; c'est-à-dire pour les instans correspondans à $E.nt = 0$, et à $E.nt = 180°$. Comme ces valeurs particulières de $E.nt$ donnent lieu à une réduction importante dans le nombre des argumens, nous allons donner, ci-après, les formules spéciales relatives à ces deux cas particuliers. Sur quoi il faut observer, que, pour plus de précision, nous avons tenu compte de la totalité des termes qu'on voit dans les formules primitives. En outre on doit être averti, que nous supposons les argumens formés d'après la règle exposée dans la page 733, parceque les signes des coefficiens ont été changés lorsque la partie proportionnelle au temps de l'argument était négative.

Longitude vraie de la Lune.

Argument	Coefficient pour $E.nt=0$		Coefficient ponr $E.nt=180°$	
$\sin c.nt$	+	18231",877	+	18198",075
$\sin 2c.nt$	+	537,794	+	535,635
$\sin 3c.nt$	+	26,720	+	26,720
$\sin 4c.nt$	+	1,130	+	1,130
$\sin 5c.nt$	+	0,117	+	0,117
$\sin c'm.nt$	+	841,926	+	876,358
$\sin 2c'm.nt$	—	15,869	—	15,631
$\sin 3c'm.nt$	—	0,292	—	0,292
$\sin 4c'm.nt$	—	0,003	—	0,003
$\sin 2n'.t+2\varepsilon'_1$	—	1,336	—	1,336
$\sin 2g.nt$	—	468,253	—	470,519
$\sin 4g.nt$	+	0,519	+	0,519
$\sin c.nt+c'm.nt$	—	326,543	—	328,581
$\sin c.nt-c'm.nt$	+	191,260	+	192,412
$\sin 2g.nt+c.nt$	—	46,254	—	46,254
$\sin 2g.nt-c.nt$	—	40,388	—	40,388
$\sin 2c.nt+c'm.nt$	—	16,274	—	16,508
$\sin 2c.nt-c'm.nt$	+	11,387	+	11,731
$\sin g.nt-f.nt$	+	10,111	+	10,111
$\sin 2g.nt-2f.nt$	—	10,608	—	10,608
$\sin g.nt+f.nt$	+	0,343	+	0,343

Argument	Coefficient pour $E.nt=0$		Coefficient pour $E.nt=180°$	
$\sin c.nt+2c'm.nt$	−	8″,699	−	8″,699
$\sin c.nt-2c'm.nt$	+	4,468	+	4,468
$\sin 2c.nt+2c'm.nt$	−	0,412	−	0,412
$\sin 2c.nt-2c'm.nt$	+	0,065	+	0,065
$\sin c.nt+3c'm.nt$	−	0,122	−	0,122
$\sin c.nt-3c'm.nt$	+	0,016	+	0,016
$\sin 3c.nt+c'm.nt$	−	0,693	−	0,693
$\sin 3c.nt-c'm.nt$	+	0,505	+	0,505
$\sin 2g.nt+2c.nt$	−	3,912	−	3,912
$\sin 2g.nt-2c.nt$	+	0,667	+	0,667
$\sin 2g.nt+3c.nt$	−	0,339	−	0,339
$\sin 2g.nt-3c.nt$	−	0,048	−	0,048
$\sin 2g.nt+c'm.nt$	−	1,736	−	1,641
$\sin 2g.nt-c'm.nt$	+	1,130	+	1,160
$\sin 2g.nt+2c'm.nt$	−	0,080	−	0,080
$\sin 2g.nt-2c'm.nt$	+	0,015	+	0,015
$\sin 2g.nt+c.nt+c'm.nt$	+	0,094	+	0,094
$\sin 2g.nt-c.nt-c'm.nt$	−	0,210	−	0,210
$\sin 2g.nt-c.nt+c'm.nt$	+	0,224	+	0,224
$\sin 2g.nt+c.nt-c'm.nt$	−	0,152	−	0,152
$\sin 4g.nt-c.nt$	+	0,140	+	0,140
$\sin 4g.nt+c.nt$	+	0,093	+	0,093
$\sin 2nt-2\varepsilon$	+	0,201	+	0,201

Latitude vraie de la Lune.

Argument	Coefficient pour $E.nt=0$	Coefficient pour $E.nt=180°$
$\sin g.nt$	$+$ 17944″,595	$-$ 17944″,875
$\sin 3g.nt$	$-$ 8,641	$-$ 8,641
$\sin 5g.nt$	$+$ 0,006	$+$ 0,006
$\sin g.nt+c.nt$	$+$ 852,385	$+$ 852,628
$\sin g.nt-c.nt$	$-$ 837,485	$-$ 838,925
$\sin g.nt+2c.nt$	$+$ 46,755	$+$ 46,755
$\sin g.nt-2c.nt$	$+$ 35,366	$+$ 35,366
$\sin g.nt+c'm.nt$	$-$ 35,426	$-$ 37,322
$\sin g.nt-c'm.nt$	$+$ 23,111	$+$ 25,057
$\sin g.nt+c.nt+c'm.nt$	$-$ 13,823	$-$ 14,067
$\sin g.nt-c.nt-c'm.nt$	$+$ 13,135	$+$ 13,235
$\sin g.nt-c.nt+c'm.nt$	$-$ 9,464	$-$ 9,464
$\sin g.nt+c.nt-c'm.nt$	$+$ 8,961	$+$ 9,095
$\sin f.nt$	$-$ 7,886	$-$ 7,886
$\sin g.nt+3c.nt$	$+$ 3,011	$+$ 3,011
$\sin g.nt-3c.nt$	$+$ 1,587	$+$ 1,587
$\sin 3g.nt+c.nt$	$-$ 1,281	$-$ 1,281
$\sin 3g.nt-c.nt$	$+$ 2,675	$+$ 2,675
$\sin g.nt+2c'm.nt$	$-$ 0,773	$-$ 0,773

Argument	Coefficient pour $E.nt=0$		Coefficient pour $E.nt=180°$	
$\sin g.nt-2c'm.nt$	+	0",340	+	0",340
$\sin g.nt+2c.nt+c'm.nt$	−	0,818	−	0,818
$\sin g.nt-2c.nt-c'm.nt$	−	0,248	−	0,248
$\sin g.nt+2c.nt-c'm.nt$	+	0,607	+	0,607
$\sin g.nt-2c.nt+c'm.nt$	−	0,309	−	0,309
$\sin g.nt+4c.nt$	+	0,274	+	0,274
$\sin g.nt-4c.nt$	+	0,130	+	0,130
$\sin g.nt+c.nt+2c'm.nt$	−	0,186	−	0,186
$\sin g.nt-c.nt.-2c'm.nt$	−	0,116	−	0,116
$\sin g.nt-c.nt+2c'm.nt$	−	0,100	−	0,100
$\sin g.nt+c.nt-2c'm.nt$	+	0,073	+	0,073
$\sin 3g.nt+c'm.nt$	−	0,097	−	0,097
$\sin 3g.nt-c'm.nt$	+	0,035	+	0,035
$\sin 3g.nt+2c.nt$	−	0,121	−	0,121
$\sin 3g.nt-2c.nt$	+	0,092	+	0,092
$\sin g.nt+3c'm.nt$	−	0,019	−	0,019
$\sin g.nt-3c'm.nt$	+	0,002	+	0,002

Parallaxe équatoriale de la Lune.

Argument	Coefficient pour $E.nt = 0$		Coefficient pour $E.nt = 180°$	
$\cos 0.nt$	+	3423″,153	+	3423″,153
	+	26,820	+	28,640
$\cos c.nt$	+	224,150	+	224,209
$\cos 2c.nt$	+	10,370	+	10,372
$\cos 3c.nt$	+	0,527	+	0,527
$\cos 4c.nt$	+	0,041	+	0,041
$\cos 5c.nt$	+	0,003	+	0,003
$\cos c'm.nt$	+	1,354	+	1,148
$\cos 2c'm.nt$	+	0,425	+	0,425
$\cos 3c'm.nt$	—	0,002	—	0,002
$\cos 2g.nt$	—	0,115	—	0,125
$\cos 2g.nt - c.nt$	+	1,132	+	1,132
$\cos 2g.nt + c.nt$	—	0,083	—	0,083
$\cos 2g.nt - 2c.nt$	—	0,021	—	0,021
$\cos 2g.nt + 2c.nt$	+	0,002	+	0,002
$\cos 2g.nt - 3c.nt$	—	0,072	—	0,072
$\cos c.nt + c'm.nt$	+	0,571	+	0,545
$\cos c.nt - c'm.nt$	+	0,879	+	0,871
$\cos c.nt + 2c'm.nt$	+	0,035	+	0,035

Argument	Coefficient pour $E.nt=0$		Coefficient pour $E.nt=180°$	
$\cos c.nt - 2c'm.nt$	+	0'',005	+	0'',005
$\cos 2c.nt - c'm.nt$	+	0,092	+	0,092
$\cos 2c.nt + c'm.nt$	−	0,054	−	0,054
$\cos 2g.nt + c'm.nt$	+	0,048	+	0,048
$\cos 2g.nt - c'm.nt$	−	0,020	−	0,021
$\cos 3c.nt + c'm.nt$	−	0,009	−	0,009
$\cos 3c.nt - c'm.nt$	+	0,009	+	0,009
$\cos 2g.nt - c.nt - c'm.nt$	+	0,003	+	0,003
$\cos 2g.nt - c.nt + c'm.nt$	−	0,004	−	0,004
$\cos 2g.nt + c.nt - c'm.nt$	−	0,002	−	0,002
$\cos 2g.nt - c.nt + c'm.nt$	+	0,001	+	0,001

Pour compléter ces formules, nous les avons accompagnées de celles du mouvement horaire qui leur correspondent dans le cas de $E.nt=0$, c'est-à-dire pour les éclipses de Soleil.

Relativement aux éclipses de Lune, il n'y a que les termes affectés des argumens $E.nt$, $3E.nt$ qui donnent lieu à un changement dans les coefficiens. Pour ne point répéter la totalité des termes qui conviennent au cas de $E.nt=180°$, on a marqué par un astérisque le petit nombre de ceux qui doivent être substitués aux premiers.

Mouvement horaire de la longitude vraie de la Lune, pour $E.nt = 0$

$$^{*} + (103'',243.x - 0'',017.x^3) \cos 0.nt$$

$$^{*} + (427'',595.x - 0'',048.x^3) \cos c.nt \qquad - 6'',135.x^2.\sin c.nt$$

$$+ (35'',684.x - 0'',012.x^3) \cos 2c.nt \qquad - 0'',822.x^2.\sin 2c.nt$$

$$+ (2'',691.x - 0'',002.x^3) \cos 3c.nt \qquad - 0'',068.x^2.\sin 3c.nt$$

$$+ 0'',183.x.\cos 4c.nt$$

$$+ 18'',382.x.\cos 2g.nt \qquad - 0'',427.x^2.\sin 2g.nt$$

$$^{*} - 8'',335.x.\cos c'm.nt \qquad - 0'',120.x^2.\sin c'm.nt$$

$$+ 0'',305.x.\cos 2c'm.nt \qquad - 0'',006.x^2.\sin c'm.nt$$

$$- (3'',048.x - 0'',003.x^3) \cos 2g.nt + c.nt \qquad + 0'',108.x^2 \sin 2g.nt + c.nt$$

$$- 1'',603.x.\cos 2g.nt - c.nt \qquad + 0'',030.x^2.\sin 2g.nt - c.nt$$

$$+ 1'',677.x.\cos c.nt - c'm.nt \qquad - 0'',022.x^2.\sin 2c.nt - c'm.nt$$

$$- 0'',360.x.\cos c.nt + c'm.nt \qquad + 0'',043.x^2.\sin c.nt + c'm.nt$$

$$+ 0'',346.x.\cos 2c.nt - c'm.nt \qquad - 0'',009.x^2.\sin 2c.nt - c'm.nt$$

$$+ 0'',348.x.\cos 2c.nt + c'm.nt \qquad - 0'',008.x^2.\sin 2c.nt + c'm.nt$$

$$+ 0'',368.x.\cos 2c.nt - c'm.nt \qquad - 0'',009.x^2.\sin 2c.nt - c'm.nt$$

$$+ 0'',123.x.\cos c.nt + c'm.nt.$$

* Pour $E.nt = 180°$ on prendra ces termes à la place des termes correspondans.

$$+ (98'',473.x - 0'',017.x^3) \cos 0.nt$$

$$+ (424'',619.x - 0'',048.x^3) \cos c.nt \qquad - 6'',119.x^2.\sin c.nt$$

$$- 9'',127.x.\cos c'm.nt. \qquad - 0'',120.x^2.\sin c'm.nt$$

Mouvement horaire de la latitude vraie de la Lune,
pour $E.nt = 0$

$$^{*}+(444'',770.x - 0'',039.x^3)\cos g.nt \qquad - 5'',019.x^2.\sin g.nt$$

$$+ \quad 0'',445.x.\cos 3g.nt \qquad + 0'',015.x^2.\sin 3g.nt$$

$$+(\ 46'',682.x - 0'',021.x^3)\cos g.nt + c.nt \qquad - 1'',065.x^2.\sin 3g.nt + c.nt$$

$$+ \quad 9'',519.x.\cos g.nt - c.nt \qquad - 0'',149.x^2.\sin 3g.nt - c.nt$$

$$+(\ 4'',500.x - 0'',003.x^3)\cos g.nt + 2c.nt \qquad - 0'',151.x^2.\sin g.nt + 2c.nt$$

$$+ \quad 0'',960.x.\cos g.nt - 2c.nt \qquad - 0'',008.x^2.\sin g.nt + 2c.nt$$

$$+ \quad 0'',374.x.\cos g.nt + 3c.nt \qquad - 0'',017.x^2.\sin g.nt + 3c.nt$$

$$- \quad 0'',223.x.\cos 3g.nt - c.nt$$

$$- \quad 0'',080.x.\cos 3g.nt + c.nt$$

$$- \quad 0'',311.x.\cos g.nt + c'm.nt \qquad + 0'',007.x^2.\sin g.nt + 2c.nt$$

$$+ \quad 0'',314.x.\cos g.nt - c'm.nt \qquad - 0'',012.x^2.\sin g.nt - c'm.nt$$

$$- \quad 0'',382.x.\cos g.nt + c.nt + c'm.nt \qquad + 0'',006.x^2.\sin g.nt + c.nt + c'm.nt$$

$$+ \quad 0'',332.x.\cos g.nt + c.nt - c'm.nt \qquad - 0'',006.x^2.\sin g.nt + c.nt - c'm.nt$$

$$- \quad 0'',379.x.\cos g.nt - c.nt - c'm.nt$$

$$- \quad 0'',281.x.\cos f.nt$$

* Pour $E.nt = 180°$ on prendra le terme suivant.

$$+ (445'',216.x. - 0'',039.x^3)\cos g.nt \qquad - 5'',039.x^2.\sin g.nt.$$

Mouvement horaire de la parallaxe équatoriale de la Lune, pour $E.nt = 0$

. . . .	$+0'',024.x^2.\cos 0.nt$
$-3'',756.x.\sin c\,nt$	$+0'',063.x^2.\cos c.nt$
$-0'',479.x.\sin 2c.nt$	$+0'',011.x^2.\cos c.nt$
$-0'',043.x.\sin 3c.nt$	
$+0'',112.x.\sin c'm.nt$	
$-0'',051.x.\sin c.nt+c'm.nt$	
$-0'',024.x.\sin c.nt-c'm.nt$	
$-0'',028.x.\sin 2g.nt-c.nt.$	

Ces termes demeurent le mêmes pour les éclipses de Lune.

§ 12.

Remarque sur le coefficient de l'inégalité Lunaire dépendante de la distance angulaire des périgées du Soleil et de la Lune, publié dans la page 300 de la Connaissance des Tems pour l'année 1824.

78. J'ai fait voir dans les pag. 149-151 du second Volume l'inexactitude du procédé suivi par *Laplace* pour développer le coefficient de l'inégalité Lunaire ayant pour argument $2gv-2cv$. Comme le même auteur a entrepris de développer d'une manière analogue les *deux* premiers termes du coefficient de l'inégalité Lunaire ayant pour argument $Ev+c'mv-cv$, il devient important de ne point passer sous silence dans cet ouvrage, que le *second* terme de ce coefficient trouvé par *Laplace* est fautif. En effet; le résultat obtenu par *Laplace*

dans la page 300 de la Connaissance des Tems pour l'année 1824 se réduit à dire, que dans l'expression de v en fonction du temps on doit avoir le terme

$$\frac{75}{32}\cdot\frac{m^2}{1-c}\cdot e\varepsilon' b^2 \left\{ 1+3\overset{(1)}{A_1}+\overset{(6)}{A_1}+\overset{(9)}{A_1}-\frac{1}{2}\overset{(11)}{C_1} \right\} \sin(E.nt+c'm.nt-c.nt)$$

au lieu de celui que nous avons trouvé dans la p. 583 de ce Volume. Sur cela j'observe que, en négligeant (comme *Laplace*) les quantités de l'ordre m^2 qui multiplient $e\varepsilon' b^2$, il suffit de prendre (conformément à la définition des coefficiens $\overset{(1)}{A_1}$, $\overset{(6)}{A_1}$, $\overset{(9)}{A_1}$, $\overset{(11)}{C_1}$)

$$\overset{(1)}{A_1}=\frac{15}{8}m;\ \overset{(6)}{A_1}=-\frac{15}{8}m;\ \overset{(9)}{A_1}=\frac{9}{8}m;\ \overset{(11)}{C_1}=3m,\ 1-c=\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3;$$

(Voyez pages 846, 848, 845 du troisième volume, et pages 488, 485 de celui-ci).

Donc en substituant ces valeurs, le coefficient de *Laplace* deviendra

$$\frac{25}{8\left(1+\frac{75}{8}m\right)}\left\{1+\left(\frac{45}{8}-\frac{15}{8}+\frac{9}{8}-\frac{3}{2}=\frac{27}{8}\right)m\right\} \quad =\frac{25}{8}-\frac{75}{4}m;$$

de sorte que on a $\frac{75}{4}$ au lieu du nombre $\frac{1045}{32}$, que nous avons obtenu en tenant compte de la totalité des termes de cet ordre.

Peu importe la petitesse de la différence qu'il y a entre ces deux quantités réduites en nombres : elle suffit pour mettre en évidence le vice du calcul de *Laplace*; c'est-à-dire l'omission de quelques-unes des combinaisons qui concourent à la formation de ce second terme.

D'ailleurs, à l'égard d'un aussi petit coefficient, la comparaison de la théorie avec l'observation, citée à ce sujet par *Laplace*, devient un faible argument, soit en faveur, soit contre l'exactitude du résultat de la théorie.

§ 13.

Des mouvemens de la Lune autour de son centre de gravité.

79. Je me propose de rattacher ici la théorie du mouvement de rotation de la Lune, due à *Lagrange*, avec la théorie de son mouvement de révolution autour de la Terre.

Désignons par T le centre de la Terre; par L celui de la Lune; et par D le premier point d'*Aries*, d'où l'on compte les longitudes suivant l'ordres des *signes*. Tirons par le point T la ligne TF perpendiculaire à TD, de manière que FTD soit le plan de l'écliptique fixe.

Cela posé, imaginons par le centre L de la Lune un plan parallèle à celui de l'écliptique fixe; et tirons dans ce plan les deux lignes LD', LF', respectivement parallèles aux lignes TD, TF.

Supposons maintenant, que le plan de l'équateur lunaire coupe suivant la ligne $H'LH''$ le plan parallèle à l'écliptique, et nommons θ l'inclinaison de ces deux plans. Nous regarderons le point H' comme le noeud ascendant, et le point H'' comme le noeud descendant de ce même équateur, tandis que les points G', G'' de la ligne $G''TG'$ tirée par le centre de la Terre dans le plan de l'écliptique représentent respectivement les noeuds ascendant et descendant de l'orbite de la Lune. Pour mieux fixer les idées, nous ferons l'angle $H'LD'=\psi_1$, et l'angle $H''LD'=\psi$: de sorte que, par la définition même de ces deux angles, on a l'équation $\psi=180°-\psi_1$: ce qui revient à compter l'angle ψ depuis le noeud descendant de l'équateur lunaire dans le sens du mouvement de rotation de la Lune.

Désignons par (A), (B), (C) les trois axes principaux de la Lune menés par son centre, tandis que A, B, C représentent les trois momens d'inertie correspondans à ces mêms axes; c'est-à-dire les trois intégrales

$$A=SdM(y'^2+z'^2);\quad B=SdM(x'^2+z'^2);\quad C=SdM(x'^2+y'^2);$$

étendues à la masse entière de la Lune.

Remarquons, avant d'aller plus loin, que, par équateur lunaire, on entend ici le plan de la section qui contient les axes (A) et (B); et que nous regardons l'axe (A) comme celui, qui, conformément aux observations, demeure toujours dirigé, à fort peu-près, vers le centre de la Terre.

Nous nommerons φ l'angle compris entre l'axe (A) et la ligne LH'' dirigée vers le noeud descendant de l'équateur lunaire; mais nous compterons cet angle depuis le point H'' dans le sens du mouvement de rotation de la Lune.

80. Les trois angles θ, ψ, φ étant par là clairement définis, nous supposerons (d'après les observations) que l'angle θ demeure toujours fort petit, et qu'il est permis de faire $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ dans les formules relatives à la théorie du mouvement de rotation. De sorte que on a (Voyez p. 311 du second volume de la Mécanique Céleste);

$$(N)$$

$$p = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}; \qquad \frac{d\theta}{dt} = r\sin\varphi - q\cos\varphi;$$

$$q = \theta\frac{d\psi}{dt}.\sin\varphi - \frac{d\theta}{dt}.\cos\varphi; \qquad \theta\frac{d\psi}{dt} = q\sin\varphi + r\cos\varphi;$$

$$r = \theta\frac{d\psi}{dt}.\cos\varphi + \frac{d\theta}{dt}.\sin\varphi; \qquad \theta\frac{d\varphi}{dt} = \theta.p + q\sin\varphi + r\cos\varphi.$$

En examinant les trois équations (G) posées dans la page 309 du même volume, et remarquant que les quantités θ, Z, q, r, $\frac{B-A}{C}$, $\frac{C-B}{A}$, $\frac{A-C}{B}$ peuvent être considérées comme étant chacune du premier ordre, on pourra, en négligeant les quantités du *troisième* ordre, réduire ces équations à celles-ci, savoir;

$$dp = \frac{3M''.dt}{2r_1^5}\left(\frac{B-A}{C}\right)\left\{(Y^2-X^2)\sin 2\varphi + 2XY\cos 2\varphi\right\};$$

$$dq + \left(\frac{C-B}{A}\right)prdt = \frac{3M''.dt}{r_1^5}\left(\frac{C-B}{A}\right)(Y\theta+Z)\left\{Y\cos\varphi - X\sin\varphi\right\};$$

$$dr + \left(\frac{A-C}{B}\right)pqdt = \frac{3M''.dt}{r_1^5}\left(\frac{A-C}{B}\right)(Y\theta+Z)\left\{X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right\};$$

en observant que nous employons, au lieu de L, la lettre M'' pour représenter la masse de la Terre.

81. Les trois coordonnées X, Y, Z du centre de la Terre sont rapportées à des axes menés par le centre de la Lune, de manière que l'axe des X coincide avec la ligne des noeuds de l'équateur lunaire, et l'axe des Y avec une perpendiculaire à celle-ci située dans le plan parallèle à l'écliptique: il est évident que ces coordonnées sont égales à celles de la Lune vue du centre de la Terre, mais prises avec un signe contraire. Ainsi on a, d'après nos dénominations;

$$X = \frac{\cos(v+\psi+180^\circ)}{u}; \quad Y = \frac{\sin(v+\psi+180^\circ)}{u}; \quad Z = -\frac{s}{u};$$

$$r_i^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1+ss}{u^2}.$$

En substituant ces valeurs dans les trois équations précédentes, il viendra;

$$(L)\ldots\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{3M''u^3}{2(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left(\dfrac{B-A}{C}\right)\sin(2v+2\psi-2\varphi); \\ \dfrac{dq}{dt} + \left(\dfrac{C-B}{A}\right)rp = \dfrac{3M''u^3}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left(\dfrac{C-B}{A}\right)\sin(v+\psi-\varphi)\left\{s+\theta\sin(v+\psi)\right\}; \\ \dfrac{dr}{dt} + \left(\dfrac{A-C}{B}\right)pq = \dfrac{3M''u^3}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left(\dfrac{A-C}{B}\right)\cos(v+\psi-\varphi)\left\{s+\theta\sin(v+\psi)\right\}. \end{cases}$$

Nous avons les valeurs de u, v, s, exprimées en fonctions du temps: ainsi la question est réduite à tirer de ces équations, et des équations désignées plus haut par (N) les valeurs des six quantités p, q, r, φ, ψ, θ en fonction du temps. C'est en cela que consiste le problème considéré en général; mais plusieurs circonstances particulières en facilitent la solution. D'abord, on peut réduire à l'unité le facteur $(1+ss)^{-\frac{5}{2}}$, puisque nous avons fait la convention de négliger dans le second membre des équations (L) les quantités du troisième ordre. Par la même raison, nous pouvons négliger les termes périodiques qui entrent dans la valeur de u^3 et prendre $u^3 = \frac{1}{a^3}$; $\frac{M''}{a^3} = n^2$.

On sait, d'après les observations, que l'arc $v+\psi-\varphi$ est toujours peu différent de $-180°$: cette circonstance range le *sinus* de $v+\psi-\varphi$ parmi les quantités du premier ordre. Donc, en supprimant dans le second membre des équations (L) les quantités du troisième ordre on les réduira à celles-ci, savoir;

$$(L') \quad \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{dp}{dt}=\dfrac{3}{2}n^2\left(\dfrac{B-A}{C}\right)\sin(2v+2\psi-2\varphi); \\ \dfrac{dq}{dt}+\left(\dfrac{C-B}{A}\right)rp=0; \\ \dfrac{dr}{dt}+\left(\dfrac{A-C}{B}\right)pq=-3n^2\left(\dfrac{A-C}{B}\right)(s-\theta\sin\varphi). \end{cases}$$

Telles sont les équations que nous allons intégrer pour avoir la première approximation; mais nous reprendrons les équations (L) pour passer de là à la seconde. Nous supposerons, que les valeurs de $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, q, r qui auraient lieu en vertu des seules circonstances initiales sont nulles. Il est permis d'avoir des doutes sur cette hypothèse; mais en l'admettant, voici comment on détermine les valeurs de p, q, r qui sont dues uniquement à l'action de la Terre sur le sphéroïde lunaire.

82. La première des trois équations (L') peut être intégrée indépendamment des deux autres. Pour cela remarquons, que la longitude v de la Lune est donnée par une équation de la forme

$$v=nt+\varepsilon-\int\zeta ndt+\Sigma H\sin\Pi,$$

en représentant par $\Sigma H\sin\Pi$ la totalité des termes périodiques qu'on voit dans les pages 618-627 de ce volume: et que la première des six équations (N) donne, en prenant $-180°-\varepsilon$ pour la constante arbitraire ajoutée à l'intégration, $\int pdt=\varphi-\psi-180°-\varepsilon$, pour l'arc parcouru par la rotation de la Lune pendant le temps t. Il suit de là que

$$v+\psi-\varphi+180°=nt-\int\zeta ndt-\int pdt+\Sigma H\sin\Pi.$$

Donc en observant, que

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d^2.\int pdt}{dt^2}=\frac{d^2.\{\int pdt-nt+\int\zeta ndt\}}{dt^2}-\zeta n$$

on pourra mettre la première des équations (L') sous la forme

$$(K) \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{d^2U}{dt^2}=\zeta n-\frac{3}{2}n^2\left(\frac{B-A}{C}\right)sin\left\{2U-2\Sigma H\, sin\,\Pi\right\},$$

en posant pour plus de simplicité;

$$U=\int pdt-nt+\int\zeta ndt.$$

La quantité U étant la différence des moyens mouvemens de rotation et de révolution de la Lune, on peut la supposer fort petite, d'après le fait que la Lune nous présente toujours la même face à très-peu-près. D'un autre côté la quantité $\Sigma H\, sin\,\Pi$, est toujours égale à un petit nombre de degrés conformément à sa définition. Donc, en vertu de cette double circonstance on peut remplacer le *sinus* par l'arc dans le second membre de l'équation (K). Alors elle devient immédiatement intégrable, et on en tire, en négligeant le coefficient différentiel $\frac{d\zeta}{dt}$;

$$U=G\,sin\left\{nt\sqrt{3\left(\frac{B-A}{C}\right)}+\lambda\right\}+\frac{\zeta n}{3n^2\left(\frac{B-A}{C}\right)}-3\left(\frac{B-A}{C}\right)\Sigma\,\frac{H\,sin\,\Pi}{\left(\frac{d\Pi}{ndt}\right)^2-3\left(\frac{B-A}{C}\right)}.$$

Il suffirait ici de mettre pour ζn le premier terme $\frac{3}{2}m^2n(\varepsilon'^2-E'^2)$ de son expression (Voyez p. 485): mais il est plus simple de supprimer tout-à-fait ce terme, en observant que la très-petite quantité $\varepsilon'^2-E'^2$ donne un quotient fort petit, même en la divisant par 0,00056, qui est la valeur probable de $\left(\frac{B-A}{C}\right)$.

Le terme multiplié par G, qui contient les deux constantes arbitraires G et λ, est celui par lequel *Lagrange* expliqua le premier, comment la Lune peut nous présenter toujours à-peu-près la même face, sans qu'on soit obligé de supposer, que la vitesse de rotation

primitive imprimée à la Lune a été exactement égale à sa vitesse moyenne de révolution autour de la Terre.

Il suit de là qu'on a,

$$U=\int pdt-nt+\int \zeta ndt=-3\left(\frac{B-A}{C}\right)\Sigma\frac{H\sin\Pi}{\left(\frac{d\Pi}{ndt}\right)^2-3\left(\frac{B-A}{C}\right)},$$

pour l'expression analytique de l'excès du mouvement réel de rotation de la Lune sur son moyen mouvement de révolution autour de la Terre, abstraction faite du terme multiplié par G.

Le facteur $\frac{1}{1-\left(\frac{d\Pi}{ndt}\right)^2\frac{C}{3(B-A)}}$, indique la modification que chaque terme de la longitude vraie de la Lune reçoit en se transmettant à son mouvement de rotation : mais il est remarquable que l'équation séculaire soit précisément la même pour ces deux mouvemens.

83. Considérons maintenant la seconde et la troisième des équations (L') après y avoir fait $p=n$: ce qui revient à négliger des termes très-petits, comme cela est manifeste par l'expression précédente de U. Quoique s soit une fonction explicite du temps censée connue, le terme multiplié par $\theta\sin\varphi$ qu'on voit dans la troisième des équations (L') empêche l'intégration sous cette forme. Mais *Lagrange* a remarqué le premier qu'on pouvait surmonter cet obstacle par une transformation fort simple, analogue à celle qu'on emploie dans la théorie des inégalités séculaires des élémens des planètes, qui consiste à faire

$$x=\theta.\sin\varphi,\qquad y=\theta.\cos\varphi.$$

En effet; ces équations et leurs différentielles étant combinées avec les équations (N) donnent;

$$\frac{dx}{dt}=r+py,\qquad \frac{dy}{dt}=-q-px.$$

Donc, en posant $p=n$, il viendra

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}-n\frac{dy}{dt};\qquad \frac{dq}{dt}=-\frac{d^2y}{dt^2}-n\frac{dx}{dt};$$

ce qui transforme la seconde et la troisième des équations (L') en celles-ci :

$$(L'') \ldots \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}+n\left(\frac{A+B-C}{A}\right)\frac{dx}{dt}+n^2\left(\frac{C-B}{A}\right)y=0; \\ \frac{d^2x}{dt^2}-n\left(\frac{B+A-C}{B}\right)\frac{dy}{dt}+4n^2\left(\frac{C-A}{B}\right)x-3n^2\left(\frac{C-A}{B}\right)s=0. \end{cases}$$

Maintenant, il s'agit d'intégrer ces deux équations linéaires, lorsqu'on on y fait $s=\Sigma K sin(\alpha.nt+\beta)$. Mais nous prendrons pour s le seul terme du premier ordre $\gamma sin gv$ (qui comprend la partie principale de la tangente de la latitude de la Lune par rapport à l'écliptique vraie) augmenté des termes de la forme $K sin(\alpha.nt+\beta)$ qui déterminent la partie de s due au déplacement séculaire du plan de l'écliptique.

En supposant $s=0$, et intégrant ensuite les deux équations (L'') on aurait la partie de x et y qui contient les quatre constantes arbitraires renfermées dans leurs valeurs complétes. Mais, pour le moment, nous faisons abstraction de cette partie, et il est seulement question de savoir quelle est l'expression de x et y qui répond à un terme quelconque de la fonction $\Sigma K sin(\alpha.nt+\beta)$.

Soit $K sin(\alpha.nt+\beta)$ ce terme; si l'on fait

$$-x=QK sin(\alpha.nt+\beta); \qquad -y=Q'K cos(\alpha.nt+\beta),$$

on trouvera aussitôt que les équations (L'') seront satisfaites en prenant;

$$Q'=\frac{\alpha(A+B-C)}{A\alpha^2+B-C}.Q,$$

$$Q=\frac{3(A-C)(A\alpha^2+B-C)}{\alpha^2\{(A+B-C)^2+4A(C-A)+B(C-B)\}-4(C-A)(C-B)-AB\alpha^4};$$

de sorte que on a;

$$-x=\Sigma QK.sin(\alpha.nt+\beta), \qquad -y=\Sigma Q'K.cos(\alpha.nt+\beta),$$

pourvu que les coefficiens Q et Q' correspondans à un argument donné $\alpha.nt+\beta$ soient calculés d'après les formules précédentes.

Relativement aux argumens pour lesquels la quantité α est peu différente de l'unité, si l'on fait $\alpha = 1 + f$, on aura, en négligeant le carré de f, et les produits $f(A-C)$, $f(B-C)$, $f(A-B)$;

$$Q' = \frac{A+B-C+fA}{A+B-C+2fA}\,Q,$$

$$Q = \frac{3(C-A)(A+B-C)}{A\{2fB+3(A-C)\}+3(B-C)(A-C)}.$$

La petitesse du produit $(B-C)(A-C)$ permet de négliger aussi cette quantité; et alors on a

$$Q = \frac{3(C-A)}{2fB-3(C-A)};$$

et $Q' = Q(1-f)$; ou bien $Q' = Q$, puisqu'on néglige le produit $f(A-C)$.

84. Lorsque la quantité f est, par sa nature, très-petite relativement à la quantité $\frac{C-A}{B}$, on peut, sans erreur sensible, réduire à $Q = -1$ la dernière expression de Q. Cette circonstance ayant lieu à l'égard des termes de s qui dépendent du mouvement séculaire du plan de l'écliptique (Voyez p. 215 de ce volume), il est clair, que, par la réunion des deux parties de s considérées dans cette intégration, on a

$$-\theta.\sin\varphi = \frac{3(C-A)\gamma}{2B(g-1)-3(C-A)}.\sin g.nt - \Sigma K \sin(\alpha.nt+\beta),$$

$$-\theta.\cos\varphi = \frac{3(C-A)\gamma}{2B(g-1)-3(C-A)}.\cos g.nt - \Sigma K \cos(\alpha.nt+\beta).$$

Or, en posant

$$-\theta.\sin\varphi + \Sigma K \sin(\alpha.nt+\beta) = -\omega.\sin\varphi_1,$$

$$-\theta.\cos\varphi + \Sigma K \cos(\alpha.nt+\beta) = -\omega.\cos\varphi_1,$$

il est aisé de voir qu'on peut regarder ω comme l'inclinaison de l'équateur lunaire par rapport à l'écliptique mobile, et φ_1 comme l'angle formé par l'intersection de ces deux plans et l'axe désigné par (A). Donc, en remplaçant $g.nt$ par sa véritable valeur (Voyez p. 724), nous aurons

$$\omega.\sin\varphi_1=-\mu\gamma.\sin\left\{g\left(nt-\int\zeta ndt\right)+\varepsilon-\theta_1-\int\theta ndt\right\};$$

$$\omega.\cos\varphi_1=-\mu\gamma.\cos\left\{g\left(nt-\int\zeta ndt\right)+\varepsilon-\theta_1-\int\theta ndt\right\};$$

en posant, pour plus de simplicité

$$\mu=\frac{3(C-A)}{2B(g-1)-3(C-A)}.$$

La valeur de $tang\,\varphi_1$ qu'on obtient par la division de ces deux équations donne

$$\varphi_1=180°+g\left(nt-\int\zeta ndt\right)+\varepsilon-\theta_1-\int\theta.ndt.$$

D'un autre côté, si l'on néglige les termes périodiques on a, d'après ce qui précède, l'équation $U=0$, qui donne

$$\varphi_1=180°+\psi+nt+\varepsilon-\int\zeta ndt:$$

donc en égalant ces deux valeurs de φ_1; et substituant au lieu de ψ sa valeur $180°-\psi_1$, il viendra

$$\psi_1=180°+\theta_1+\int\theta.ndt-(g-1)\left(nt-\int\zeta ndt\right),$$

ce qui revient à dire, que la longitude moyenne du noeud *ascendant* de l'équateur lunaire est égale à la longitude moyenne du noeud *descendant* de l'orbite de la Lune, même en tenant compte de sa partie séculaire représentée par l'intégrale $\int\theta.ndt$. Ce résultat étant conforme à l'observation, on doit rejeter l'autre valeur de φ_1 qui satisfait aussi à l'égalité des deux tangentes.

De là nous concluons que les deux équations trouvées plus haut, donnent $\omega=\mu\gamma$ pour l'expression analytique de l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire par rapport à l'écliptique vraie. Sur quoi il faut observer, que le second membre de cette équation doit être positif afin que la valeur de ω soit positive, et que, conformément à l'obser-

vation, le plan parallèle à l'écliptique mené par le centre de la Lune soit entre le plan de l'orbite et le plan de l'équateur lunaire, de manière que ces trois plans se coupent suivant la même ligne droite.

Si le noeud *ascendant* de l'orbite coïncidait avec le noeud *ascendant* de l'équateur lunaire; alors, ce dernier plan serait entre le plan de l'écliptique et le plan de l'orbite. C'est en cela que consiste la différence des deux cas: le sens du mouvement de rotation serait le même dans l'un comme dans l'autre.

Les conséquences qu'on vient de tirer de l'intégration précédente sont modifiées par les termes affectés des constantes arbitraires qui complètent les intégrales. Mais nous renvoyons au Mémoire de *Lagrange* (Voyez page 294 du volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1780) ceux qui désirent de plus amples détails sur ce point.

85. Les expressions primitives de Q et Q' peuvent être mises sous cette forme;

$$Q=\frac{3(A-C)(A\alpha^2+B-C)}{D};\qquad Q'=\frac{3(A-C)(A+B-C)\alpha}{D},$$

en posant pour plus de simplicité;

$$D=\alpha^2\{C(C-B)-3A^2+2A(B+C)\}-AB\alpha^4-4(C-A)(C-B).$$

On voit par là, que les coefficiens Q et Q' seront aussi de l'ordre zéro, lorsque le coefficient α sera d'une petitesse comparable à $B-A$. Il y a des termes de cette espèce parmi ceux qui composent l'expression de s; mais, comme ils sont d'un ordre supérieur au premier, il devient nécessaire d'employer les équations (L) pour obtenir avec justesse les termes introduits par cette seconde approximation dans les expressions de x et y.

86. Pour cela, je remarque d'abord, que, en faisant dans ces équations;

$$\frac{M''}{a^3}=n^2,\ \nu+\psi-\varphi=-180°-U-\Sigma H\sin\Pi;\ \text{et}\ p=n-\zeta n-\frac{dU}{dt},$$

on peut les écrire ainsi :

$$(L''') \ldots \begin{cases} \frac{d^2U}{dt^2} = \zeta n + \frac{3n^2(au)^3}{2(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{B-A}{C}\right) \sin\left\{2U - 2\Sigma H \sin \Pi\right\}; \\ \frac{dq}{dt} + \left(\frac{C-B}{A}\right) r \left(n - \zeta n + \frac{dU}{dt}\right) = \\ \frac{3n^2(au)^3}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{C-B}{A}\right)\left\{s - \theta \sin(\varphi - U + \Sigma H \sin \Pi)\right\} \sin(U - \Sigma H \sin \Pi); \\ \frac{dr}{dt} + \left(\frac{A-C}{B}\right) q \left(n - \zeta n + \frac{dU}{dt}\right) = \\ -\frac{3n^2(au)^3}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{A-C}{B}\right)\left\{s - \theta \sin(\varphi - U + \Sigma H \sin \Pi)\right\} \cos(U - \Sigma H \sin \Pi); \end{cases}$$

actuellement, si l'on supprime les termes du quatrième ordre, elles se réduisent à celles-ci ;

$$(L'') \ldots \begin{cases} \frac{d^2U}{dt^2} = \zeta n + 3n^2\left(\frac{B-A}{C}\right)(au)^3 (U - \Sigma H \sin \Pi); \\ \frac{dq}{dt} + n\left(\frac{C-B}{A}\right) r = 3n^2\left(\frac{C-B}{A}\right)(au)^3 (s - \theta \sin \varphi)(U - \Sigma H \sin \Pi); \\ \frac{dr}{dt} + n\left(\frac{A-C}{B}\right) q = -3n^2\left(\frac{A-C}{B}\right)(au)^3 \left\{s - \theta \sin \varphi + \theta \cos \varphi (U - \Sigma H \sin \Pi)\right\}. \end{cases}$$

Par le même motif, on peut faire $au = 1$ dans la seconde de ces équations, et $au = 1 + e \cos c.nt$ dans la troisième, ce qui donne;

$$(L') \ldots \begin{cases} \frac{dq}{dt} + n\left(\frac{C-B}{A}\right) r = 3n^2\left(\frac{C-B}{A}\right)(s - \theta \sin \varphi)(U - \Sigma H \sin \Pi); \\ \frac{dr}{dt} + n\left(\frac{A-C}{B}\right) q = -3n^2\left(\frac{A-C}{B}\right)\left\{\begin{matrix}(1 + 3e \cos c.nt)(s - \theta \sin \varphi) \\ + \theta \cos \varphi (U - \Sigma H \sin \Pi)\end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

Or, en examinant les différens termes qui composent l'expression de la latitude de la Lune (Voyez pages 704-16) on voit, que, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au second, il suffit de prendre

$$s = \gamma \sin g.nt - e\gamma \left\{\sin(g.nt - c.nt) - \sin(g.nt + c.nt)\right\} + \frac{3}{8} m\gamma \sin(2E.nt - g.nt).$$

La substitution de cette valeur de s dans les deux équations précédentes donne, en négligeant toujours les quantités du quatrième ordre;

$$\frac{dq}{dt}+n\left(\frac{C-B}{A}\right)r=3n^2\left(\frac{C-B}{A}\right)(\gamma\sin g.nt-\theta\sin\varphi)(U-\Sigma H\sin\Pi);$$

$$\frac{dr}{dt}+n\left(\frac{A-C}{B}\right)q=3n^2\left(\frac{C-A}{B}\right)\left\{\begin{array}{l}\gamma\sin g.nt+\frac{c\gamma}{2}\sin(g.nt-c.nt)\\+\frac{5}{2}e\gamma\sin(g.nt+c.nt)+\frac{3}{8}m\gamma\sin(2E.nt-g.nt)\\-\theta\sin\varphi(1+3e\cos c.nt)+\theta\cos\varphi(U-\Sigma H\sin\Pi)\end{array}\right\}.$$

Mais nous avons vu plus haut, qu'on a

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{d^2y}{dt^2}-n\frac{dx}{dt};\qquad \frac{dr}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}-n\frac{dy}{dt};$$

$$r=\frac{dx}{dt}-ny;\qquad q=-\frac{dy}{dt}-nx.$$

Donc en substituant ces valeurs, il viendra

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n\left(\frac{A+B-C}{A}\right)\frac{dx}{dt}+n^2\left(\frac{C-B}{A}\right)y=$$

$$3n^2\left(\frac{C-B}{A}\right)\{x-\gamma\sin g.nt\}(U-\Sigma H\sin\Pi);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-n\left(\frac{A+B-C}{B}\right)\frac{dy}{dt}+4n^2\left(\frac{C-A}{B}\right)x=$$

$$-3n^2\left(\frac{A-C}{B}\right)\left\{\begin{array}{l}\gamma\sin g.nt+\frac{c\gamma}{2}\sin(g.nt-c.nt)+\frac{5}{2}c\gamma\sin(g.nt+c.nt)\\+\frac{3}{8}m\gamma\sin(2E.nt-g.nt)-3xe\cos c.nt+y(U-\Sigma H\sin\Pi)\end{array}\right\}.$$

Dans le second membre de ces équations on peut substituer pour x, y leurs valeurs fournies par la première approximation; c'est-à-dire (Voyez p. 766)

$$x=-\gamma\mu\sin g.nt;\qquad y=-\gamma\mu\cos g.nt.$$

En outre, il suffit de prendre pour $U-\Sigma H\sin\Pi$ le seul terme du premier ordre $-2e\sin c.nt$ (Voyez page 574). Alors on obtient;

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n\left(\frac{A+B-C}{A}\right)\frac{dx}{dt}+n^2\left(\frac{C-B}{A}\right)y=$$

$$3n^2\left(\frac{C-B}{A}\right)(1+\mu)e\gamma\left\{\cos(g.nt-c.nt)-\cos(g.nt+c.nt)\right\};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-n\left(\frac{A+B-C}{B}\right)\frac{dy}{dt}+4n^2\left(\frac{C-A}{B}\right)x=$$

$$-3n^2\left(\frac{A-C}{B}\right)\left\{\begin{array}{l}\gamma\sin g.nt+\frac{3}{8}m\gamma\sin(2E.nt-g.nt)\\+(1+\mu)\frac{e\gamma}{2}\left\{\sin(g.nt-c.nt)+5\sin(g.nt+c.nt)\right\}\end{array}\right\}.$$

Maintenant, si l'on considère seulement le terme affecté de l'argument $g.nt-c.nt$, il est clair que les valeurs correspondantes de x et y sont de la forme

$$x=M(1+\mu)e\gamma\sin(g.nt-c.nt);\quad y=N(1+\mu)e\gamma\cos(g.nt-c.nt).$$

En substituant ces valeurs on obtient pour déterminer les coefficiens M et N ces deux équations;

$$N\left\{\frac{C-B}{A}-(g-c)^2\right\}+M(g-c)\left(\frac{A+B-C}{A}\right)=3\left(\frac{C-B}{A}\right),$$

$$N(g-c)\left(\frac{A+B-C}{B}\right)+M\left\{4\left(\frac{C-A}{B}\right)-(g-c)^2\right\}=\frac{3}{2}\left(\frac{C-A}{B}\right),$$

lesquelles donnent;

$$M=\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{C-A}{B}\right)\left\{\frac{C-A}{B}-(g-c)^2\right\}+3(g-c)\left(\frac{B-C}{A}\right)\left(\frac{A+B-C}{B}\right)}{\left\{\frac{C-B}{A}-(g-c)^2\right\}\left\{4\left(\frac{C-A}{B}\right)-(g-c)^2\right\}-\frac{(g-c)^2(A+B-C)^2}{AB}};$$

$$N=\frac{3\left(\frac{C-B}{A}\right)\left\{4\left(\frac{C-A}{B}\right)-(g-c)^2\right\}-\frac{3}{2}(g-c)\left(\frac{C-A}{B}\right)\left(\frac{A+B-C}{A}\right)}{\left\{\frac{C-B}{A}-(g-c)^2\right\}\left\{4\left(\frac{C-A}{B}\right)-(g-c)^2\right\}-\frac{(g-c)^2(A+B-C)^2}{AB}}.$$

En retenant seulement la partie principale de ces coefficiens on aurait;

$$M=\frac{3(C-B)}{(g-c)(A+B-C)};\qquad N=\frac{3(C-A)}{2(g-c)(A+B-C)};$$

et par conséquent

$$x=\frac{(1+\mu)3(C-B)}{(g-c)(A+B-C)}.e\gamma\sin(g.nt-c.nt);$$

$$y=\frac{(1+\mu)3(C-A)}{2(g-c)(A+B-C)}.e\gamma\cos(g.nt-c.nt).$$

Ce résultat est d'accord avec celui que *Laplace* a publié dans le cinquième volume de sa Mécanique Céleste (Voyez page 286), en observant, que rien n'empêche ici de remplacer le facteur $A+B-C$ par A, ou par B (*).

87. D'après nos dénominations, la longitude moyenne du noeud *ascendant* de l'orbite est exprimée par

$$\theta_1-(g-1)(nt-\int\zeta ndt)+\int\theta ndt,$$

et celle du noeud *descendant* de l'équateur lunaire est égale à $-\psi$, lorsqu'on veut la compter, comme la première, suivant l'ordre des signes. Donc, en nommant Ω l'angle au centre de la Lune formé par les lignes tirées à ces deux noeuds, on a

$$\Omega=-\psi-\theta_1+(g-1)(nt-\int\zeta ndt)-\int\theta ndt.$$

Mais on a vu plus haut, que, en négligeant dans l'expression de U les termes périodiques, on a l'équation

(*) Le terme de l'expression de y diffère un peu de celui qu'on voit dans la page 223 de la *Conn.e des Tems* pour l'année 1821; parceque M.r *Poisson* a pris, dans la valeur de s, $-1+k$ à la place de -1 pour le coefficient du terme $e\gamma\sin(g.nt-c.nt)$: mais nous avons négligé la quantité du second ordre designée par k pour nous conformer aux principes de la méthode des approximations successives. D'ailleurs la véritable valeur de k qu'il faudrait employer dans le cas actuel où le temps t (et non la longitude v de la Lune) est la variable indépendante, serait $\frac{141}{64}m^2+\frac{5}{8}e^2+$ etc., et non $3m^2+\frac{9}{2}m^3+$ etc. (Voyez pages 705 et 497 de ce volume).

$$U=\varphi-\psi-180^\circ-\varepsilon-nt+\int\zeta ndt=0;$$

partant,

$$\Omega=180^\circ-\varphi-\theta_{,}+\varepsilon+g(nt-\int\zeta ndt)-\int\theta ndt;$$

ou bien $\Omega=180^\circ-\varphi+gnt$; en écrivant seulement gnt à la place de $g(nt-\int\zeta ndt)+\varepsilon-\theta_{,}-\int\zeta ndt$, suivant notre coutume.

Les expressions précédentes de x, y, donnent, en retenant seulement les deux argumens gnt, $gnt-cnt$;

$$(1)\ \ .\ .\ \omega\sin\varphi=-\gamma\mu\sin g.nt+M(1+\mu)e\gamma\sin(g.nt-c.nt),$$

$$(2)\ \ .\ .\ \omega\cos\varphi=-\gamma\mu\cos g.nt+N(1+\mu)e\gamma\cos(g.nt-c.nt).$$

De là on conclut aisément ces trois équations;

$$\omega\sin(\varphi-g.nt)=\frac{e\gamma(1+\mu)}{2}\left\{(M-N)\sin(2g.nt-c.nt)-(M+N)\sin c.nt\right\};$$

$$\omega\cos(\varphi-g.nt)=-\gamma\mu-\frac{e\gamma(1+\mu)}{2}\left\{(M-N)\cos(2g.nt-c.nt)-(M+N)\cos c.nt\right\};$$

$$\tang(\varphi-180^\circ-g.nt)=\frac{(1+\mu)\left\{(M+N)\sin c.nt-(M-N)\sin(2g.nt-c.nt)\right\}}{\frac{2\mu}{e}-(1+\mu)\left\{(M+N)\cos c.nt-(M-N)\cos(2g.nt-c.nt)\right\}}.$$

Maintenant, pour tirer de la dernière de ces équations la valeur de l'arc $\varphi-180^\circ-g.nt$, on fera, comme *Lagrange*;

$$\varphi-180^\circ-g.nt=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{Log.}\left\{\frac{1+\sqrt{-1}\tang(\varphi-180^\circ-g.nt)}{1-\sqrt{-1}\tang(\varphi-180^\circ-g.nt)}\right\};$$

ce qui fournit l'équation

$$\varphi-180^\circ-g.nt=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{Log.}\left\{1-\frac{e(1+\mu)(M+N)}{2\mu}\lambda^{-c.nt\sqrt{-1}}+\frac{e(1+\mu)(M-N)}{2\mu}\lambda^{-(2g-c)nt\sqrt{-1}}\right\}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{Log.}\left\{1-\frac{e(1+\mu)(M+N)}{2\mu}\lambda^{c.nt\sqrt{-1}}+\frac{e(1+\mu)(M-N)}{2\mu}\lambda^{(2g-c)nt\sqrt{-1}}\right\};$$

λ désignant la base des logarithmes hyperboliques. Cela posé, si l'on développe ces deux logarithmes on aura, en retenant seulement les deux premiers termes ;

$$(3) .. -\Omega = \varphi - 180^\circ - g.nt = \frac{e(1+\mu)}{2\mu}\left\{(M+N)\sin c.nt - (M-N)\sin(2g.nt - c.nt)\right\}.$$

En ajoutant les carrés des équations (1) et (2) on en tirera, en supprimant les termes de l'ordre du carré de M et N ;

$$(4) .. \omega = \gamma\mu - \frac{e\gamma(1+\mu)}{2}\left\{(M+N)\cos c.nt - (M-N)\cos(2g.nt - c.nt)\right\}.$$

En substituant dans ces équations les valeurs approchées de M, N trouvées plus haut, il viendra ;

$$(5) .. \Omega = -\frac{3e(1+\mu)}{2\mu(g-c)}\left\{\left(\frac{C-A}{2B} + \frac{C-B}{A}\right)\sin c.nt + \left(\frac{C-A}{2B} - \frac{C-B}{A}\right)\sin(2g.nt - c.nt)\right\};$$

$$(6) .. \omega = \gamma\mu - \frac{3e\gamma(1+\mu)}{2(g-c)}\left\{\left(\frac{C-A}{2B} + \frac{C-B}{A}\right)\cos c.nt + \left(\frac{C-A}{2B} - \frac{C-B}{A}\right)\cos(2g.nt - c.nt)\right\}.$$

88. Ces mêmes formules donnent aisément l'angle formé par l'axe instantané de rotation, et le troisième axe principal (C) : en désignant cet angle par $\delta\omega$, on sait que son *sinus* est exprimé par $\sqrt{\frac{q^2+r^2}{p^2+q^2+r^2}}$: mais on peut ici, faire $p=n$ et négliger la puissance $\frac{3}{2}$ de $\left(\frac{q}{n}\right)^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2$, ainsi que la différence entre l'arc et le *sinus*. Alors, on a

$$\delta\omega = \sqrt{\left(\frac{q}{n}\right)^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{dy}{ndt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ndt} - y\right)^2};$$

d'où l'on tire, en négligeant les termes de l'ordre du carré des coefficiens M et N ;

$$(7) .. \delta\omega = (g-1)\gamma\mu + \frac{(1+\mu)e\gamma}{2}\left\{M+N+(M-N)(g-c)\right\}\cos c.nt$$
$$- \frac{(1+\mu)e\gamma}{2}\left\{M-N+(M+N)(g-c)\right\}\cos(2g.nt - c.nt).$$

89. Il est facile de tirer des formules précédentes la longitude et la latitude sélénocentrique d'un point donné sur la surface de la Lune. Soient x'', y'', z'' les coordonnées de ce point par rapport aux axes principaux; et x', y', z' les coordonnées du même point, par rapport aux axes menés par le centre de la Lune parallélement à ceux qui déterminent son mouvement autour de la Terre.

Puisqu'on néglige ici le carré de l'angle désigné par θ, les formules générales de la transformation des coordonnées donneront (Voyez page 73 du premier volume de la Mécanique Céleste)

$$(f) \cdot\cdot \begin{cases} x' = x'' \cos(\varphi - \psi) - y'' \sin(\varphi - \psi) + z''.\theta \sin\psi, \\ y' = x'' \sin(\varphi - \psi) + y'' \cos(\varphi - \psi) + z''.\theta \cos\psi, \\ z' = z'' - \theta(y'' \cos\varphi + x'' \sin\varphi). \end{cases}$$

D'un autre côté nous avons

$$x'' = R\cos\lambda\cos\varpi, \quad y'' = R\cos\lambda.\sin\varpi, \quad z'' = R\sin\lambda,$$

$$x' = R\cos\Lambda\cos\Pi, \quad y' = R\cos\Lambda\sin\Pi, \quad z' = R\sin\Lambda,$$

pour les coordonnées polaires du point considéré sur la surface de la Lune; R étant son rayon vecteur mené par le centre de la Lune; λ et ϖ sa latitude et sa longitude sélénographique; Λ et Π sa latitude et sa longitude sélénocentrique. Donc, en substituant ces valeurs, il viendra

$$\cos\Lambda\cos\Pi = \cos\lambda\cos(\varphi - \psi + \varpi) + \theta.\sin\lambda\sin\psi;$$

$$\cos\Lambda\sin\Pi = \cos\lambda\sin(\varphi - \psi + \varpi) + \theta.\sin\lambda\cos\psi;$$

$$\sin\Lambda = \sin\lambda - \theta.\cos\lambda\sin(\varphi + \varpi).$$

La dernière de ces trois équations peut être mise sous la forme

$$2\,sin\,\tfrac{1}{2}(\Lambda-\lambda)\,cos\,\tfrac{1}{2}(\Lambda+\lambda)=-\theta.\,cos\,\lambda\,sin\,(\varphi+\varpi);$$

ainsi, il est évident qu'on a, $\Lambda-\lambda=-\theta.\,sin(\varphi+\varpi)$, lorsqu'on néglige le carré de θ.

Les deux premières des mêmes équations donnent;

$$tang\left\{\Pi-(\varphi-\psi+\varpi)\right\}=\frac{\theta.\,sin\,\lambda\,cos\,(\varphi+\psi)}{cos\,\lambda+\theta.\,sin\,\lambda\,sin\,(\varphi+\psi)}.$$

Donc en négligeant le carré de θ, on obtient

$$\Pi=\varphi-\psi+\varpi+\theta.\,tang\,\lambda\,cos\,(\varphi+\varpi).$$

Mais nous avons

$$U=\varphi-\psi-180^\circ-\varepsilon-nt+\int\zeta ndt;$$

partant, si l'on change θ en ω (ce qui est permis sans erreur sensible) il viendra

$$\Lambda=\lambda-\omega.\,sin\,(\varphi+\varpi);$$

$$\Pi=\varpi+180^\circ+\varepsilon+nt-\int\zeta ndt+U+\omega.\,tang\,\lambda\,cos\,(\varphi+\varpi);$$

ou bien, à cause de $x=\omega\,sin\,\varphi$, $y=\omega\,cos\,\varphi$;

$$(8)\;.\;.\begin{cases}\Lambda=\lambda-x\,cos\,\varpi-y\,sin\,\varpi;\\ \Pi=\varpi+180^\circ+(nt+\varepsilon-\int\zeta ndt)+U+tang\,\lambda\,(y\,cos\,\varpi-x\,sin\,\varpi).\end{cases}$$

En retenant dans l'expression de U les deux principaux termes périodiques seulement, ce qui revient à prendre (Voyez pages 763, 619, 618).

$$U=3\left(\frac{B-A}{C}\right)\left\{\frac{668'',644.\,sin\,c'm.nt}{m^2-3\left(\frac{B-A}{C}\right)}-\frac{22641'',626.\,sin\,c.nt}{c^2-3\left(\frac{B-A}{C}\right)}\right\},$$

on aura, après avoir substitué les valeurs précédentes de x, y;

$$(9)\begin{cases}\Lambda=\lambda+\gamma\mu.\sin(g.nt+\varpi)\\ \qquad -\frac{e\gamma(1+\mu)}{2}\{(M+N)\sin(g.nt-c.nt+\varpi)-(N-M)\sin(g.nt-c.nt-\varpi)\};\\ \Pi=\varpi+180^\circ+(nt+\varepsilon-\int\zeta ndt)-\gamma\mu.\tang\lambda.\cos(g.nt+\varpi)\\ \qquad +\frac{e\gamma}{2}(1+\mu)\tang\lambda(N+M)\cos(g.nt-c.nt+\varpi)\\ \qquad +\frac{e\gamma}{2}(1+\mu)\tang\lambda(N-M)\cos(g.nt-c.nt-\varpi)\\ \qquad +3\left(\frac{B-A}{C}\right)\left\{\frac{668'',644.\sin c'm.nt}{m^2-3\left(\frac{B-A}{C}\right)}-\frac{22641'',626.\sin c.nt}{c^2-3\left(\frac{B-A}{C}\right)}\right\}.\end{cases}$$

Pour réduire en nombres ces dernières formules, nous prendrons (Voyez pages 16 et 606)

$$3\left(\frac{B-A}{C}\right)=0{,}0016917;\quad 3\left(\frac{C-A}{B}\right)=0{,}0017911;\quad 3\left(\frac{C-B}{A}\right)=0{,}0000993;$$

$$g-1=0{,}00402159;\quad 1-c=0{,}00845005.$$

De là on tire (Voyez pages 766, 771 et 585)

$$\mu=\frac{17911}{62521}=0{,}28648;\quad M=\frac{993}{124716}=0{,}0079621;\quad N=\frac{8955}{124716}=0{,}071803,$$

$$M+N=0{,}079765;\quad N-M=0{,}063841;\quad \gamma\mu=1^\circ.28'.41'',6;$$

$$\frac{e\gamma(1+\mu)(N+M)}{2}=52'',27;\quad \frac{e\gamma(1+\mu)(N-M)}{2}=41'',84;$$

$$3\left(\frac{B-A}{C}\right)\times\frac{668'',644}{m^2-3\left(\frac{B-A}{C}\right)}=289'',78;\quad 3\left(\frac{B-A}{C}\right)\times\frac{22641'',626}{c^2-3\left(\frac{B-A}{C}\right)}=39'',21;$$

et par conséquent;

$$(10)\begin{cases}\Lambda=\lambda+(1^\circ.28'.41'',6)\sin(g.nt+\varpi)\\ \qquad -52'',27\sin(g.nt-c.nt+\varpi)+41'',84\sin(g.nt-c.nt-\varpi);\\ \Pi=\varpi+180^\circ+(nt+\varepsilon-\int\zeta ndt)+289'',78\sin c'm.nt\\ \qquad -39'',21\sin c.nt-(1^\circ.28'.41'',6)\tang\lambda\cos(g.nt+\varpi)\\ \qquad +\tang\lambda\{52'',27\cos(g.nt-c.nt+\varpi)+41'',84\cos(g.nt-c.nt-\varpi)\}.\end{cases}$$

On ne doit pas perdre de vue, que la longitude sélénographique ϖ est censée comptée depuis l'axe (A) dirigé vers la Terre dans le sens du mouvement de rotation de la Lune.

90. L'observation des taches de la Lune fournit directement les valeurs de Λ et Π, à l'aide des latitudes et des longitudes géocentriques, en supposant connu le demi-diamètre de la Lune. Les équations qui lient ces différentes coordonnées sont faciles à former. En effet; soient α', β', la latitude et la longitude géocentrique d'un point pris sur la surface de la Lune, et ρ' sa distance au centre de la Terre: si l'on représente par α, β, ρ ce que deviennent ces coordonnées par rapport au centre de la Lune, il est clair qu'on a ces équations;

$$(f') \ldots \begin{cases} \rho'.\cos\alpha'\cos\beta' - \rho.\cos\alpha\cos\beta = x' = R.\cos\Lambda\cos\Pi, \\ \rho'.\cos\alpha'\sin\beta' - \rho.\cos\alpha\sin\beta = y' = R.\cos\Lambda\sin\Pi, \\ \rho'.\sin\alpha' - \rho.\sin\alpha = z' = R.\sin\Lambda. \end{cases}$$

Actuellement si l'on désigne par ρ'_1, α'_1, β'_1 ce que deviennent, respectivement, les trois quantités ρ', α', β', lorsqu'on les observe d'un point pris sur la surface de la Terre, dont R' soit la distance à son centre et Λ', Π' la latitude et la longitude de son zénith, on aura

$$(f'') \ldots \begin{cases} \rho'\cos\alpha'\cos\beta' = \rho'_1\cos\alpha'_1\cos\beta'_1 + R'\cos\Lambda'\cos\Pi', \\ \rho'\cos\alpha'\sin\beta' = \rho'_1\cos\alpha'_1\sin\beta'_1 + R'\cos\Lambda'\sin\Pi', \\ \rho'\sin\alpha' = \rho'_1\sin\alpha'_1 + R'\sin\Lambda'. \end{cases}$$

Cela posé, je regarde, pour plus de généralité, la figure de la surface de la Lune comme elliptique; de manière que son équation rapportée à ses axes principaux soit,

$$\frac{x''^2}{(A)^2} + \frac{y''^2}{(B)^2} + \frac{z''^2}{(C)^2} = 1.$$

Maintenant, pour rapporter cette équation aux coordonnées x', y', z', je remarque, que les formules de la transformation des coordonnées donnent

$$x'' = x' \cos(\varphi - \psi) + y' \sin(\varphi - \psi) - z'.\theta \sin\varphi;$$

$$y'' = -x' \sin(\varphi - \psi) + y' \cos(\varphi - \psi) - z'.\theta \cos\varphi;$$

$$z'' = z' + \theta(x' \sin\psi + y' \cos\psi).$$

(Voyez page 75 du premier volume de la Mécanique Céleste).

Il suit de là, et des équations (f') et (f''), que

$$\begin{aligned} x'' = {} & \rho'_1 \{ \cos\alpha'_1 \cos(\varphi - \psi - \beta'_1) - \theta . \sin\varphi \sin\alpha'_1 \} \\ & - \rho \{ \cos\alpha \cos(\varphi - \psi - \beta) - \theta . \sin\varphi \sin\alpha \} \\ & + R' \{ \cos\Lambda' \cos(\varphi - \psi - \Pi') - \theta . \sin\varphi \sin\Lambda' \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' = {} & -\rho'_1 \{ \cos\alpha'_1 \sin(\varphi - \psi - \beta'_1) + \theta . \cos\varphi \sin\alpha'_1 \} \\ & + \rho \{ \cos\alpha \sin(\varphi - \psi - \beta) + \theta . \cos\varphi \sin\alpha \} \\ & - R' \{ \cos\Lambda' \sin(\varphi - \psi - \Pi') + \theta . \cos\varphi \sin\Lambda' \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'' = {} & \rho'_1 \{ \sin\alpha'_1 + \theta . \cos\alpha'_1 \sin(\psi + \beta'_1) \} \\ & - \rho \{ \sin\alpha + \theta . \cos\alpha \sin(\psi + \beta) \} \\ & + R' \{ \sin\Lambda' + \theta . \cos\Lambda' \sin(\psi + \Pi') \}. \end{aligned}$$

Donc en écrivant, pour plus de simplicité ;

$$x'' = H'\rho'_1 - H\rho + KR'; \quad y'' = -G'\rho'_1 + G\rho - K'R'; \quad z'' = F'\rho'_1 - F\rho + K''R';$$

et nommant Δ, Δ', Δ'' les angles sous lesquels on verrait du centre de la Terre les trois axes (A), (B), (C), on aura

$$(A) = \rho . \sin\Delta; \quad (B) = \rho . \sin\Delta'; \quad (C) = \rho . \sin\Delta'';$$

ce qui change l'équation de la surface de la Lune en celle-ci :

$$(11) \ldots \left\{ 1 = \frac{(H'z - H + K \sin\Pi'')^2}{\sin^2\Delta} + \frac{(G'z - G + K' \sin\Pi'')^2}{\sin^2\Delta'} + \frac{(F'z - F + K'' \sin\Pi'')^2}{\sin^2\Delta''}; \right.$$

où l'on a fait $R' = \rho . \sin\Pi''$, $\rho'_1 = \rho . z$.

Ainsi, on aura par cette équation la valeur de ρ'_1, lorsque celles de ρ, Δ, Δ', Δ'' seront connues. On suppose tacitement, que la valeur de $\varphi - \psi$ a été calculée à l'aide de l'équation

$$\varphi - \psi = 180^\circ + \left(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt\right) + U;$$

et que les valeurs de $\theta \sin\varphi$, $\theta \cos\varphi$ ont été calculées à l'aide des équations (1) et (2) trouvées dans la page 772.

Cela posé, les équations (f') et (f'') donneront les valeurs de Λ et Π, puisqu'on en tire;

$$(12) \;..\; \begin{cases} \tang \Pi = \dfrac{z \,.\, \cos\alpha'_1 \sin\beta'_1 - \cos\alpha \sin\beta + \sin\Pi'' \cos\Lambda' \sin\Pi'}{z \,.\, \cos\alpha'_1 \cos\beta'_1 - \cos\alpha \cos\beta + \sin\Pi'' \cos\Lambda' \cos\Pi'}; \\ \tang \Lambda = \dfrac{\cos\Pi \,\{z \,.\, \sin\alpha'_1 - \sin\alpha + \sin\Pi'' \sin\Lambda'\}}{z \,.\, \cos\alpha'_1 \cos\beta'_1 - \cos\alpha \cos\beta + \sin\Pi'' \cos\Lambda' \cos\Pi'}. \end{cases}$$

Il est facile d'éliminer de ces expressions les quantités Λ' et Π'. En effet, si nous nommons L' la latitude géographique du lieu de l'observation; S' le temps sidéral, et ω' l'obliquité de l'écliptique, on a, comme on sait, ces trois équations

$$(13) \;..\; \begin{cases} \cos\Lambda' \sin\Pi' = \sin\omega' \sin L' + \cos\omega' \cos L' \sin S'; \\ \cos\Lambda' \cos\Pi' = \cos L' \cos S'; \\ \sin\Lambda' = \cos\omega' \sin L' - \sin\omega' \cos L' \sin S'. \end{cases}$$

On peut donc substituer ces valeurs dans les équations (12) et écrire ainsi les coefficiens de R' qui entrent dans les valeurs précédentes de x'', y'', z''; savoir

$$K = \cos(\varphi - \psi) \cos L' \cos S' + \sin(\varphi - \psi) \{\sin\omega' \sin L' + \cos\omega' \cos L' \sin S'\}$$
$$- \theta \,.\, \sin\varphi \{\cos\omega' \sin L' - \sin\omega' \cos L' \sin S'\};$$

$$K' = \sin(\varphi - \psi) \cos L' \cos S' - \cos(\varphi - \psi) \{\sin\omega' \sin L' + \cos\omega' \cos L' \sin S'\}$$
$$+ \theta \,.\, \cos\varphi \{\cos\omega' \sin L' - \sin\omega' \cos L' \sin S'\};$$

$$K'' = \cos\omega' \sin L' - \sin\omega' \cos L' \sin S + \cos L' \cos S \{\theta . \sin\varphi \cos(\varphi - \psi) - \theta . \cos\varphi \sin(\varphi - \psi)\}$$
$$+ \cos(\varphi - \psi) \,.\, \theta \,.\, \cos\varphi (\sin\omega' \sin L' + \cos\omega' \cos L' \sin S')$$
$$+ \sin(\varphi - \psi) \,.\, \theta \,.\, \sin\varphi (\sin\omega' \sin L' + \cos\omega' \cos L' \sin S').$$

91. L'équation (11) se simplifie considérablement, lorsqu'on suppose la figure de la Lune sphérique ; c'est-à-dire $\Delta = \Delta' = \Delta''$. Alors, en développant les différens termes qui composent cette équation, on trouve égale à zéro la partie multipliée par la première puissance de θ : et comme on néglige dans cette analyse le carré de θ, il en résulte, que l'hypothèse de la figure sphérique réduit l'équation (11) à celle-ci ;

$$(14) \ldots \; 0 = z^2 - 2z(\cos\theta' - \sin\Pi'' \cos\theta'') + \cos^2\Delta + \sin^2\Pi'' - 2\sin\Pi'' \cos\theta''' ;$$

où l'on a fait, pour plus de simplicité ;

$$(15) \ldots \begin{cases} \cos\theta' = \sin\alpha'_{,} \sin\alpha + \cos\alpha'_{,} \cos\alpha \, . \cos(\beta'_{,} - \beta) ; \\ \cos\theta'' = \sin\alpha'_{,} \sin\Lambda' + \cos\alpha'_{,} \cos\Lambda' . \cos(\beta'_{,} - \Pi') ; \\ \cos\theta''' = \sin\alpha \sin\Lambda' + \cos\alpha \cos\Lambda' . \cos(\beta - \Pi'). \end{cases}$$

Maintenant, si l'on fait $z = 1 - \xi$, on trouvera, en résolvant l'équation (14) par rapport à ξ ;

$$\xi = 2\sin^2 . \frac{\theta'}{2} + \sin\Pi'' \cos\theta'' - \begin{Bmatrix} \left(2\sin^2\frac{\theta'}{2} + \sin\Pi'' \cos\theta''\right)^2 - \sin^2\Pi'' + \sin^2\Delta \\ -4\sin^2\frac{\theta'}{2} - 2\sin\Pi''(\cos\theta'' - \cos\theta''') \end{Bmatrix}^{\frac{1}{2}} ;$$

d'où l'on tire

$$(16) \ldots z = 1 - 2.\sin^2 . \frac{\theta'}{2} - \sin\Pi'' \cos\theta'' + \begin{Bmatrix} \sin^2\Delta - \sin^2\Pi'' \sin^2\theta'' - \sin^2\theta' \\ + 2\sin\Pi''(\cos\theta''' - \cos\theta' . \cos\theta'') \end{Bmatrix}^{\frac{1}{2}} .$$

Le système des équations (12), (13), (15), (16) offre donc le moyen de calculer les valeurs de Λ et Π par l'observation des taches de la Lune. Ensuite, la comparaison de ces valeurs, avec celles données par les équations (9), fournira un système d'équations de condition propre à déterminer les quatre constantes λ, ϖ, μ, $\frac{B-A}{C}$.

92. On pourrait envisager cette recherche sous un autre point de vue fondé sur cette remarque. Les équations (f) posées dans la page 774, donnent

$$x' \sin\psi + y' \cos\psi = x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi + z''\theta.$$

Donc, en négligeant le carré de θ, la troisième des mêmes équations (f) donne

$$z' = z'' - x'.\theta \sin\psi - y'.\theta \cos\psi.$$

Mais nous avons $z'' = R' \sin\lambda = \rho . \sin\Delta \sin\lambda$, et les équations (f'), (f'') donnent

$$x' = \rho . Q'; \quad y' = \rho . Q''; \quad z' = \rho . Q''';$$

en posant, pour plus de simplicité,

$$(17) \ldots \begin{cases} Q' = z . \cos\alpha'_1 \cos\beta'_1 - \cos\alpha . \cos\beta + \sin\Pi'' . \cos\Lambda' . \cos\Pi'; \\ Q'' = z . \cos\alpha'_1 \sin\beta'_1 - \cos\alpha . \sin\beta + \sin\Pi'' . \cos\Lambda' . \sin\Pi'; \\ Q''' = z . \sin\alpha'_1 - \sin\alpha + \sin\Pi'' . \sin\Lambda': \end{cases}$$

donc on a

$$(18) \ldots\ldots \sin\Delta \sin\lambda = Q'.\theta \sin\psi + Q''.\theta \cos\psi + Q'''.$$

Maintenant, il faut observer, que

$$\theta \sin\psi = \theta \sin\{\varphi - (\varphi - \psi)\} = \theta \sin\varphi . \cos(\varphi - \psi) - \theta \cos\varphi . \sin(\varphi - \psi),$$

$$\theta \cos\psi = \theta \cos\{\varphi - (\varphi - \psi)\} = \theta \cos\varphi . \cos(\varphi - \psi) + \theta \sin\varphi . \sin(\varphi - \psi),$$

$$\varphi - \psi = 180° + (nt + \varepsilon - \int \zeta n dt) + U,$$

et que par conséquent nous avons, en négligeant le carré de U;

$$\theta \sin\psi = \theta \cos\varphi . \sin(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt) - \theta \sin\varphi . \cos(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt)$$
$$+ U\{\theta \cos\varphi . \cos(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt) + \theta \sin\varphi . \sin(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt)\};$$

$$\theta \cos\psi = -\theta \cos\varphi . \cos(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt) - \theta \sin\varphi . \sin(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt)$$
$$+ U\{\theta \cos\varphi . \sin(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt) - \theta \sin\varphi . \cos(nt + \varepsilon - \int \zeta n dt)\}.$$

En écrivant ω au lieu de θ dans le second membre de ces équations, et éliminant ensuite $\omega \sin\varphi$, $\omega \cos\varphi$, à l'aide des équations (1) et (2), on trouvera, en négligeant les termes multipliés par UM ou par UN;

$$\theta \sin\psi = \gamma\mu . \sin(g.nt - nt) - \gamma\mu U . \cos(g.nt - nt)$$
$$+ \tfrac{(1+\mu)e\gamma}{2}\{(N-M)\sin(g.nt - c.nt + nt) + (N+M)\sin(g.nt - c.nt - nt)\};$$

$$\theta \cos\psi = \gamma\mu . \cos(g.nt - nt) + \gamma\mu U . \sin(g.nt - nt)$$
$$- \tfrac{(1+\mu)e\gamma}{2}\{(N-M)\cos(g.nt - c.nt + nt) + (N+M)\cos(g.nt - c.nt - nt)\}.$$

Cela posé, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (18), on aura;

$$(19)\left\{\begin{array}{l} \sin\Delta \sin\lambda - Q''' = \\ \gamma\mu\{(Q' + UQ'')\sin(g.nt - nt) + (Q'' - UQ')\cos(g.nt - nt)\} \\ + \frac{(1+\mu)e\gamma(N-M)}{2}\{Q'\sin(g.nt - c.nt + nt) - Q''\cos(g.nt - c.nt + nt)\} \\ + \frac{(1+\mu)e\gamma(N+M)}{2}\{Q'\sin(g.nt - c.nt - nt) - Q''\cos(g.nt - c.nt - nt)\}. \end{array}\right.$$

Cette équation a l'avantage de renfermer seulement les trois inconnues λ, μ, $\frac{B-A}{C}$, après qu'on y a remplacé U, M, N par leurs valeurs. Mais il vaudra mieux l'employer en y supprimant d'abord les termes multipliés par U; ce qui la réduit à

$$(20) \;.\;.\; \sin\Delta\sin\lambda = Q''' + \gamma\mu\{Q'\sin(g.nt - nt) + Q''\cos(g.nt - nt)\}.$$

93. Si l'on veut compléter les formules précédentes par l'addition des termes, qui renferment les quatre constantes arbitraires contenues dans les valeurs de x, y, il faudra reprendre les équations (L'') posées dans la page 764, et les intégrer après y avoir fait $s = 0$. Cette intégration étant exécutée par la méthode de *Lagrange* (Voyez pages 284, 285, et 291 du volume de l'Académie de Berlin pour

l'année 1780) donne, en négligeant les quantités de l'ordre du carré ou du produit de $\frac{C-A}{C}$ et $\frac{C-B}{C}$;

$$x=M'\sin(nt+p'nt+f')+M''\sin(p''nt+f'');$$

$$y=M'\cos(nt+p'nt+f')+p'''M''\cos(p''nt+f'');$$

où M', M'', f', f'' désignent quatre constantes arbitraires, et

$$p'=\tfrac{3}{2}\left(\frac{C-A}{C}\right);\quad p''=2\sqrt{\left(\frac{C-A}{C}\right)\left(\frac{C-B}{C}\right)};\quad p'''=\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}.$$

Ces valeurs de x, y donnent, en négligeant les termes multipliés par U;

$$\theta\sin\psi=-M'\sin(p'nt+f')$$
$$+M''\left\{\left(p'''-\tfrac{1}{2}\right)\sin(nt+p''nt+f'')+\left(p'''+\tfrac{1}{2}\right)\sin(nt-p''nt-f'')\right\};$$

$$\theta\cos\psi=-M'\cos(p'nt+f')$$
$$-M''\left\{\left(p''-\tfrac{1}{2}\right)\cos(nt+p''nt+f'')+\left(p'''+\tfrac{1}{2}\right)\cos(nt-p''nt-f'')\right\}.$$

Les formules (8) (Voyez page 775) démontrent, que ces mêmes valeurs de x, y introduisent dans la valeur de Λ les termes

$$-M'\sin(nt+p'nt+\varpi+f')$$
$$-M''\left\{\left(p'''+\tfrac{1}{2}\right)\sin(p''nt+\varpi+f'')-\left(p'''-\tfrac{1}{2}\right)\sin(p''nt-\varpi+f'')\right\};$$

et dans la valeur de Π, les termes

$$+M'\,\text{tang}\,\lambda.\cos(nt+p'nt+\varpi+f')$$
$$+M''\,\text{tang}\,\lambda\left\{\left(p'''+\tfrac{1}{2}\right)\cos(p''nt+\varpi+f'')+\left(p''-\tfrac{1}{2}\right)\cos(p''nt-\varpi+f'')\right\}.$$

En considérant l'expression de $\text{tang}(\varphi-180^\circ-g.nt)$ posée dans la page 772, il est aisé de voir, que son numérateur augmente des termes

$$+\frac{2}{c\gamma}\left\{\begin{array}{l} M'\sin\{(g-1)nt-p'nt-f'\}-M''\left(\frac{1}{2}-p'''\right)\sin(g.nt+p''nt+f'') \\ +M''\left(\frac{1}{2}+p'''\right)\sin(g.nt-p''nt-f'') \end{array}\right\},$$

et son dénominateur des termes

$$-\frac{2}{c\gamma}\left\{\begin{array}{l} M'\cos\{(g-1)nt-p'nt-f'\}-M''\left(\frac{1}{2}-p'''\right)\cos(g.nt+p''nt+f'') \\ +M''\left(\frac{1}{2}+p'''\right)\cos(g.nt-p''nt-f'') \end{array}\right\}:$$

de sorte que l'expression de $-\Omega$ donnée dans la page 773 sera augmentée des termes

$$+\frac{1}{c\gamma}\left\{\begin{array}{l} M'\sin\{(g-1)nt-p'nt-f'\} \\ -M''\left(\frac{1}{2}-p'''\right)\sin(g.nt+p''nt+f'')+M''\left(\frac{1}{2}+p'''\right)\sin(g.nt-p''nt-f'') \end{array}\right\}.$$

94. En réfléchissant sur la forme des argumens, dont les coefficiens sont fonction des trois constantes arbitraires G, M', M'', il devient difficile de croire, que l'omission de ces termes puisse avoir eu une influence considérable sur les deux quantités $3\left(\frac{C-A}{B}\right)=0{,}0017911$, $3\left(\frac{B-A}{C}\right)=0{,}0016917$, déduites d'un grand nombre d'observations de la tache *Manilius*. Il est vrai, que ces résultats sont loin de s'accorder avec ceux tirés de l'hypothèse de la fluidité primitive de la Lune par couches de densités variables. Néanmoins, il me semble qu'on s'approchera davantage de la vérité, en abandonnant cette hypothèse, qu'en attribuant aux valeurs précédentes de $3\left(\frac{C-A}{B}\right)$, $3\left(\frac{B-A}{C}\right)$ des erreurs assez grandes, pour pouvoir les regarder comme la cause unique de cet écart entre la théorie et l'observation.

Probablement, de nouvelles recherches fixeront mieux nos idées sur cette anomalie, et nous mettront en état d'apprécier avec plus de justesse tout ce qu'il peut y avoir de réel dans l'ingénieuse

explication donnée par *Laplace* sur les progrès de la cause, qui a d'abord fait naître et ensuite détruit le terme

$$G.\sin\left\{nt\sqrt{3\left(\frac{B-A}{C}\right)}+\lambda\right\}$$

dans l'expression de la libration en longitude (Voyez page 414 du Système du Monde, cinquième édition).

S'il est permis d'appliquer ici une hypothèse émise par *Lagrange* (Voyez page 75 du second volume de la Mécanique Analytique) on dira, que ce terme de la libration a pu être anéanti par l'effet d'une explosion interne dans le globe de la Lune; et on accordera en même temps, que sa renaissance, en vertu d'une cause semblable, n'est pas démontrée impossible.

§ 14.

Note sur le mois Lunaire synodique.

95. Si les mouvemens de la Lune et du Soleil étaient parfaitement uniformes, il est évident que, en nommant X le nombre des jours moyens compris entre deux oppositions consécutives de leurs centres de gravité, on aurait l'équation $nX-n'X=360°$, et par conséquent

$$(1) \ldots X=\frac{360°}{n-n'}.$$

C'est cette quantité (constante d'après sa définition) qu'on a coûtume de nommer *mois lunaire synodique*, ou *intervalle moyen entre deux pleines lunes consécutives.*

Pour pouvoir déterminer la valeur de X, à l'aide d'observations faites sur le mouvement du Soleil et de la Lune dans l'état réel des choses, il faut en avoir l'expression par d'autres quantités susceptibles d'être mesurées d'après les phénomènes. Pour cela, remarquons d'abord

que, en nommant v, V deux longitudes vraies de la Lune correspondantes aux instans t, T, on a

$$v = nt + \varepsilon - \int \zeta dv + F(t)\,; \quad V = nT + \varepsilon - \int' \zeta dv + F(T),$$

$F(t)$, $F(T)$ étant la somme des termes périodiques. Ces deux équations donnent

$$(2) \ldots V - v = n(T-t) - \int' \zeta dv + \int \zeta dv + F(T) - F(t).$$

Soient v', V' les longitudes vraies du Soleil, qui ont lieu aux mêmes instans t, T; on aura semblablement

$$(3) \ldots\ldots\ldots V' - v' = n'(T-t) + f(T) - f(t).$$

Donc, en retranchant l'équation (3) de l'équation (2) il viendra

$$(4) \ldots n - n' = \frac{(V-v) - (V'-v') - \{\int' \zeta dv - \int \zeta dv\} - \{F(T) - F(t)\} + \{f(T) - f(t)\}}{T-t}\,;$$

et par conséquent;

$$(5) \ldots X = \frac{(T-t)\,360^\circ}{(V-v) - (V'-v') - \{\int' \zeta dv - \int \zeta dv\} - \{F(T) - F(t)\} + \{f(T) - f(t)\}}.$$

Analytiquement parlant, cette expression ne donne pas la solution du problème, puisque les quantités n et n', ainsi que les autres élémens des deux orbites, s'y trouvent renfermés: cependant, on peut l'appliquer avec un grand succès, en choisissant convenablement les tems t et T. En effet; si ces deux époques sont séparées par un fort grand nombre d'années, la quantité progressive $(V-v)-(V'-v')$ pourra devenir incomparablement plus grande que la quantité

$$\int \zeta dv - \int' \zeta dv - \{F(T) - F(t)\} + \{f(T) - f(t)\},$$

composée de termes périodiques: et alors on pourra réduire la formule précédente à celle-ci;

$$(6) \ldots X = \frac{(T-t)\,360^\circ}{(V-v)-(V'-v')},$$

qui a l'avantage d'être indépendante de tout ce qui exige une connaissance approfondie de la théorie de la Lune et du Soleil. Pour en faciliter davantage l'application, on pourrait choisir pour t et T les instans correspondans à deux oppositions, lesquels sont rendus visibles par la pleine Lune : alors, le dénominateur $(V-v)-(V'-v')$ est égal à autant de fois 360° qu'il y a eu de pleines Lunes dans l'intervalle $T-t$: de sorte que, en désignant par i ce multiple de 360°, on aura

$$(7) \ldots X = \frac{T-t}{i}.$$

Pour perfectionner cette méthode, et éliminer l'indécision que laisse l'observation des instans de la pleine Lune, il faudra choisir deux oppositions correspondantes à deux éclipses de Lune, et prendre pour t et T les instans qui ont lieu au milieu de l'éclipse. Ces instans ne sont pas toujours ceux de l'opposition précisément ; mais la grandeur du dénominateur i pourra atténuer l'erreur de quelques minutes, que cette manière de voir laisse dans la mesure de l'intervalle $T-t$. Les anciens ont employé cette méthode sans savoir au juste le degré de précision dont elle était susceptible. Si l'on veut, dans l'état actuel de la science, connaître la correction qui doit être faite aux évaluations de ce genre du mois Lunaire, on calculera les quantités

$$M = (V-v)-(V'-v'),$$

$$R = \int' \zeta dv - \int \zeta dv + \{F(T)-F(t)\} - \{f(T)-f(t)\},$$

qui avaient lieu aux instans t et T, et on prendra

$$(8) \ldots X = \frac{(T-t)\,360^\circ}{M-R} = \frac{(T-t)\,360^\circ}{M}\left\{1+\frac{R}{M}+\frac{R^2}{M^2}+\text{ etc.}\right\}.$$

Remarquons maintenant, que l'expression de la longitude vraie de la Lune posée dans les pages 748, 749, donne

$+19860'',799$ pour la somme des coefficiens affectés du signe $+$;
$-\quad 946'',418$ pour la somme des coefficiens affectés du signe $-$;

et qu'en conséquence la quantité R ne peut pas surpasser 10° dans les cas les plus défavorables. Si à cette circonstance on ajoute celle-ci; que dans les observations d'éclipses on peut supposer la quantité M égale à un nombre exact de circonférences (du moins à l'égard de la fraction $\frac{R}{M}$) on en conclura que

$$\frac{R}{M} < \frac{10^\circ}{K.360^\circ} < \frac{1}{K.36};$$

K désignant un nombre entier.

96. Soit Y la durée moyenne de la révolution sidérale du Soleil; nous aurons $360^\circ = n'Y$: donc en introduisant cette valeur dans l'équation (1), il viendra

$$(9) \cdot \cdot \frac{X}{Y} = \frac{n'}{n-n'} = \frac{m}{1-m}.$$

En nommant Y' la durée moyenne de l'année tropique ou équinoxiale, on sait que

$$Y' = Y\left\{1 - \frac{501}{12960000}\right\};$$

partant nous avons

$$(10) \therefore \frac{X}{Y'} = \frac{m}{1-m}\left\{1 - \frac{501}{12960000}\right\}^{-1}.$$

Le premier membre de cette équation est donné par les observations astronomiques, d'après lesquelles on a;

$$\frac{Y'}{X} = \frac{3652422639659}{295305885391}$$

(Voyez pages 256 et 318 du second volume de l'Astronomie de *Delambre*): mais si l'on veut exprimer ce rapport plus simplement et avec un peu moins de précision, il faut réduire cette fraction en fraction continue, et former la suite des fractions convergentes: voici ces fractions avec les quotients correspondans:

$$\overset{12}{\frac{1}{0}},\quad \overset{2}{\frac{12}{1}},\quad \overset{1}{\frac{25}{2}},\quad \overset{2}{\frac{37}{3}},\quad \overset{1}{\frac{99}{8}},\quad \overset{1}{\frac{136}{11}},\quad \overset{17}{\frac{235}{19}},\quad \overset{1}{\frac{4131}{334}},\quad \overset{1}{\frac{4366}{353}},$$

$$\overset{1}{\frac{8497}{687}},\quad \overset{4}{\frac{12863}{1040}},\quad \overset{5}{\frac{59949}{4847}},\quad \overset{3}{\frac{312608}{25275}},\quad \overset{1}{\frac{997773}{80672}},\quad \overset{3}{\frac{1310381}{105947}},\quad \overset{1}{\frac{4928916}{398513}},$$

$$\overset{18}{\frac{6239297}{504460}},\quad \overset{9}{\frac{117236262}{9478793}},\quad \overset{1}{\frac{1061365655}{85813597}},\quad \overset{5}{\frac{1178601917}{95292390}},\quad \overset{1}{\frac{6954375240}{562275547}},$$

$$\overset{3}{\frac{8132977157}{657567937}},\quad \overset{1}{\frac{31353306711}{2534979358}},\quad \overset{4}{\frac{39486283868}{3192547295}},\quad \overset{1}{\frac{189298442183}{15305168538}},$$

$$\overset{1}{\frac{228784726051}{18497715833}},\quad \overset{1}{\frac{418083168234}{33802884371}},\quad \overset{5}{\frac{646867894285}{52300600204}},\quad \frac{3652422539659}{295305885391}.$$

La *septième* de ces fractions convergentes, c'est-à-dire $\frac{235}{19}$ nous présente le rapport de *Méton*, et la *neuvième*, $\frac{4366}{353}$, est fort approchante du rapport qu'*Hipparque* a substitué à celui de *Méton*: car on a

$$(11)\ .\ .\ \frac{Y'}{X}=\frac{4366}{353}=\frac{4366\times 345}{345\times 353}=\frac{1506270}{345\times 353}=\frac{4267.\frac{19}{353}}{345}=\frac{4267{,}054}{345}.$$

Au reste, pour trouver le rapport de *Méton*, il n'est pas nécessaire que l'année tropique et le mois lunaire synodique soient déterminés avec une très-grande précision. En prenant, par exemple, $\frac{Y'}{X}=\frac{36525}{2953}$ et réduisant ce rapport en fraction continue on obtient cette suite de quotients et de fractions convergentes, savoir

$$\overset{12}{\frac{1}{0}},\quad \overset{2}{\frac{12}{1}},\quad \overset{1}{\frac{25}{2}},\quad \overset{2}{\frac{37}{3}},\quad \overset{2}{\frac{99}{8}},\quad \overset{7}{\frac{235}{19}},\quad \overset{2}{\frac{1744}{141}},\quad \overset{1}{\frac{3723}{301}},\quad \overset{6}{\frac{5467}{442}},\quad \frac{36535}{2953}.$$

97. Si nous supposons parfaitement uniforme le mouvement de la Lune et celui du noeud ascendant de son orbite, on aura, en nommant X' la durée moyenne du mois lunaire par rapport à ce noeud, $nX'+(g-1)nX'=360°$; d'où l'on tire

$$(12)\ .\ .\ X'=\frac{360°}{ng}=\frac{360°}{n(1-m)}\cdot\frac{1-m}{g}=X.\frac{1-m}{g}.$$

Soit X'' la durée moyenne du mois lunaire par rapport au périgée; on aura de même l'équation $nX''-(1-c)nX''=360°$, qui donne

$$(13)\ .\ .\ X''=\frac{360°}{nc}=\frac{360°}{n(1-m)}\cdot\frac{1-m}{c}=X.\frac{1-m}{c}.$$

En nommant X''' la durée moyenne de la révolution sidérale du noeud, on aura l'équation $nX'''(g-1)=360°$; d'où l'on tire

$$(14)\ .\ .\ X'''=\frac{360°}{n(g-1)}=\frac{360°}{n(1-m)}\cdot\frac{1-m}{g-1}=X.\frac{1-m}{g-1}.$$

Nous avons (Voyez pages 483, 606)

$$m=0{,}07480130;\quad g-1=0{,}004021595;\quad 1-c=0{,}0084500056.$$

Il suit de là que,

$$\frac{1-m}{g}=\frac{92519870}{100402159};\qquad \frac{1-m}{c}=\frac{92519870}{99154994};$$

ce qui donne

$$\frac{X}{X'}=\frac{100402159}{92519870};\qquad \frac{X}{X''}=\frac{99154994}{92519870}.$$

En réduisant ces fractions en fraction continue on aura cette suite de quotients et de fractions convergentes:

$$\underbrace{\frac{X}{X'}}.$$

$$\overset{1}{\frac{1}{0}},\ \overset{11}{\frac{1}{1}},\ \overset{1}{\frac{12}{11}},\ \overset{2}{\frac{13}{12}},\ \overset{1}{\frac{38}{35}},\ \overset{4}{\frac{51}{47}},\ \overset{3}{\frac{242}{223}},\ \overset{18}{\frac{777}{716}},\ \overset{1}{\frac{14228}{13111}},\ \overset{1}{\frac{15005}{13827}},$$

$$\overset{5}{\frac{29233}{26938}},\ \overset{1}{\frac{161170}{148517}},\ \overset{1}{\frac{190403}{175455}},\ \overset{6}{\frac{351573}{323972}},\ \overset{1}{\frac{2299841}{2119287}},\ \overset{37}{\frac{2651414}{2443259}},\ \frac{100402159}{92519870}.$$

$$\underbrace{\frac{X}{X''}}.$$

$$\overset{1}{\frac{1}{0}},\ \overset{13}{\frac{1}{1}},\ \overset{1}{\frac{14}{13}},\ \overset{16}{\frac{15}{14}},\ \overset{1}{\frac{254}{237}},\ \overset{5}{\frac{269}{251}},\ \overset{2}{\frac{1599}{1492}},\ \overset{1}{\frac{3467}{3235}},\ \overset{3}{\frac{5066}{4727}},$$

$$\overset{2}{\frac{18665}{17416}},\ \overset{2}{\frac{42396}{39559}},\ \overset{4}{\frac{103457}{96534}},\ \overset{4}{\frac{456224}{425695}},\ \overset{8}{\frac{1928353}{1799314}},\ \overset{3}{\frac{15883048}{14820207}},\ \frac{99154994}{92519870}.$$

Sur cela je remarque, qu'en prenant $\frac{X}{X'} = \frac{29233}{26938}$, on aura, en divisant par 5 les deux termes de cette fraction

$$\frac{X}{X'} = \frac{5846.\frac{3}{5}}{5387.\frac{3}{5}};$$

et qu'en prenant, $\frac{X}{X'} = \frac{190403}{175455} = \frac{190403 \times 5458}{175455 \times 5458}$, on aura

$$(15)\ \ldots\ \frac{X}{X'} = \frac{5922.\frac{175064}{175455}}{5458}.$$

Soit X^{IV} la durée moyenne de la révolution sidérale de la Lune, nous avons $nX^{IV} = 360^\circ$, ou bien

$$X^{IV} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Mais $360° = n'Y$; partant

$$X^{IV} = \frac{n'}{n} Y = mY,$$

d'où l'on tire

$$\frac{X^{IV}}{Y'} = m.\left\{1 - \frac{501}{12960000}\right\}^{-1}.$$

Nous avons aussi;

$$X^{IV} = \frac{360°}{n(1-m)}.(1-m) = X(1-m);$$

partant $\frac{X^{IV}}{Y'} = (1-m)\frac{X}{Y'}$, ou bien

$$\frac{Y'}{X^{IV}} = \frac{1}{1-m}.\frac{Y'}{X} = \frac{1}{0,92519870}\frac{Y'}{X}.$$

Donc en prenant

$$\frac{Y'}{X} = \frac{4267.\frac{19}{353}}{345},$$

on aura

$$(16) \ldots \frac{345.Y'}{X^{IV}} = \frac{4267.\frac{19}{353}}{0,92519870} = 4612,04.$$

L'équation (13) donne $\frac{Y'}{X''} = \frac{c}{1-m}.\frac{Y'}{X}$; ainsi on a

$$\frac{345.Y'}{X''} = \frac{c}{1-m}\left(4267 + \frac{19}{353}\right) = c \times 4612,04;$$

d'où l'on tire

$$(17) \ldots \frac{345.Y'}{X''} = 4612,04 - (1-c).4612,04 = 4573,07.$$

Les équations (11), (15), (16) et (17) fournissent les résultats d'*Hipparque* cités par *Laplace* dans la page 282 du second volume du Système du Monde (cinquième édition). Par la manière même dont ils sont ici retrouvés, on conçoit, qu'ils n'ont lieu qu'à l'égard des moyens mouvements proprement dits, et abstraction faite des inégalités séculaires qu'ils renferment.

Note sur la page 225 du second volume.

Dans la valeur de $\left\{\frac{3}{2}u_{,}-\frac{3}{2}q\left(\frac{\alpha' u'}{u_{,}}\right)^3\right\}\frac{\delta u}{u_{,}}$ il y a aussi les deux termes

$$\cos cv \quad e\left(\frac{81}{32}m\,\varepsilon'^2\right)+\cos cv \quad e\left(-\frac{81}{32}m\,\varepsilon'^2\right)$$

donnés par le multiplicateur $2.\cos c'mv \quad \varepsilon'\left(-\frac{9}{4}\right)$: mais il se détruisent.

Note sur la page 271 du second volume.

À la rigueur, cette expression de $2s_{,}\delta s$ doit aussi renfermer les deux termes

$$\cos c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2\left(\frac{9}{4}m\,e^2-\frac{9}{16}m\,\gamma^2+\frac{81}{64}m\,\varepsilon'^2\right)$$

$$\cos c'mv \quad \varepsilon'\gamma^2\left(-\frac{9}{4}m\,e^2+\frac{9}{16}m\,\gamma^2-\frac{81}{64}m\,\varepsilon'^2\right),$$

qui se détruisent.

Note sur la page 10 du troisième volume.

Depuis l'impression de cette page, la correction qu'on doit faire au coefficient $A^{(0)}=-\frac{2}{a'}-\frac{5a^2}{2a'^3}$, a paru dans la C.e des Tems pour l'année 1832 (Voyez page 93 des Additions).

Note sur la page 118 du troisième volume.

Il faut supprimer les deux termes

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,2Ev+c'mv \quad \varepsilon'\left(-\frac{9}{2}m^2\right)+\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,2Ev-c'mv \quad \varepsilon'\left(\frac{9}{2}m^2\right)$$

posés dans la quatrième ligne (en remontant).

Note sur la page 797 du troisième volume.

Il faut ôter le terme $+\frac{103052177}{122880}m^6$ posé dans la cinquième ligne (en remontant).

FIN DU PREMIER VOLUME.

V. Botto Rev. Arciv.

Si permette la stampa
Torino il 28 di dicembre 1832
M. S. PROVANA per la G. C.

